کد کنترل
533
C

533C

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی‌ارشد ناپیوسته ــ سال ۱۴۰۴

«علم و تحقیق، کلید پیشرفت کشور است.»
مقام معظم رهبری

صبح جمعه
۱۴۰۳/۱۲/۰۳

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آمار (کد ۱۲۰۷)

تعداد سؤال: ۱۰۵ سؤال — مدت‌زمان پاسخگویی: ۲۵۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤال‌ها

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۲۵	۱	۲۵
۲	دروس پایه (ریاضی عمومی (۱ و ۲)، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی و مبانی احتمال)	۲۵	۲۶	۵۰
۳	دروس تخصصی ۱ (احتمال (۱ و ۲)، آمار ریاضی (۱ و ۲))	۳۲	۵۱	۸۲
۴	دروس تخصصی ۲ (نمونه‌گیری (۱ و ۲)، رگرسیون ۱)	۲۳	۸۳	۱۰۵

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات کادر زیر، به‌منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب ..... با شماره داوطلبی ..... با آگاهی کامل، یکسان‌بودن شماره صندلی خود با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخ‌نامه و دفترچه سؤالات، نوع و کدکنترل درج‌شده بر روی جلد دفترچه سؤالات و پایین پاسخ‌نامه‌ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی):

PART A: Vocabulary

***Directions**: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the answer on your answer sheet.*

1- My mother was a very strong, …….. woman who was a real adventurer in love with the arts and sports.
1) consecutive 2) independent
3) enforced 4) subsequent

2- The weakened ozone ……., which is vital to protecting life on Earth, is on track to be restored to full strength within decades.
1) layer 2) level
3) brim 4) ingredient

3- Reading about the extensive food directives some parents leave for their babysitters, I was wondering if these lists are meant to ease ……. feeling for leaving the children in someone else's care.
1) an affectionate 2) a misguided
3) an undisturbed 4) a guilty

4- He is struck deaf by disease at an early age, but in rigorous and refreshingly unsentimental fashion, he learns to overcome his …….. so that he can keep alive the dream of becoming a physician like his father.
1) ambition 2) incompatibility
3) handicap 4) roughness

5- With cloak and suit manufacturers beginning to …….. their needs for the fall season, trading in the wool goods market showed signs of improvement this week.
1) anticipate 2) nullify
3) revile 4) compliment

6- Sculptors leave highly ……. footprints in the sand of time, and millions of people who never heard the name of Augustus Saint-Gaudens are well-acquainted with his two statues of Lincoln.
1) insipid 2) sinister
3) conspicuous 4) reclusive

7- To avoid liability, officers were told that they need to …….. closely to established department rules and demonstrate that probable cause for an arrest or the issuance of a summons existed.
1) recapitulate 2) confide
3) hinder 4) adhere

PART B: Cloze Test

***Directions*: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.**

The first organized international competition involving winter sports ……..(8) just five years after the birth of the modern Olympics in 1896. Known as the Nordic Games, this competition included athletes predominantly from countries such as Norway and Sweden. It was held eight times between 1901 and 1926, ……..(9) all but one time. Figure skating was included in the Olympics for the first time in the 1908 Summer Games in London, ……..(10) the skating competition was not actually held until October, some three months after the other events were over.

8- 1) was introducing 2) was introduced
3) introduced 4) has been introducing

9- 1) with Stockholm hosting 2) and Stockholm hosting
3) that Stockholm hosted 4) Stockholm hosted

10- 1) despite 2) although
3) otherwise 4) notwithstanding

PART C: Reading Comprehension

***Directions*: Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.**

PASSAGE 1:

The origin of statistics and its development has been guided by the development of nation-states. Thus, the major developments in statistical infrastructure have come about through war or preparations for war. Examples over the centuries are: William Petty being asked to assess the power and wealth of the English crown *vis-a-vis* the French State in the 16th Century; the term 'stat-istics' itself comes from preparations for war between Prussian statelets in the 19th century; Keynes' methods of national accounting won out over more logical organizations because it was an appropriate method of managing the British debt during the Second World War; and so on.

The modern interest in reporting on social progress (or the lack thereof) can probably be attributed to people like Quetelet, a Belgian statistician working in the middle of the nineteenth century. Although he was eventually concerned with the development of an administrative system required by the embryonic welfare states, at first he was simply concerned to document the downside of industrialization and in particular the extent of 'criminality'. Criminal statistics have therefore been a crucial part of the state's attempt to control its population. It is not surprising that there are frequent arguments about criminal statistics: the most recent was the call by the Statistics Commission for an independent body to publish criminal statistics.

11- The underlined word "assess" in paragraph 1 is closest in meaning to …… .
1) limit 2) trust 3) employ 4) measure

12- The underlined word "its" in paragraph 2 refers to …… .
1) population 2) statistics 3) attempt 4) the state

13- All of the following countries are mentioned in the passage EXCEPT …….. .
1) Russia 2) Belgium 3) England 4) France

14- According to paragraph 2, Quetelet's initial motivation was to …… .
1) help the development of welfare states
2) study the extent of criminality in the 1900s
3) record the disadvantages of industrialization
4) develop an administrative system for the state

15- According to the passage, which of the following statements is true?
1) Criminal statistics first emerged in the 16th century.
2) The word 'statistics' originates from warfare logistics.
3) There are a limited number of arguments about criminal statistics.
4) The role of criminal statistics in population control is insignificant.

PASSAGE 2:

The limitations of statistics as applied to medical problems are well indicated in the following words of Arthur Bowley, the author of one of the best modern treatises on elementary statistics. Speaking of the want of recognition by statisticians themselves of the limitations of their work, he says: "At best they can measure only the numerical aspect of a phenomenon; while very often they must be content with measuring, not the facts they wish, but some allied quantity. We wish to know, for instance, the extent of poverty, its increase or diminution: we cannot define or measure poverty, and we cannot even count the number of the poor; all we can do is to state the number of officially recognized poor people, and add perhaps some estimates from private sources; but this gives us no clue to the intensity of poverty in individual cases. Or we wish to obtain statistics of health: all we can measure is the death-rate, and average length of life—very different matters. The statistician's contribution to a sociological problem is only one of objective measurement, and this is frequently among the less important of the data; it is as necessary, however, to its solution as accurate measurements are for the construction of a building." Now this is quite true but the time has assuredly passed when it is necessary to justify the skillful employment of statistical methods for the elucidation of medical problems. Certain it is that without such help medicine, as a science, could never have achieved even its present degree of precision.

16- According to the passage, Arthur Bowley …… .
1) was mainly interested in the extent of poverty
2) was the first writer to discuss medical statistics
3) wrote a great essay about elementary statistics
4) was chiefly concerned with health statistics

17- According to the passage, instead of measuring the facts they are eager to know, statisticians are usually content with measuring …… .
1) quantities associated with those facts
2) qualities directly related to those facts
3) the limitations of their own work
4) completely irrelevant phenomena

18- According to the passage, objective measurement usually ……. .

1) plays a minor role in terms of data gathered about a social problem
2) goes completely unnoticed by statisticians studying a social problem
3) does not contribute to the solution of a social problem
4) involves areas such as construction and housing in social sciences

19- According to the passage, which of the following statements is NOT true?

1) It is not possible to exactly define poverty or count the number of poor people.
2) The only way to gather data about social phenomena such as poverty is through public sources.
3) Death-rate and average length of life differ greatly from statistics of health as such.
4) Arthur Bowley believed that statisticians were unaware of the limitations of their work.

20- The passage provides sufficient information to answer which of the following questions?

1) How can statisticians make up for the shortcomings of their field of work?
2) What is the definition of medical statistics?
3) When was the term medical statistics first used?
4) Has statistics helped improve the accuracy of medicine in any way?

PASSAGE 3:

Statistical Reasoning is a specific, albeit relevant, instance of Approximate Reasoning or Reasoning under Partial Knowledge. Its distinctive features include: (1) applicability to "collective phenomena" (namely phenomena which are characteristic of a *set* of observational instances, rather than of a single one); (2) reference to one or more "variables" as observed (or observable) on different "statistical units" (statistical data); (3) presence of several sources of Uncertainty, related to both the observational setup and the models utilized for analyzing the data; (4) uncertain conclusions of the reasoning process. [1]

In the past century's literature, a few theoretical frameworks for developing Statistical Reasoning have been proposed. These range from the classical Inferential Paradigm, including the Bayesian approach to the Descriptive-Exploratory Paradigm of the French school of thought usually referred to as "Analyse des Données," to the more recent Statistical Learning Paradigm. However, all of the above frameworks do not allow for a complete treatment of the various sources of Uncertainty affecting the Statistical Reasoning process. [2] A broader view is taken by the Bayesian-subjectivistic approach which generalizes the use of probabilistic tools for managing uncertainties related to modeling assumptions (the so-called "prior information"). [3] Then, the computation of posterior probability distributions, via the Bayes formula, allows the control of the uncertainty associated with the conclusions of the reasoning process. [4] In spite of the increasing utilization of this approach in many applicative fields, still the need for a more inclusive treatment of Uncertainty in Statistical Reasoning is widely felt, by both theoretical statisticians and researchers in the various substantive domains. The main sources of Uncertainty that appear to be overlooked, in this connection, are "Imprecision" and "Vagueness".

21- The underlined word "substantive" in paragraph 2 is closest in meaning to ……. .

1) practical
2) inconsequential
3) ambivalent
4) dexterous

22- According to the passage, which of the following paradigms is being increasingly employed in statistical approaches to uncertainty?

1) Descriptive-Exploratory 2) Bayesian-subjectivistic
3) Statistical Learning 4) Classical-Inferential

23- According to the passage, what is the relationship between Statistical Reasoning and Reasoning under Partial Knowledge?

1) The former is synonymous with Approximate Reasoning while the latter is a scientific discipline.
2) The former is an abstract concept whereas the latter is an academic discipline.
3) The former is a specific but pertinent example of the latter.
4) The former is a broader area encompassing the latter.

24- Which of the following words best describes the author's tone in the passage?

1) Ironic 2) Biased 3) Humorous 4) Impartial

25- In which position marked by [1], [2], [3] and [4], can the following sentence best be inserted in the passage?

In fact, the main source of Uncertainty possibly investigated in the mentioned contexts is ''randomness'' (quite often limited to the ''data generation process'' managed by means of appropriate probabilistic models).

1) [1] 2) [2] 3) [3] 4) [4]

دروس پایه (ریاضی عمومی (۱ و ۲)، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی و مبانی احتمال):

۲۶- اگر $z = ۱ + ۲i$ یکی از ریشه‌های معادله $z^۴ - ۶z^۳ + ۱۸z^۲ - ۳۰z + ۲۵ = ۰$ باشد، آنگاه کدام مورد، ریشه دیگری از معادله است؟

۱) $۲ + ۲i$
۲) $-۲ + ۲i$
۳) $۲ - i$
۴) $-۲ - i$

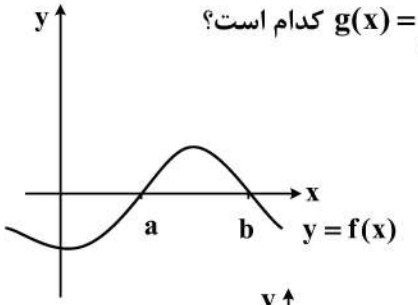
۲۷- مقدار $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{x^{۴x} - ۱}{x - ۱}$، کدام است؟

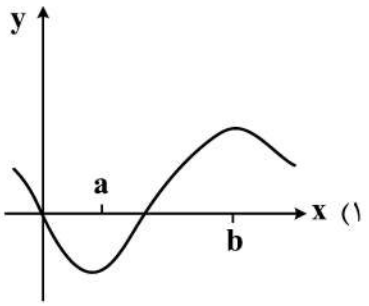
۱) $+\infty$
۲) ۴
۳) ۲
۴) صفر

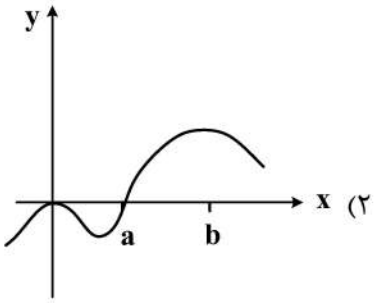
۲۸- فرض کنید f یک تابع پیوسته و مشتق‌پذیر بر $\mathbb{R}$ و در رابطه $f(x+y) = f(x)\,f(y)$ صدق کند. اگر بتوان تابع f را به صورت $f(x) = ۱ - xp(x) + x^۲q(x)$ نمایش داد به‌طوری‌که $\lim\limits_{x \to ۰} p(x) = a$ و $\lim\limits_{x \to ۰} q(x) = b$، آنگاه $f'(x)$ کدام است؟

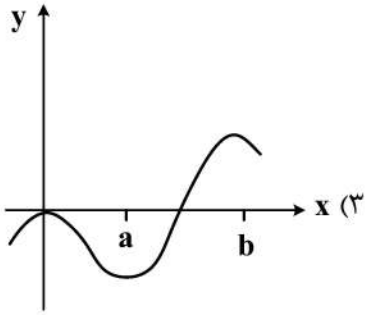
۱) $bf(x)$
۲) $af(x)$
۳) $-bf(x)$
۴) $-af(x)$

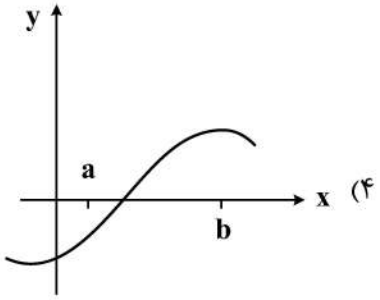
۲۹- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت زیر باشد، آنگاه نمودار تابع $g(x) = \int_{0}^{x} f(t)\,dt$ کدام است؟



۱)


۲)


۳)


۴)


۳۰- به‌ازای $a > 0$، مقدار $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+e^{ax}}$، کدام است؟

۱) $\ln(2a)$

۲) $\ln(\frac{a}{2})$

۳) $\frac{1}{2a}\ln 2$

۴) $\frac{1}{a}\ln 2$

۳۱- برای دنباله $\left\{a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ و $a_0 > \sqrt{2}$، کدام مورد درست است؟

۱) دنباله واگراست.

۲) چون دنباله صعودی و از بالا کراندار است، پس همگرا است.

۳) چون دنباله نزولی و از پایین کراندار است، پس همگرا است.

۴) اگرچه دنباله یکنوا نیست، لیکن چون دنباله کران‌دار است، پس همگرا است.

۳۲- زاویه بین دو صفحه $x+z=۴$ و $۲x+y+z=۱$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$

۲) $\frac{\pi}{۴}$

۳) $\frac{\pi}{۳}$

۴) $\frac{\pi}{۲}$

۳۳- مساحت ناحیه آستروئیدی‌شکل $x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}} \leq \sqrt[۳]{۴}$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$

۲) $\frac{۳\pi}{۲}$

۳) $\frac{۵\pi}{۲}$

۴) $\frac{۷\pi}{۲}$

۳۴- مقدار $\iint_D xy\,dx\,dy$، که در آن، D ناحیه محدود به خط راست $x=۱$ و سهمی $y^۲=۴x$ می‌باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$

۲) ۱

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۱}{۳}$

۳۵- فرض کنید S، سطح خارجی جسم محدود به سهمیگون دوّار $y=x^۲+z^۲$، استوانه $x^۲+z^۲=۹$ و صفحه $y=۰$ باشد. شارگذرای میدان برداری $\vec{F}(x,y,z)=(xz^۲, yx^۲, -۲z)$ بر S کدام است؟

۱) ۱۸π

۲) ۵۴π

۳) ۸۱π

۴) ۱۶۲π

۳۶- فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد، به‌طوری‌که برای هر ماتریس B با اثر صفر داشته باشیم $tr(BA)=۰$. در این‌صورت، A چگونه ماتریسی است؟

۱) قطری

۲) همانی

۳) بالا مثلثی

۴) پایین مثلثی

۳۷- **کدام‌یک از گزاره‌های زیر، در مورد ماتریس‌های متشابه درست نیست؟**

۱) اگر A متشابه با B باشد، آنگاه A^n متشابه با B^n است به‌ازای هر n متعلق به مجموعه اعداد طبیعی

۲) اگر A متشابه با B باشد، آنگاه $tr(A) = tr(B)$

۳) هر ماتریس با ترانهاده خودش متشابه است.

۴) AB با ماتریس BA متشابه است.

۳۸- **فرض کنید $T: V \to W$ یک تبدیل خطی باشد. اگر $\dim T(V) = ۱$، $\dim \ker T = ۲$ و $\dim W = ۴$. در این‌صورت، کدام مورد درست است؟**

۱) هر پایه V، دوعضوی است.

۲) V، یک پایه سه‌عضوی دارد.

۳) V، یک فضای برداری ۴ بُعدی است.

۴) V، دو پایه دوعضوی و یک پایه سه‌عضوی دارد.

۳۹- **فرض کنید ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۵ & ۷ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $\lambda_۲$ و $\lambda_۱$ مقادیر ویژه آن باشند. حاصل $\lambda_۱^۲ + \lambda_۲^۲$، کدام است؟**

۱) ۷۲

۲) ۶۴

۳) ۶۲

۴) ۳۴

۴۰- **فرض کنید $P_n[x]$ فضای برداری چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر n با ضرایب حقیقی باشد و تبدیل خطی زیر را درنظر بگیرید:**

$T: P_n[x] \to P_n[x]$ با ضابطه $T(f(x)) = x f'(x) - f(x)$

در این صورت، کدام گزاره در مورد تبدیل T صادق است؟

۱) $P_n[x] = \mathrm{Ker}T \oplus \mathrm{Im}T$

۲) T پوشاست.

۳) T یک‌به‌یک است.

۴) $\mathrm{Ker}T = \mathbb{R}$

۴۱- **فرض کنید دنباله $\{a_n\}$ در رابطه $\exists N \forall n \geq N \ |a_n - a_{n-۱}| \leq A_n$ صدق می‌کند. به‌ازای کدام مقدار A_n، دنباله $\{a_n\}$ ممکن است واگرا باشد؟**

۱) $\frac{۱}{n}$

۲) $\frac{۱}{n^۲}$

۳) $\frac{n}{۲^n}$

۴) $\frac{۲n+۱}{n^۴ - n}$

۴۲- اگر $A=\left\{\frac{m}{n}+۴\frac{n}{m}\middle| m,n\in\mathbb{N}\right\}$، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $\inf A=۰$

۲) $\inf A=۴$

۳) $\inf A=۵$

۴) $\sup A=\infty$

۴۳- اگر $A=\left\{\frac{m}{۳^n}\middle| m,n\in\mathbb{N}\right\}$، آنگاه بستار این مجموعه در $\mathbb{R}$ کدام گزینه است؟

۱) A

۲) $A\cup\{۰\}$

۳) $[۰,\infty)$

۴) $\mathbb{Q}\cap[۰,\infty)$

۴۴- فرض کنید تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ زیر تعریف شود:

$$f(x)=\begin{cases}x & x\in[a,b]\cap\mathbb{Q}\\ -x & x\in[a,b]\cap\mathbb{Q}^c\end{cases}$$

کدام گزینه درست است؟ ($\mathbb{Q}$ مجموعهٔ اعداد گویا است.)

۱) چون $\mathbb{Q}$ شمارا است پس f انتگرال‌پذیر ریمان است و $\int_a^b f(x)\,dx=\frac{a^۲-b^۲}{۲}$

۲) تابع f انتگرال‌پذیر ریمان است و $\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b^۲-a^۲}{۲}$

۳) تابع f انتگرال‌پذیر ریمان است و $\int_a^b f(x)\,dx=۰$

۴) تابع f انتگرال‌پذیر ریمان نیست.

۴۵- فرض کنید تابع $f:[۰,۲]\to\mathbb{R}$ پیوسته و روی $(۰,۲)$ مشتق‌پذیر باشد و $f(۰)=۰, f(۱)=۱, f(۲)=-۱$. کدام‌یک از اعداد زیر ممکن است در بُرد تابع f' نباشد؟

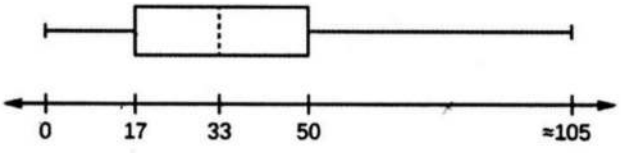
۱) $-\frac{۴}{۳}$

۲) ۱

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) صفر

۴۶- نمودار جعبه‌ای زیر، جمعیت یک کشور را برای سال جاری نشان می‌دهد. اگر بدانیم ۱۲/۶ درصد جمعیت بالای ۶۵ سال سن دارند، تقریباً چند درصد از جمعیت بزرگسالان در سن کار (بالای ۱۷ تا ۶۵ سال) هستند؟



۱) ۵۹/۸

۲) ۶۲/۴

۳) ۷۰/۶

۴) ۷۳/۱

۴۷- برای دو پیشامد E و F اگر $P(E|F)=1$، آنگاه کدام مورد درست است؟

۱) $P(F|E^c)=0$

۲) $P(F^c|E^c)=0$

۳) $P(F^c|E^c)=P(F^c)$

۴) $P(F|E^c)=\frac{1}{2}$

۴۸- انحراف معیار مشاهدات یک نمونه دوتایی برابر $\sqrt{2}$ است. در مورد بُرد آنها چه می‌توان گفت؟

۱) برابر $\sqrt{2}$

۲) کمتر از $\sqrt{2}$

۳) برابر ۲

۴) کمتر از ۲

۴۹- فرض کنید احتمال افزایش شاخص سهام یک شرکت برای امروز ۰/۵۴، برای فردا نیز ۰/۵۴ و برای هر دو روز ۰/۲۸ باشد. احتمال افزایش شاخص سهام این شرکت در هیچ‌یک از روزها، کدام است؟

۱) ۰/۱۵

۲) ۰/۲۰

۳) ۰/۲۵

۴) ۰/۳۰

۵۰- فرض کنید $S=\{1,2,\cdots,N\}$، در این‌صورت نسبت تعداد زیرمجموعه‌های غیرتهی با تعداد زوج به تعداد زیرمجموعه‌های غیرتهی با تعداد فرد از S، کدام است؟

۱) $1-\frac{1}{2^{N-1}}$

۲) ۱

۳) $\frac{1}{2^{N+1}}$

۴) $1-\frac{1}{2^N}$

دروس تخصصی ۱ (احتمال (۱ و ۲)، آمار ریاضی (۱ و ۲)):

۵۱- یک مدرسه موسیقی یک پیانو را به قیمت ۳۰۰۰ دلار، یک گیتار را به قیمت ۵۵۰ دلار و یک ویلن را به قیمت ۶۰۰ دلار خریداری کرده است. اگر میانگین قیمت یک پیانو ۴۰۰۰ دلار با انحراف معیار ۲۵۰۰، میانگین قیمت یک گیتار ۵۰۰ دلار با انحراف معیار ۲۰۰ و میانگین قیمت ویلن ۷۰۰ دلار با انحراف معیار ۱۰۰ باشد، به‌ترتیب از راست به چپ کدام ابزار را ارزان و کدام را گران خریده است؟

۱) ویلن ـ گیتار

۲) گیتار ـ پیانو

۳) گیتار ـ ویلن

۴) پیانو ـ ویلن

۵۲- شش وجه یک تاس شامل اعداد ۲، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ هستند. تاس را چهار مرتبه پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه یک مرتبه وجه ۲، یک مرتبه وجه ۳ و دو مرتبه وجه ۴ مشاهده شود، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳۴}$

۲) $\frac{۱}{۴۴}$

۳) $\frac{۱}{۵۴}$

۴) $\frac{۱}{۶۴}$

۵۳- فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع مولد گشتاور $M(t)=\frac{۱۴+e^{-t}+e^{t}}{۱۶}$ باشد. مقدار $P(X\geq ۰)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۴}{۱۶}$

۲) $\frac{۱۵}{۱۶}$

۳) $\frac{۱۳}{۱۶}$

۴) $\frac{۱۲}{۱۶}$

۵۴- از توزیع $N(۰,۱)$، تعداد ۵ مشاهده به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این که حداقل دو تا از این مشاهده‌ها مثبت باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱۸}{۳۲}$

۲) $\frac{۲۶}{۳۲}$

۳) $\frac{۳۰}{۳۲}$

۴) $\frac{۲۲}{۳۲}$

۵۵- فرض کنید $x>۰$, $F_X(x)=۱-e^{-x^{۲}}$ و $Y=[X]$ (جزء صحیح X). در این صورت $P(Y>۲)$، کدام است؟

۱) $e^{-۲۵}$

۲) $e^{-۱۶}$

۳) $e^{-۹}$

۴) $e^{-۴}$

۵۶- اگر $X_1, X_2, ..., X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ و $T = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} I(X_i \geq \mu)$، مقدار تقریبی $P(T > 0/696)$، کدام است؟

۱) ۰/۰۱

۲) ۰/۰۵

۳) ۰/۰۲۵

۴) ۰/۱

۵۷- یک چوب به طول L در اختیار داریم و آن را در نقطه‌ای که به‌طور تصادفی و یکنواخت انتخاب شده است، می‌شکنیم و قطعه‌ای را که انتهای سمت چپ چوب است نگه می‌داریم. سپس همین کار را با چوبی که نگه می‌داریم تکرار می‌کنیم. مقدار مورد انتظار چوبی که باقی می‌ماند کدام است؟

۱) $\frac{L}{2}$

۲) $\frac{L}{4}$

۳) $\frac{3L}{4}$

۴) $\frac{L}{6}$

۵۸- فرض کنید $X_1, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(0, \sigma^2)$ و $T^2 = \frac{1}{n}\sum X_i^2$ باشد، به‌طور تقریبی $P(T > \sigma)$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{\sigma}{4}$

۴) $\frac{\sigma}{2}$

۵۹- اگر X یک متغیر تصادفی نامنفی با $E(X) = a$ باشد، در مورد $E(\sqrt{X})$ چه می‌توان گفت؟

۱) $E(\sqrt{X}) \leq \sqrt{a}$

۲) $E(\sqrt{X}) \geq \sqrt{a}$

۳) $E(\sqrt{X}) \leq a$

۴) $E(\sqrt{X}) \geq a$

۶۰- فرض کنید (X, Y) دارای چگالی توأم $f(x,y) = e^{-۲x-\frac{y}{۲}}$, $x, y > ۰$ باشند. مقدار $E(X-Y)^۲$، چقدر است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$

۲) $\frac{۹}{۲}$

۳) $\frac{۱۱}{۲}$

۴) $\frac{۱۳}{۲}$

۶۱- اگر $X_۱$، $X_۲$، $X_۳$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد و $T = X_۱X_۲X_۳$. مقدار $Var(|T|)$، کدام است؟

x	−۱	۰	۱
f(x)	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$

۱) $\frac{۵}{۶۴}$

۲) $\frac{۶}{۶۴}$

۳) $\frac{۷}{۶۴}$

۴) $\frac{۸}{۶۴}$

۶۲- فرض کنید متغیر تصادفی X مقادیر $۱, ۲, ۳, ..., n$ را با احتمال‌های برابر اختیار می‌کند. اگر میانگین و واریانس X باهم برابر باشند، مقدار n، کدام است؟

۱) ۱۴

۲) ۱۲

۳) ۷

۴) ۶

۶۳- برای متغیر تصادفی گسسته X که اعداد صحیح نامنفی را اختیار می‌کند، رابطهٔ $\frac{P(X=x)}{P(X=x+۱)} = \frac{۱}{a}$ برقرار است. واریانس X، کدام است؟

۱) $a(۱-a)^۲$

۲) $a(۱-a)$

۳) $\frac{۱-a}{a}$

۴) $\frac{a}{(۱-a)^۲}$

۶۴- اگر $X_۱$ و $X_۲$ یک نمونه تصادفی دوتایی از توزیعی با میانگین صفر و واریانس ۲ باشند، در این صورت در مورد $R = max(X_۱, X_۲) - min(X_۱, X_۲)$، چه می‌توان گفت؟

۱) $E(R) \le ۲$

۲) $E(R) \ge ۲$

۳) $E(R) \le \sqrt{۲}$

۴) $E(R) \ge \sqrt{۲}$

۶۵- فرض کنید $X \sim U(0,1)$ و $(Y|X=x) \sim U(x,1)$، مقدار $P(E(\frac{XY}{X+1}\Big|X) > \frac{1}{6})$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$

۲) $\frac{2}{3}$

۳) $\frac{3}{4}$

۴) $\frac{1}{4}$

۶۶- فرض کنید $X, Y \overset{iid}{\sim} N(0,1)$ و U یک متغیر تصادفی مستقل از X و Y با $P(U=\pm 1)=\frac{1}{2}$ باشد. در این صورت برای $S=UX$ و $T=UY$ کدام مورد درست است؟

۱) $Cov(T,S) \neq 0$ و $Cov(T^2,S^2)=0$

۲) $Cov(T,S)=0$ و $Cov(T^2,S^2)\neq 0$

۳) $Cov(T,S)\neq 0$ و $Cov(T^2,S^2)\neq 0$

۴) $Cov(T,S)=0$ و $Cov(T^2,S^2)=0$

۶۷- فرض کنید آماره T برای خانواده $\{F_\theta, \theta\in\Theta\}$ بسنده باشد. کدام‌یک از موارد زیر همواره درست است؟

۱) آماره T^2 برای θ^2 بسنده است.

۲) آماره T برای θ^2 بسنده است.

۳) آماره T^2 برای θ بسنده است.

۴) اظهار نظری نمی‌توان کرد.

۶۸- فرض کنید T یک آماره کامل در خانواده $\{F_\theta, \theta\in\Theta\}$ باشد. اگر برای تابع $h(T)$ داشته باشیم $E\left[h(T)-T^2+3T\right]=2$، ریشه‌های معادله $h(T)=0$ کدام‌ها هستند؟

۱) $T=-1,-2$

۲) $T=1,3$

۳) $T=1,2$

۴) $T=\frac{1}{3},\frac{2}{3}$

۶۹- فرض کنید $X_1,...,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $U(0,\theta)$ $(\theta>0)$ باشد. اگر $X_{(1)}=\min\limits_{1\le i\le n} X_i$ و $X_{(n)}=\max\limits_{1\le i\le n} X_i$، مقدار $E(\frac{X_{(1)}}{X_{(n)}})$ کدام است؟

۱) $\frac{n-1}{n}$

۲) $\frac{1}{n}$

۳) $\frac{1}{n+1}$

۴) $\frac{n}{n+1}$

۷۰- فرض کنید $X_۱,...,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $N(\theta,\theta^۲)$ باشد. کدام مورد زیر درست است؟

$$\bar{X}=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}X_i,\ S^۲=\frac{۱}{n-۱}\sum(X_i-\bar{X})^۲\ ,\theta>۱$$

۱) $E(\bar{X})>E(S^۲)$

۲) $E(\bar{X}^۲)>E(S^۲)$

۳) $E(\bar{X})<E(S)$

۴) $E(\bar{X})>E(S)$

۷۱- فرض کنید $X_۱,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع پواسن با میانگین λ باشد، آنگاه با فرض $T=\sum_{i=۱}^{n}X_i$، UMVUE برای $\lambda^۲$ کدام است؟

۱) $\frac{T^۲}{n^۲}$

۲) $\frac{T(T-۱)}{n^۲}$

۳) $\frac{T(T+۱)}{n^۲}$

۴) $\frac{T}{n}(\frac{T-۱}{n-۱})$

۷۲- فرض کنید $X_۱,X_۲$ نمونه تصادفی دوتایی از توزیع نمایی با میانگین θ است. با فرض $T=X_۱+X_۲$، UMVUE برای $e^{-\frac{a}{\theta}}$ کدام است؟

۱) $۱-\frac{a}{T}$

۲) $e^{-(\frac{a}{T})^۲}$

۳) $(۱-\frac{a}{T})^۲$

۴) $e^{-\frac{a}{T}}$

۷۳- فرض $X_۱,...,X_n$ یک نمونه تصادفی nتایی از توزیع با چگالی $f(x_i;\mu,\sigma)=\frac{۱}{\sigma}e^{-\frac{۱}{\sigma}(x-\mu)}$, $x>\mu$ باشد، اگر $\bar{X}=\frac{۱}{n}\sum X_i\ ,S^۲=\frac{۱}{n}\sum(X_i-\bar{X})^۲$، برآوردهای گشتاوری (μ,σ) کدام است؟

۱) $(\bar{X},S)$

۲) $(\bar{X}+S,S^۲)$

۳) $(\bar{X}-S,S)$

۴) $(\bar{X}-S,S^۲)$

۷۴- فرض کنید X_1, X_2، متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع پواسن با میانگین $\lambda > 0$ باشند. کران پایین کرامر ـ رائو برای برآوردکننده‌های نا اُریب $P(X_1 = 0, X_2 = 0)$ کدام است؟

۱) $2\lambda e^{-4\lambda}$

۲) $4\lambda e^{-2\lambda}$

۳) $2\lambda e^{-2\lambda}$

۴) $4\lambda e^{-4\lambda}$

۷۵- براساس نمونه تصادفی $X_1, X_2, ..., X_n$ از توابع پواسن با میانگین λ $(\lambda > 0)$، برآوردگر ماکسیمم درستنمایی (MLE) برای $P(X > 1)$ کدام است؟

۱) $1 - e^{-\bar{X}}$

۲) $1 - e^{-\bar{X}} - \bar{X} e^{-2\bar{X}}$

۳) $e^{\bar{X}} + \bar{X} e^{-\bar{X}}$

۴) $1 - e^{-\bar{X}} - \bar{X} e^{-\bar{X}}$

۷۶- از کیسه‌ای دارای N مهره، M مهره استخراج، علامت‌گذاری و سپس به کیسه بر می‌گردانیم. سپس n مهره به تصادف و با جایگذاری انتخاب می‌کنیم که از این تعداد k مهره علامت‌گذاری شده است. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی N کدام است؟

۱) $\frac{(M-1)\times(n-1)}{k-1}$

۲) $\frac{(M-1)\times(k-1)}{n-1}$

۳) $\frac{M\times n}{k}$

۴) $\frac{M\times k}{n}$

۷۷- فرض کنید X_1, X_2 نمونه تصادفی دوتایی از توزیع $N(0,\sigma^2)$ است. اگر $T^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X^2{}_i$ و فاصله $(0, T)$ را یک فاصله اطمینان برای σ درنظر بگیریم، میانگین طول این فاصله چقدر است؟ $(\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi})$

۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sigma$

۲) $\sqrt{\pi}\,\sigma$

۳) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sigma$

۴) $\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$

۷۸- فرض کنید متغیر تصادفی X نتیجهٔ یک آزمایش تصادفی است. فاصله اطمینان ۸۰٪ برای پارامتر θ به‌صورت $(X-۱, X+۲)$ است. یک ناحیه رد برای آزمون $H_۰ : \theta = ۵$ در برابر $H_۱ : \theta \neq ۵$ در سطح معناداری ۰/۲ کدام است؟

۱) $\{X \leq ۳/۷۵ \text{ یا } X \geq ۶/۲۵\}$

۲) $\{X \leq ۳/۲۵ \text{ یا } X \geq ۶/۷۵\}$

۳) $\{X \leq ۳/۵ \text{ یا } X \geq ۶/۵\}$

۴) $\{X \leq ۳ \text{ یا } X \geq ۶\}$

۷۹- اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با یکی از توابع احتمال $f_۰$ یا $f_۱$ زیر باشد. پرتوان‌ترین آزمون در اندازه $\alpha = \frac{۲}{۷}$ برای $H_۰ : X \sim f_۰$ در مقابل $H_۱ : X \sim f_۱$ کدام است؟

X	۱	۲	۳	۴
$f_۰(x)$	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{۲}{۷}$	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{۳}{۷}$
$f_۱(x)$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۲}{۸}$	$\frac{۲}{۸}$

۱) $\varphi(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۲ \\ ۰ & x = ۱,۳,۴ \end{cases}$

۲) $\varphi(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱,۳ \\ ۰ & x = ۲,۴ \end{cases}$

۳) $\varphi(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱ \\ \frac{۱}{۲} & x = ۲ \\ ۰ & x = ۳,۴ \end{cases}$

۴) $\varphi(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱ \\ \frac{۱}{۳} & x = ۴ \\ ۰ & x = ۲,۳ \end{cases}$

۸۰- فرض کنید $X_۱, ..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی از خانواده توزیع $\{F_\theta, \theta \in \Theta\}$ و $T = T(X_۱, \cdots X_n)$ یک آمارهٔ بسنده برای θ باشد. اگر φ یک آزمون آماری باشد کدام‌یک از گزاره‌ها دربارهٔ $E[\varphi | T]$ درست است؟

۱) یک آزمون آماری است اما توان آن کمتر از توان φ است.

۲) یک آزمون آماری است اما درباره توان آن نمی‌توان اظهارنظر کرد.

۳) یک آزمون آماری است که توان آن با توان φ یکسان است.

۴) لزوماً یک آزمون آماری نیست.

دروس تخصصی ۲ (نمونه‌گیری (۱ و ۲)، رگرسیون ۱):

۸۱- فرض کنید X یک تک مشاهده از توزیعی با چگالی $f_\theta(x)=\frac{۳}{\theta^۳}x^۲ \quad ۰<x<\theta \ , \ \theta>۰$ باشد. آزمون نسبت درست‌نمایی برای فرض $H_۰:\theta=\frac{۱}{۲}$ در مقابل $H_۱:\theta\neq\frac{۱}{۲}$ در سطح α کدام است؟

۱) $\varphi(x)=\begin{cases}۱ & x\le\frac{\sqrt[۳]{\alpha}}{۲}\\ ۰ & x>\frac{\sqrt[۳]{\alpha}}{۲}\end{cases}$

۲) $\varphi(x)=\begin{cases}۱ & x<\frac{\sqrt[۳]{\alpha}}{۸} \quad \text{یا} \quad x>\frac{\sqrt[۳]{\alpha}}{۲}\\ ۰ & \text{درغیر این‌صورت}\end{cases}$

۳) $\varphi(x)=\begin{cases}۱ & x\le\frac{\sqrt[۳]{\alpha}}{۸}\\ ۰ & x>\frac{\sqrt[۳]{\alpha}}{۸}\end{cases}$

۴) $\varphi(x)=\begin{cases}۱ & \frac{\sqrt[۳]{\alpha}}{۸}<x<\frac{\sqrt[۳]{\alpha}}{۲}\\ ۰ & \text{درغیر این‌صورت}\end{cases}$

۸۲- فرض کنید X یک تک مشاهده از تابع چگالی $f(x;\theta)=۲\theta x+۱-\theta;\ ۰<x<۱ \ , \ -۱<\theta<۱$، باشد. پرتوان‌ترین آزمون با اندازه α برای آزمون $H_۰:\theta\le۰$ در مقابل $H_۱:\theta>۰$ کدام است؟

۱) $\phi(x)=\begin{cases}۱ & x<۱-\alpha\\ ۰ & \text{درغیر این‌صورت}\end{cases}$

۲) $\phi(x)=\begin{cases}۱ & x<\alpha\\ ۰ & \text{درغیر این‌صورت}\end{cases}$

۳) $\phi(x)=\begin{cases}۱ & x>\alpha\\ ۰ & \text{درغیر این‌صورت}\end{cases}$

۴) $\phi(x)=\begin{cases}۱ & x>۱-\alpha\\ ۰ & \text{درغیر این‌صورت}\end{cases}$

۸۳- در کدام طرح‌های نمونه‌گیری زیر، شانس انتخاب واحدهای جامعه در نمونه با هم برابر است؟

۱) سیتماتیک (سامانمند)
۲) طبقه‌ای با تخصیص متناسب
۳) تصادفی ساده
۴) همه موارد

۸۴- در کدام صورت، نمونه‌گیری سیستماتیک دارای کارآیی بیشتری نسبت به تصادفی ساده است؟

۱) جامعه دارای روند خطی یکنوا باشد.
۲) روند جامعه، تصادفی باشد.
۳) جامعه دارای روند تناوبی باشد.
۴) روند جامعه غیرخطی یکنوا باشد.

۸۵- می‌خواهیم از جامعه‌ای با مشخصات جدول زیر، نمونه‌ای به حجم ۱۴۰ به روش طبقه‌ای و با استفاده از تخصیص نیمن استخراج نمائیم، حجم نمونه لازم از طبقات کدام است؟

شماره طبقه	حجم طبقه	واریانس طبقه
۱	۲۵۰	۴
۲	۲۰۰	۴
۳	۵۰	۱۰۰

۱) $n_1 = ۵۰$ ، $n_2 = ۵۰$ ، $n_3 = ۴۰$

۲) $n_1 = ۶۰$ ، $n_2 = ۵۰$ ، $n_3 = ۳۰$

۳) $n_1 = ۵۰$ ، $n_2 = ۴۰$ ، $n_3 = ۵۰$

۴) $n_1 = ۷۰$ ، $n_2 = ۵۶$ ، $n_3 = ۱۴$

۸۶- در نمونه‌گیری تصادفی ساده بدون جایگذاری جهت برآورد نسبت نامعلوم **P**، اگر اندازه نمونه را دو برابر کنیم، کارآیی برآوردگر نسبت:

۱) دو برابر می‌شود.

۲) بیش از دو برابر می‌شود.

۳) ۵۰ درصد افزایش می‌یابد.

۴) به مقدار P بستگی دارد.

۸۷- اگر **R** پارامتر نسبت میانگین‌های دو صفت **X** و **Y** در یک جمعیت متناهی باشد، در کدام حالت برآوردگرهای رگرسیونی و نسبتی میانگین **Y** کارایی تقریباً یکسانی دارند؟

۱) $S_x^2 \times R = S_{xy}$

۲) $R = S_{xy}$

۳) $S_y^2 R = S_{xy}$

۴) $R = S_x^2$

۸۸- جامعه‌ای شامل دو طبقهٔ هم‌اندازه به حجم‌های ۲۵ و میانگین‌های برابر را در نظر بگیرید. اگر از هر طبقه یک واحد به روش تصادفی ساده انتخاب کنیم، واریانس میانگین دو واحد انتخاب‌شده چند برابر تغییرات کل جامعه خواهد شد؟

۱) ۰/۲۵

۲) ۰/۴۹

۳) ۰/۷۵

۴) ۰/۵۱

۸۹- در نمونه‌گیری تصادفی ساده بدون جایگذاری به حجم **n** از جامعه‌ای **N** تایی، اگر Y_1 و Y_2 به‌ترتیب معرف واحدهای اول و دوم انتخاب‌شده نمونه باشند، آنگاه $Cov(Y_1, Y_2)$، کدام است؟

۱) $\frac{\sigma^2}{n}$

۲) $-\frac{\sigma^2}{n-1}$

۳) $\frac{\sigma^2}{N}$

۴) $-\frac{\sigma^2}{N-1}$

۹۰- کدام مورد درست است؟

۱) نمونه‌گیری طبقه‌ای حالت خاص نمونه‌گیری خوشه‌ای دو مرحله‌ای است.

۲) نمونه‌گیری طبقه‌ای حالت خاص نمونه‌گیری خوشه‌ای یک مرحله‌ای است.

۳) نمونه‌گیری خوشه‌ای یک مرحله‌ای حالت خاص نمونه‌گیری سیستماتیک است.

۴) نمونه‌گیری طبقه‌ای با تخصیص متناسب حالت خاص نمونه‌گیری تصادفی ساده است.

۹۱- در نمونه‌گیری تصادفی ساده بدون جایگذاری از جامعه ۱۰۰ عضوی احتمال آنکه دو عضو مشخص به‌طور هم‌زمان در نمونه‌ای ۱۰ تایی قرار گیرند، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۱۱۰}$

۲) $\frac{۲}{۱۰۰}$

۳) $\frac{۱}{۱۰۰}$

۴) $\frac{۱}{۱۱۰}$

۹۲- فرض کنید جامعه‌ای متشکل از ۱۰ خوشه باشد و می‌خواهیم نمونه‌ای به حجم ۴ به روش خوشه‌ای انتخاب کنیم. اگر واریانس جامعه $(\sigma^۲)$ برابر ۹ و هر خوشه تنها یک واحد داشته باشد، واریانس میانگین نمونه خوشه‌ای کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{۹}{۴}$

۹۳- از جامعه‌ای متشکل از ۸۰ خانوار با جمعیت ۳۲۰ نفر، به تصادف ۵ خانوار را انتخاب کرده، جمعیت و میزان مصرف ماهانه نان آنها را برحسب کیلوگرم به شرح جدول زیر به‌دست آورده‌ایم. در مورد نان با استفاده از برآوردگرهای نسبتی مصرف سرانه نان خانوار در ماه و میانگین مصرف نان هر خانوار برحسب کیلوگرم به‌ترتیب از راست به چپ کدام عبارت است؟

جمعیت خانوار	۴	۵	۴	۵	۲
مصرف ماهانه نان	۱۵	۲۰	۲۰	۲۵	۱۰

۱) ۴ و ۱۸

۲) ۴٫۵ و ۱۸

۳) ۴٫۵ و ۱۶

۴) ۴ و ۱۶

۹۴- برای برآورد نسبت افراد دیابتی در یک منطقه شامل ۸۴۰ نفر در قالب ۲۱۰ خانوار، تعداد ۴ خانوار به روش تصادفی ساده انتخاب شده و اطلاعات زیر به دست آمده است. برآورد نااُریبی از نسبت افراد دیابتی کدام عبارت است؟

شماره	اندازه خانوار	تعداد افراد دیابتی
۱	۴	۱
۲	۸	۲
۳	۳	۰
۴	۴	۱

۱) $\frac{۳}{۱۶}$

۲) $\frac{۴}{۱۹}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

۹۵- نتایج زیر از برازش رگرسیون خطی بین متغیر وابسته y و متغیرهای مستقل x_1 و x_2 به‌دست آمده‌اند. مدل رگرسیون برازش شده نهایی کدام است؟

	Estimate	std.Error	t.value	Pr(>|t|)
Intercept	۷/۰۷	۲/۳۶۵۵	۲/۹۹	۰/۰۰۶
x_1	۱/۹۲	۰/۱۵۴۴	۱۲/۴۶	$۱/۰۴۹ e^{-۱۲}$
x_2	۰/۲۲	۰/۵۱۸۵	۰/۴۲	۰/۶۷۵

۱) $\hat{y} = ۷/۰۷ + ۱/۹۲x_1$

۲) $\hat{y} = ۲/۹۹ + ۱۲/۴۶x_1 + ۰/۲۲x_2$

۳) $\hat{y} = ۷/۰۷ + ۱/۹۲x_1 + ۰/۲۲x_2$

۴) $\hat{y} = ۷/۰۷ + ۰/۲۲x_2$

۹۶- با توجه به مدل رگرسیون خطی ساده $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ که در آن $\varepsilon_i \sim N(0, x_i\sigma^2)$ است، کدام گزینه به‌عنوان ضریب، برای تثبت واریانس مدل مناسب است؟

۱) $\sqrt{x_i}$

۲) x_i

۳) $\frac{۱}{\sqrt{x_i}}$

۴) $\frac{۱}{x_i}$

۹۷- مدل رگرسیون خطی چندگانه $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_p x_p + \varepsilon$ با n مشاهده را درنظر بگیرید به‌طوری‌که $\underline{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ و I_n ماتریس همانی با مرتبه n است. فرض کنید می‌خواهیم متغیر مستقل جدید z را به مدل اخیر بیافزاییم. پس از افزودن متغیر جدید z، کدام گزینه درخصوص دو معیار ضریب تعیین یا ضریب تعدیل‌یافته صحیح است؟

۱) ضریب تعیین تعدیل‌یافته همواره با افزودن متغیر جدید به مدل افزایش می‌یابد.

۲) ضریب تعیین درصورتی افزایش می‌یابد که متغیر مستقل افزوده شده به مدل دارای ضریب F جزیی معنی‌دار باشد.

۳) ضریب تعیین درصورت عدم معنی‌داری دارای ضریب F جزیی مربوط به متغیر مستقل افزوده شده به مدل، کاهش می‌یابد.

۴) ضریب تعیین تعدیل‌یافته تنها درصورتی افزایش می‌یابد که متغیر افزوده شده به مدل دارای ضریب F جزیی معنی‌دار باشد.

۹۸- مدل رگرسیون خطی ساده $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ را براساس n زوج مشاهده به روش کمترین توان‌های دوم خطا برازش داده‌ایم. پس از انجام محاسبات دریافته‌ایم که مشاهدات مربوط به متغیر مستقل x اشتباهاً دو برابر مقادیر واقعی در محاسبات درنظر گرفته شده‌اند. چنانچه محاسبات، به‌صورت صحیح، مجدداً انجام شود، کدام مورد صحیح است؟

۱) برآورد شیب خط برازش‌شده به داده‌های صحیح دو برابر شیب خط برازش‌شده به داده‌های غیرصحیح است.

۲) ضریب تعیین مدل برازش‌شده به داده‌های صحیح برابر با ضریب تعیین مدل برازش‌شده به داده‌های غیرصحیح نیست.

۳) برآورد شیب خط برازش‌شده به داده‌های صحیح نصف شیب خط برازش‌شده به داده‌های غیرصحیح است.

۴) ضریب تعیین تعدیل‌شده برای مدل برازش‌شده به داده‌های صحیح برابر با ضریب تعیین تعدیل‌شده برای مدل برازش‌شده به داده‌های غیرصحیح نیست.

۹۹- مدل رگرسیون خطی ساده $Y=\beta_0+\beta_1 x+\varepsilon$ را براساس $(n-2)$ زوج مشاهده (x_i, y_i)، به روش کمترین توان‌های دوم خطا برازش داده‌ایم. پس از برازش متوجه می‌شویم که دو زوج مشاهده $\{(\bar{x}, 2), (\bar{x}, 0)\}$ درنظر گرفته نشده‌اند. چنانچه محاسبات، با درنظرگرفتن داده‌های جدید، مجدداً انجام گیرد، کدام‌یک از کمیت‌های زیر تغییر می‌کند؟ ($\bar{x}$ میانگین کل n مشاهدهٔ متغیر کمکی (تبیینی) است)

۱) $\hat{\beta}_0$

۲) S_{xx}

۳) $\hat{\beta}_1$

۴) SSR

۱۰۰- مدل رگرسیون خطی ساده به‌صورت زیر را درنظر بگیرید:

$$Y_i=\beta_0+\beta_1 \ln x_i+\varepsilon_i \quad , \quad i=1,2,\ldots,n$$

تفسیر شیب خطی رگرسیونی (β_1) کدام است؟ (میانگین شرطی پاسخ را $E(Y|x)$ درنظر بگیرید.)

۱) میزان تغییر در میانگین شرطی متغیر پاسخ به‌ازای یک واحد افزایش در متغیر پیشگوی x

۲) میزان تغییر در میانگین شرطی متغیر پاسخ به‌ازای e برابر شدن متغیر پیشگوی x

۳) میزان تغییر در میانگین شرطی متغیر پاسخ به‌ازای یک واحد کاهش در متغیر پیشگوی x

۴) میزان تغییر در میانگین شرطی متغیر پاسخ به‌ازای e واحد افزایش در متغیر پیشگوی x

۱۰۱- در مدل رگرسیون خطی ساده $Y_i=\beta_0+\beta_1 x_i+\varepsilon_i$، که در آن $\varepsilon_i \overset{i.i.d}{\sim} N(0,\sigma^2), i=1,\ldots,n$ است، مقدار $P\left((\hat{\beta}_0>\beta_0)\cup(\hat{\beta}_1>\beta_1)\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$

۲) $1-P\left((\hat{\beta}_0>\beta_0)\cap(\hat{\beta}_1>\beta_1)\right)$

۳) $1-P(\hat{\beta}_0>\beta_0)P(\hat{\beta}_1>\beta_1)$

۴) ۱

۱۰۲- مدل رگرسیون خطی ساده $Y=\beta_0+\beta_1 x+\varepsilon$، با فرض ناهمبسته بودن و هم‌توزیع بودن جملات خطا، براساس مشاهدات $x=\left\{\underbrace{0,\ldots,0}_{\text{۱۰ تا}}, \underbrace{2,\ldots,2}_{\text{۳۰ تا}}\right\}$ را درنظر بگیرید. اگر برآورد مدل رگرسیونی به روش کمترین توان‌های دوم خطا $\hat{Y}=2+3x$ با $Var(\hat{\beta}_0)=0/3$ باشد، ضریب تعیین مدل رگرسیون کدام است؟

۱) ۰/۶۵

۲) ۰/۷۵

۳) ۰/۲۵

۴) ۰/۷۰

۱۰۳- مدل رگرسیون خطی چندگانه $Y = X\beta + \varepsilon$، با p متغیر پیشگو و n مشاهده را درنظر بگیرید. مدل مذکور با روش کمترین توان‌های دوم خطا با فرض ناهمبسته بودن و هم‌واریانس بودن جملات خطا یعنی $Var(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$ که در آن I_n ماتریس همانی با مرتبه n است، برآورد شده است. مقدار $\sum_{i=1}^{n} Cov(\hat{Y}_i, \varepsilon_i)$ کدام است؟

۱) $n\sigma^2$

۲) σ^2

۳) $p\sigma^2$

۴) $np\sigma^2$

۱۰۴- مدل رگرسیون خطی $Y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$ را درنظر بگیرید. با استفاده از داده‌های زیر، مجموع برآورد کمترین توان دوم خطای $\beta_3, \beta_2, \beta_1$ کدام است؟

y	x_1	x_2	x_3
۱	۰	۰	۱
۲	۱	۱	۰
−۱	۱	۰	۰
۰	۱	−۱	۰

۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۳}{۷}$

۳) $\frac{۷}{۳}$

۴) ۴

۱۰۵- درمدل رگرسیونی خطی (I) به‌صورت $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i$، $i = 1, \ldots, n$، با $R^2 = ۰/۵۱$، متغیر جدید x_3 وارد مدل شده و مدل جدید (II) به‌دست می‌آید. R^2 در مدل جدید به اندازه ۰/۰۵ افزایش می‌یابد. کدام گزینه در مورد میانگین توان دوم خطای مدل‌های I و II که به‌ترتیب با MSE(I) و MSE(II) نشان داده شده‌اند، درست است؟

۱) $MSE(II) < \frac{n-3}{n-4} MSE(I)$

۲) $MSE(II) > \frac{n-3}{n-4} MSE(I)$

۳) $MSE(II) < MSE(I)$

۴) $MSE(II) > MSE(I)$