حسابان ۲

۸۱- *(سیدعادل حسینی)*

$x > -2 ; f(x) = -(x+1)^2 + 3 \Rightarrow a = -1$

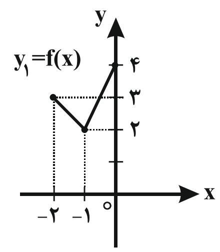
$x < -2 ; f(x) = 2 \Rightarrow a + c = 2 \Rightarrow c = 3$

$x = -2 ; f(-2) = 0 \Rightarrow 4b + 2c + 2b = 0 \Rightarrow b = -1$

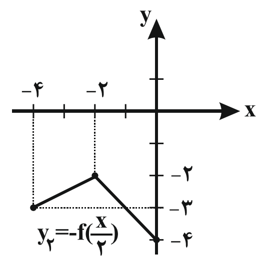
(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۸۲- *(محمد قیدی)*

ابتدا باید نمودار تابع $y_1 = f(x)$ را به‌دست آوریم. برای این منظور، کافی است نمودار $y = h(x)$ را یک واحد به سمت چپ و دو واحد به سمت بالا انتقال دهیم؛ بنابراین:



حال برای رسم $y_2 = -f\left(\frac{x}{2}\right)$ کافی است نمودار تابع $y_1 = f(x)$ را در راستای افقی دو برابر منبسط و سپس نسبت به محور x ها قرینه کنیم؛ در نتیجه تابع $y_2 = -f\left(\frac{x}{2}\right)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.



(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۸۳- *(مرضیه گودرزی)*

دامنهٔ تابع $f(x)$ دو برابر شده است؛ یعنی در راستای محور x ها، دو برابر منبسط شده است. هم‌چنین یک واحد در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل شده است. بنابراین رابطهٔ $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$ صحیح است.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۸۴- *(سیدعادل حسینی)*

$$f(x) = (x+1)^2 \xrightarrow[\text{۱ واحد به پایین}]{\text{۲ واحد به راست}} g(x) = (x-1)^2 - 1$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 - 1$$

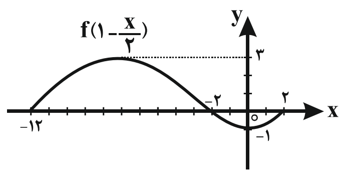
$$\Rightarrow 4x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{4}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{-1}{4}\right) = g\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{9}{16}$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۸۵- *(میلاد سجادی‌لاریجانی)*

ابتدا باید نمودار تابع $f\left(1-\frac{x}{2}\right)$ را رسم کنیم. برای این امر کافی است نمودار $f(x+2)$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم، سپس دامنه (x ها) را دو برابر و در نهایت نمودار حاصل را نسبت به محور y ها قرینه کنیم؛ بنابراین تابع $f\left(1-\frac{x}{2}\right)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



حال بازه‌ای از x جزء دامنه است که به ازای آن‌ها x و $f\left(1-\frac{x}{2}\right)$ هم‌علامت یا برابر صفر باشند.

		−۱۲		−۲		۰		۲	
x	−		−		−		+		+
$f\left(1-\frac{x}{2}\right)$	X		+		−		−		X
$xf\left(1-\frac{x}{2}\right)$	X		−		+		−		X

$$xf\left(1-\frac{x}{2}\right) \ge 0 \Rightarrow D_y = [-2,0] \cup \{-12,2\}$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

-۸۶ *(محمدمهدی وزیری)*

$$D_{f(۲-x)}=[-۱,۲]\xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{انتقال دو واحد}}D_{f(-x)}=[-۳,۰]$$

$$\xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها}]{\text{قرینه نسبت به}}D_{f(x)}=[۰,۳]\xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{انتقال ۴ واحد}}D_{f(x+۴)}=[-۴,-۱]$$

$$\xrightarrow[\text{افقی با ضریب } \frac{۱}{۳}]{\text{انقباض در راستای}}D_{f(۳x+۴)}=\left[-\frac{۴}{۳},-\frac{۱}{۳}\right]$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

-۸۷ *(میلاد سجادی‌لاریجانی)*

با توجه به نمودارها درمی‌یابیم که:

$$D_f=[۰,۴],R_f=[-۲,۲],D_g=[-۴,۴],R_g=[-۱,۱]$$

با انتقال a واحد نمودار تابع f به سمت چپ، منقبض‌کردن دو برابری آن در راستای عمودی و انتقال یک واحد به سمت بالا به نمودار $y_۱=\frac{۱}{۲}f(x+a)+۱$ خواهیم رسید؛ بنابراین داریم:

$$D_{y_۱}=[-a,۴-a],R_{y_۱}=[۰,۲]$$

با منقبض کردن دو برابر $g(x)$ در راستای افقی و سپس انتقال b واحد نمودار در راستای عمودی به نمودار $y_۲=g(۲x)+b$ خواهیم رسید بنابراین داریم:

$$D_{y_۲}=[-۲,۲],R_{y_۲}=[b-۱,b+۱]$$

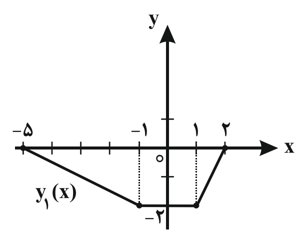
دامنه‌های $y_۱$ و $y_۲$ را با هم و بردهای آن‌ها را نیز با هم برابر درنظر می‌گیریم:

$$\Rightarrow\begin{cases}[-a,۴-a]=[-۲,۲]\Rightarrow a=۲\\ [b-۱,b+۱]=[۰,۲]\Rightarrow b=۱\end{cases}\Rightarrow a+b=۳$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

-۸۸ *(محمدجواد محسنی)*

اگر نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم و سپس یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، به نمودار تابع $y_۱(x)=-f(x+۱)$ خواهیم رسید:



حال با دقت به دو نمودار $g(x)$ و $y_۱(x)$ درمی‌یابیم که برای رسیدن به نمودار تابع $g(x)$، $y_۱(x)$ را باید در راستای افقی، دو برابر منقبض کنیم و سپس دو واحد در راستای عمودی به سمت بالا انتقال دهیم. یعنی:

$$g(x)=۲+y_۱(۲x)\Rightarrow g(x)=۲-f(۲x+۱)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m=۲\\ n=۲\end{cases}\Rightarrow ۲m+n=۶$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

-۸۹ *(عباس اسدی‌امیرآبادی)*

$$f(x^۲)\ \text{دامنهٔ}: ۱\le x^۲<۴\Rightarrow\begin{cases}۱\le x<۲\\ \text{یا}\\ -۲<x\le -۱\end{cases}\qquad (۱)$$

$$g(۳-۲x)\ \text{دامنهٔ}: ۲<۳-۲x<۹\Rightarrow -۱<-۲x<۶$$

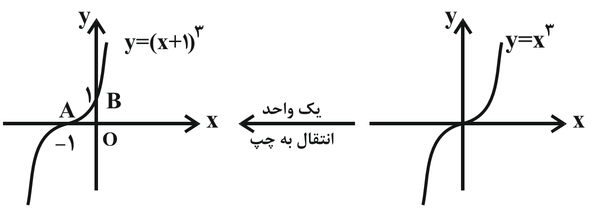
$$\Rightarrow -۳<x<\frac{۱}{۲}\quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)}D_h=(-۲,-۱]$$

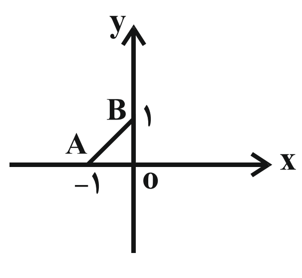
(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

-۹۰ *(یاسین سپهر)*

نمودار تابع $y=(x+۱)^۳$ را به‌کمک نمودار تابع $y=x^۳$ رسم می‌کنیم.



شکل مورد نظر، مثلث AOB در نمودار زیر است که مساحت آن $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.



(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۴)

۹۱- *(سیدعادل حسینی)*

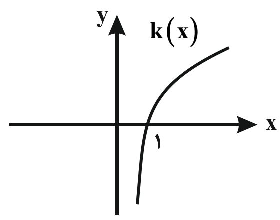
فرض می‌کنیم که ریشه‌ها α، β و γ باشند:

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$
$$=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma$$
$$\Rightarrow b=-\alpha\beta\gamma=-(+3)=-3\ ;$$
$$f(2)=15\Rightarrow 8+12+2a-3=15\Rightarrow a=-1$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

۹۲- *(یاسین سپهر)*

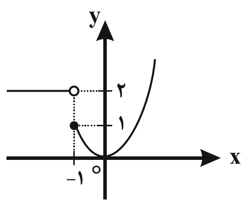
کافی است نمودار تابع‌ها را رسم نماییم. به سادگی می‌بینیم نمودار $k(x)=\log_2^x$ مطابق شکل زیر، یک تابع اکیداً صعودی است.



(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۹۳- *(یاسین سپهر)*

نمودار تابع $f(x)$ مطابق شکل زیر است:



بنابراین تابع در بازهٔ $[-1,0]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است. بنابراین داریم:

$$-1<a<b<0\xrightarrow[\text{نزولی}]{\text{تابع اکیداً}}f(a)>f(b)$$
$$-1<a<b<0\Rightarrow a^2>b^2>0\xrightarrow[\text{صعودی}]{\text{تابع اکیداً}}f(a^2)>f(b^2)$$

لازم به ذکر است که رابطهٔ گزینهٔ «۳» به ازای همه مقادیر a و b در بازهٔ $(-1,0)$ برقرار نیست. هم‌چنین با جای‌گذاری $f(a)=|a|^2$، $f(b)=|b|^2$ و استفاده از این نکته که $|a|^2<|a|$ می‌باشد، نادرستی رابطهٔ گزینهٔ «۴» نیز به‌سادگی اثبات می‌شود.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۹۴- *(یاسین سپهر)*

ابتدا دامنهٔ ضابطه‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\log_{0.1}^{x+1}: x+1>0\Rightarrow x>-1\\ \log_{0.1}^{2x-3}: 2x-3>0\Rightarrow x>\frac{3}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow x>\frac{3}{2}\qquad (1)$$

از طرفی تابع با ضابطهٔ $y=\log_{0.1}^{x}$ اکیداً نزولی است؛ بنابراین داریم:

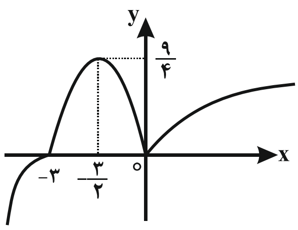
$$\log_{0.1}^{x+1}<\log_{0.1}^{2x-3}\Rightarrow x+1>2x-3\Rightarrow x<4\qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)}x\in\left(\frac{3}{2},4\right)$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۹۵- *(سیدعادل حسینی)*

نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است:



واضح است که این تابع در بازهٔ $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$ صعودی، در بازهٔ $\left[-\frac{3}{2},0\right]$ نزولی و در بازهٔ $[0,\infty)$ صعودی است. بنابراین گزینهٔ «۳» پاسخ صحیح سؤال است.

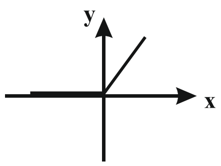
(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

۹۶- *(محمدمهدی وزیری)*

نمودار همهٔ گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

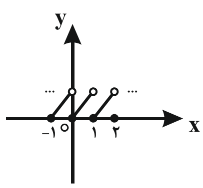
گزینهٔ «۱» صعودی است.

$$y=\begin{cases}2x & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

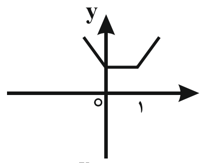


گزینهٔ «۲» غیریکنوا است.

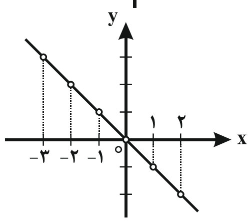
$$y=x-[x]$$



گزینهٔ «۳» غیریکنوا است. $y=|x|+|x-1|$



گزینهٔ «۴» نزولی است. $y=-x\,;\,x\notin\mathbb{Z}$



(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

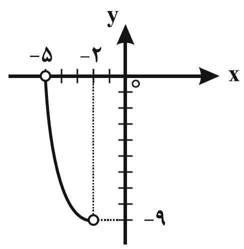
-۹۷ (محمدمهدی وزیری)

$$f(x)=(x+2)^2-9$$

$$D_f:\left|x+\frac{7}{2}\right|<\frac{3}{2}\Rightarrow -\frac{3}{2}<x+\frac{7}{2}<\frac{3}{2}\xrightarrow{-\frac{7}{2}}-\frac{10}{2}<x<-\frac{4}{2}$$

$$\Rightarrow D_f=(-5,-2)$$

تابع را در این بازه رسم می‌کنیم:



بنابراین، تابع $f(x)$ در بازهٔ داده‌شده نزولی است.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

-۹۸ (محمدمهدی وزیری)

$$f(|x|)-f(2)\ge 0\Rightarrow f(|x|)\ge f(2)$$

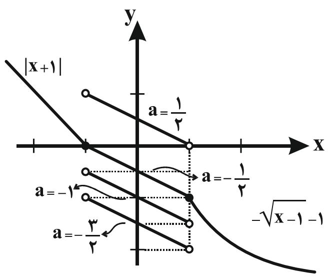
چون تابع f اکیداً نزولی است، باید $|x|\le 2$ باشد؛ بنابراین:

$$D_y:-2\le x\le 2$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

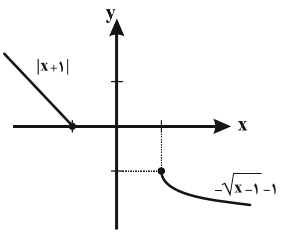
-۹۹ (محمدمهدی وزیری)

راه حل اول: نمودار تابع $f(x)$ را برای مقادیر داده شدهٔ a رسم می‌کنیم:



واضح است که برای اینکه تابع اکیداً نزولی باشد، فقط مقدار $a=-\frac{1}{2}$ قابل قبول است.

راه حل دوم: ابتدا ضابطه‌ها را رسم می‌کنیم:



حال برای اینکه تابع اکیداً نزولی باشد، باید شروط زیر برقرار باشد:

$$x=-1:\frac{1}{2}+a\le 0\Rightarrow a\le-\frac{1}{2}\qquad(1)$$

$$x=1:\frac{-1}{2}+a\ge -1\Rightarrow a\ge-\frac{1}{2}\qquad(2)$$

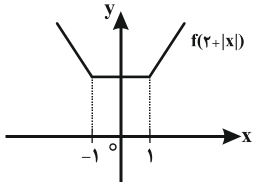
بنابراین داریم:

$$(1)\cap(2)\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

-۱۰۰ (محمدمهدی وزیری)

نمودار تابع $f(x)$ را دو واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x+2)$ به‌دست آید. سپس به جای مقادیر تابع در xهای منفی نمودار، قرینهٔ آن به‌ازای xهای مثبت را نسبت به محور yها قرار می‌دهیم تا نمودار $f(2+|x|)$ مطابق شکل زیر به‌دست آید:



مشاهده می‌شود که بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(2+|x|)$ در آن صعودی است، بازهٔ $[-1,+\infty)$ خواهد بود.

(حسابان ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)

ریاضی پایه

-۱۰۱ *(یاسین سپهر)*

بررسی موارد:

الف) تابع $g(x)=\frac{۵}{۲}$ وارون پذیر نیست.

ب) اگر $f(۷)=۵$ و $g(۴)=۷$، آن‌گاه $(fog)(۴)=f(g(۴))=۵$.

پ) $f(x)=x|x|=\begin{cases}x^۲ & x\geq ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}$؛ بنابراین f و g مساوی نیستند.

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۳۷ تا ۷۰)

-۱۰۲ *(سیدعادل حسینی)*

معادله، تبدیل به معادلهٔ زیر می‌شود:

$$۲[x^۲]-۳|x|-۲=۰$$

واضح است که باید $x\in\mathbb{Z}$ باشد؛ بنابراین:

$$x<۰:\quad ۲x^۲+۳x-۲=۰\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۱}{۲} & \text{غ.ق.ق}\\ x=-۲ & \text{ق.ق}\end{cases}$$

$$x\geq ۰:\quad ۲x^۲-۳x-۲=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{۱}{۲} & \text{غ.ق.ق}\\ x=۲ & \text{ق.ق}\end{cases}$$

در نتیجه $x=\pm ۲$ جواب‌های معادله است.

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۴۴ تا ۵۳)

-۱۰۳ *(سیدعادل حسینی)*

واضح است که برد تابع نیز باید سه عضوی باشد؛ بنابراین سه عضو متمایز از B باید انتخاب کنیم و این سه عضو، خود به $۳!$ حالت می‌توانند جابه‌جا شوند (یعنی به عضوهای متفاوتی از A وصل شوند) که تعداد توابع $\binom{۴}{۳}\times ۳!=۲۴$ به‌دست می‌آید. به بیان دیگر، در تابع $f=\{(a,\square),(b,\square),(c,\square)\}$، $\square$ها می‌توانند $۴\times ۳\times ۲=۲۴$ حالت را بپذیرند.

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۳)

-۱۰۴ *(رضا زندکانی)*

$$\left.\begin{array}{l}f(a)=۴\\ f(a)=a+۱\end{array}\right\}\Rightarrow ۴=a+۱\Rightarrow a=۳$$

واضح است که $g(x)=۲x-۱$ و دامنهٔ آن اعضای مجموعهٔ برد تابع f است.

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=D_f\cap R_f\Rightarrow D_{f+g}=\{۴\}$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}f(۴)=۵\\ g(۴)=۲(۴)-۱=۷\end{array}\right\}\Rightarrow f(۴)+g(۴)=۱۲$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۶۳ تا ۷۰)

-۱۰۵ *(میلاد منصوری)*

تابع $f(x)=۳x+\sqrt{x}$ جمع دو تابع یک‌به‌یک است. بنابراین یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.

تابع $h(x)=\sqrt{x}-۳x$ دارای دو ریشهٔ $x=۰$ و $x=\frac{۱}{۹}$ است. پس یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.

تابع $k(x)=x+\frac{۱}{|x|}$ در واقع دو ضابطه‌ای است:

$$k(x)=\begin{cases}x+\frac{۱}{x} & ;x>۰\\ x-\frac{۱}{x} & ;x<۰\end{cases}=\begin{cases}\frac{x^۲+۱}{x} & ;x>۰\\ \frac{x^۲-۱}{x} & ;x<۰\end{cases}$$

که مثلاً معادلهٔ $k(x)=۳$ دارای دو ریشهٔ مثبت است. پس تابع یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.

تابع $g(x)=x^۲+|x|+۱۰۰$ به دلیل اینکه $g(x)=g(-x)$، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۱۰۶- (امیرهوشنگ خمسه)

تابع f را به‌صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم؛ بنابراین داریم:

$$۴\big(a(۲x)+b\big)=a(۸x-۱)+b-۵ \Rightarrow a+۳b=-۵ \quad (۱)$$

$$f^{-۱}(۳)=۵ \Rightarrow f(۵)=۳ \Rightarrow ۵a+b=۳ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} a=۱, b=-۲ \Rightarrow f(x)=x-۲$$

$$\xrightarrow{f(۲)=m} m=۲-۲=۰$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۱۰۷- (سیدعادل حسینی)

$$y=\begin{cases} x & ;x<۰ \\ ۳x & ;x\geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \text{تابع وارون}: y=\begin{cases} x & :x<۰ \\ \frac{۱}{۳}x & ;x\geq ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{تابع وارون}: y=\frac{۲x-|x|}{۳}$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۱۰۸- (سیدعادل حسینی)

در ابتدا، مجموعهٔ داده‌شده باید تابع باشد؛ بنابراین:

$$m^۳-m=۴m^۲-۴ \Rightarrow (m-۴)(m^۲-۱)=۰$$

$$\Rightarrow m=۴ \text{ یا } m=۱ \text{ یا } m=-۱$$

$$\begin{cases} m=۱ \Rightarrow (۱,۰),(۱,۴)\in f \Rightarrow & \text{مجموعهٔ مورد نظر تابع نیست.} \\ m=-۱ \Rightarrow (۱,۰),(۵,۰)\in f \Rightarrow & \text{تابع } f \text{، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.} \\ m=۴ \Rightarrow & \text{تابع } f \text{، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.} \end{cases}$$

در نتیجه فقط برای $m=۴$ است که تابع f وارون‌پذیر است.

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۵۴ تا ۶۲)

۱۰۹- (میلاد سجادی لاریجانی)

$$(۴,۴)\in fog \Rightarrow f\big(g(۴)\big)=۴ \Rightarrow \big(g(۴),۴\big)\in f$$

$$a=g(۴)=۶$$

$$(b,۱)\in fog \Rightarrow f\big(g(b)\big)=۱ \Rightarrow \big(g(b),۱\big)\in f \Rightarrow g(b)=۱۲$$

$$\Rightarrow b+\sqrt{b}=۱۲ \xrightarrow{\sqrt{b}=t, t\geq ۰} t^۲+t-۱۲=۰$$

$$\Rightarrow (t+۴)(t-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۳ & \text{ق.ق} \\ t=-۴ & \text{غ.ق.ق} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{b}=۳ \Rightarrow b=۹$$

$$\Rightarrow a+b=۱۵$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۶۳ تا ۷۰)

۱۱۰- (میلاد منصوری)

رابطهٔ داده شده مشابه رابطهٔ بین سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ حسابی است.

بنابراین تابع f به فرم جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی و خطی است؛ یعنی $f(x)=\alpha x+\beta$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-۱)=-۳ \Rightarrow -\alpha+\beta=-۳ \\ f(۲)=-۱ \Rightarrow ۲\alpha+\beta=-۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{۲}{۳} \\ \beta=-\frac{۷}{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۲x-۷}{۳} \Rightarrow f(۵)=۱$$

(حسابان ۱- تابع: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۳)

هندسه ۳

۱۱۱- (احسان جوانی‌یاری)

می‌دانیم $A = \left(A^{-1}\right)^{-1}$، پس وارون ماتریس A^{-1} را حساب می‌کنیم:

$$\left|A^{-1}\right| = -۲-(-۴) = ۲$$

$$A = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

حال $A \times B$ را حساب می‌کنیم:

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۸ & -۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۱ & -۳ \\ -۷ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

گزینهٔ «۱» $B \times A$، گزینهٔ «۲» $B \times A^{-1}$ و گزینهٔ «۴» $A^{-1} \times B$ را نشان می‌دهد.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

۱۱۲- (رضا زندگانی)

$$\sum_{k=۱}^{۳} a_{۱k}b_{k۲} = a_{۱۱}b_{۱۲} + a_{۱۲}b_{۲۲} + a_{۱۳}b_{۳۲}$$

$a_{۱۱} = ۱+۱ = ۲$ $b_{۱۲} = ۱\times ۲ = ۲$

$a_{۱۲} = ۲^{۲}-۱ = ۳$ $b_{۲۲} = ۲\times ۲ = ۴$

$a_{۱۳} = ۳^{۲}-۱ = ۸$ $b_{۳۲} = ۳\times ۲ = ۶$

$$\Rightarrow \sum_{k=۱}^{۳} a_{۱k}b_{k۲} = ۲\times ۲ + ۳\times ۴ + ۸\times ۶ = ۶۴$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

۱۱۳- (کیوان دارابی)

$$A^{۲} + AB + ۳B = A(A+B) + ۳B = A \times ۳I + ۳B$$

$$= ۳A + ۳B = ۳(A+B) = ۳\times ۳I = ۹I$$

توجه داشته باشید که:

$$A+B = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ & -۲ & -۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} = ۳I$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۳ تا ۲۱)

۱۱۴- (عباس اسدی امیرآبادی)

$$A = \frac{۱}{۲}\left(A^{۲} - ۱۳I\right)$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(\begin{bmatrix} ۹ & ۲ \\ ۱۰ & ۲۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱۳ & ۰ \\ ۰ & ۱۳ \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} -۴ & ۲ \\ ۱۰ & ۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۳ تا ۲۱)

۱۱۵- (سروش موئینی)

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

با استدلال استقرایی به‌راحتی می‌توان متوجه شد که $A^{k} = \begin{bmatrix} ۱ & k \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ است.

در نتیجه داریم:

$$A^{۱۲} + A^{۱۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۱۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۲۵ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{جمع درایه‌ها} = ۲۹$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۲۰)

-۱۱۶ (عباس اسدی امیرآبادی)

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۱&۰&۰\\۲&۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۱&۰&۰\\۲&۱&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۱&۰&۰\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{۳}=\bar{O}\ ,\ A^{۴}=\bar{O}\ ,\ A^{۶}=\bar{O}$$

$$A+A^{۲}+A^{۴}+A^{۶}=A+A^{۲}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۱&۰&۰\\۳&۱&۰\end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۳ تا ۲۱)

-۱۱۷ (کاظم باقرزاده)

$$A^{-۱}=A\Rightarrow AA^{-۱}=A^{۲}=I$$

$$\left(A+A^{-۱}\right)^{۲}=\left(A+A\right)^{۲}=\left(۲A\right)^{۲}=۴A^{۲}=۴I$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۳ تا ۲۳)

-۱۱۸ (نصیر محبی‌نژاد)

$$-A^{۶}=\bar{O}\Rightarrow I^{۶}-A^{۶}=I$$

$$\Rightarrow\left(I-A\right)\left(I^{۵}+I^{۴}A+I^{۳}A^{۲}+I^{۲}A^{۳}+IA^{۴}+A^{۵}\right)=I$$

$$\Rightarrow\left(I-A\right)\left(I+A+...+A^{۵}\right)=I$$

$$\Rightarrow\left(I-A\right)^{-۱}=I+A+A^{۲}+...+A^{۵}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

-۱۱۹ (سیرامیر ستوده)

$$P^{-۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۱&۱\\-۱&۱\end{bmatrix}$$

$$P^{-۱}AP=\frac{۱}{۲}\left(\begin{bmatrix}۱&۱\\-۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲\\۲&۱\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}۱&-۱\\۱&۱\end{bmatrix}$$

$$=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۳&۳\\۱&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۱\\۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\left(P^{-۱}AP\right)^{۲}=\begin{bmatrix}۳&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}^{۲}=\begin{bmatrix}۹&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

-۱۲۰ (سیرامیر ستوده)

$$I-\lambda A=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{\lambda}{۲}&-\frac{\lambda}{۲}\\-\frac{\lambda}{۲}&\frac{\lambda}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱-\frac{\lambda}{۲}&\frac{\lambda}{۲}\\\frac{\lambda}{۲}&۱-\frac{\lambda}{۲}\end{bmatrix}$$

شرط وارون‌پذیری $۱-\lambda A$ این است که $|I-\lambda A|\neq ۰$، پس داریم:

$$\left(۱-\frac{\lambda}{۲}\right)^{۲}-\frac{\lambda^{۲}}{۴}\neq ۰\Rightarrow ۱-\lambda\neq ۰\Rightarrow\lambda\neq ۱$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

هندسه ۳ (آزمون گواه)

-۱۲۱ *(کتاب آبی هندسه ۳ - سؤال ۵)*

$$AB=\begin{bmatrix}2\alpha & 1\\ 1 & \beta\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\alpha-1 & 2\alpha+2\\ 1-\beta & 1+2\beta\end{bmatrix}$$

می‌دانیم در ماتریس قطری تمام درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی برابر با صفر هستند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}2\alpha+2=0\Rightarrow\alpha=-1\\ 1-\beta=0\Rightarrow\beta=1\end{cases}\Rightarrow\alpha^3+\beta^3=-1+1=0$$

تذکر: اگر به جای محاسبهٔ AB، ماتریس BA را محاسبه کنیم، آنگاه $\alpha=1$ و $\beta=-1$ خواهد بود و در نتیجه جواب نهایی مسئله تغییری نمی‌کند.

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۲ تا ۲۱)

-۱۲۲ *(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۴)*

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^2-4A=A(A-4I)$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-3 & 2 & 2\\ 2 & -3 & 2\\ 2 & 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}=5I$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۳ تا ۲۱)

-۱۲۳ *(کتاب آبی هندسه ۳ - سؤال ۲۲)*

$$\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 2 & 1\\ 1 & -x & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-x+1 & -2x-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 2\\ 1\end{bmatrix}=-x^2+x-4x-2=0$$

$$\Rightarrow x^2+3x+2=0$$

$$(x+2)(x+1)=0\Rightarrow\alpha=-2,\beta=-1\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۱۹)

-۱۲۴ *(سراسری ریاضی - ۹۷)*

$$C=\begin{bmatrix}1 & 3 & 6 & 24\\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4\\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C^2=\begin{bmatrix}1 & 3 & 6 & 24\\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4\\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 6 & 24\\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4\\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & & & \\ & 4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 4\end{bmatrix}\Rightarrow$$ **مجموع درایه‌های قطر اصلی** C^2 $=16$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

-۱۲۵ *(کتاب آبی هندسه ۳- سؤال ۵ - سؤال ۳۲)*

با توجه به آنکه در ماتریس $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر و درایه‌های روی قطر فرعی نیز با هم برابرند، پس در ماتریس $\begin{bmatrix}\sin\alpha & x^4\\ 8x & \cos\alpha\end{bmatrix}$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}x^4=8x\xrightarrow{x\neq 0}x^3=8\Rightarrow x=2\\ \sin\alpha=\cos\alpha\Rightarrow\tan\alpha=1\end{array}\right\}\Rightarrow x+\tan\alpha=3$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱)

-۱۲۶ *(سراسری ریاضی - ۸۳)*

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

$$A^4=\left(A^2\right)^2=(I)^2=I$$

$$A^6=(A^2)^3=(I)^3=I\Rightarrow A^7=A^6\times A=I\times A=A$$

$$A^7-A^4=A-I=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & -3\end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۳ تا ۲۱)

-۱۲۷ (کتاب آبی هندسه ۳ - سؤال ۷۸)

رابطهٔ $A^{-1}+B^{-1}=I$ را در نظر می‌گیریم. طرفین رابطه را از چپ در ماتریس A ضرب می‌کنیم:

$$A\left(A^{-1}+B^{-1}\right)=AI\Rightarrow I+AB^{-1}=A$$

طرفین رابطهٔ فوق را از راست در ماتریس B ضرب می‌کنیم:

$$\left(I+AB^{-1}\right)B=AB\Rightarrow B+A\underbrace{\left(B^{-1}B\right)}_{I}=AB$$

$$\Rightarrow B+A=AB\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

-۱۲۸ (کتاب آبی هندسه ۳ - سؤال ٦٦)

$$A^{-1}=I-A\Rightarrow A\left(I-A\right)=I\Rightarrow A-A^{2}=I\Rightarrow A^{2}=A-I$$

$$=-\left(I-A\right)=-A^{-1}\Rightarrow A^{2}=-A^{-1}$$

حال کافی است طرفین را در ماتریس A^{2} ضرب کنیم.

$$A^{4}=-A^{-1}\times A^{2}=-A$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

-۱۲۹ (سراسری ریاضی - ۹۲)

با فرض $B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ و $D=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$، معادلهٔ مفروض سؤال به‌صورت $BAC=D$ خواهد بود. برای یافتن ماتریس A، طرفین این معادله را از راست در C^{-1} و از چپ در B^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow (B^{-1}B)A(CC^{-1})=B^{-1}DC^{-1}$$

$$\Rightarrow IAI=B^{-1}DC^{-1}$$

$$\xrightarrow{IA=AI=A}A=B^{-1}DC^{-1}$$

$$C=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow C^{-1}=\frac{1}{5-6}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{4-6}\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\frac{-1}{2} & \frac{3}{2}\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}-3 & 3\\ ... & ...\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & -21\\ ... & ...\end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

-۱۳۰ (سراسری ریاضی - ۹۲)

$$A=\begin{bmatrix}0 & -\tan\alpha\\ \tan\alpha & 0\end{bmatrix}\Rightarrow I+A=\begin{bmatrix}1 & -\tan\alpha\\ \tan\alpha & 1\end{bmatrix}$$

$$I-A=\begin{bmatrix}1 & +\tan\alpha\\ -\tan\alpha & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (I-A)^{-1}=\frac{1}{1+\tan^{2}\alpha}\begin{bmatrix}1 & -\tan\alpha\\ \tan\alpha & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (I-A)^{-1}(I+A)$$

$$=\frac{1}{1+\tan^{2}\alpha}\begin{bmatrix}1 & -\tan\alpha\\ \tan\alpha & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\tan\alpha\\ \tan\alpha & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{1+\tan^{2}\alpha}\begin{bmatrix}1-\tan^{2}\alpha & -2\tan\alpha\\ ... & ...\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1-\tan^{2}\alpha}{1+\tan^{2}\alpha} & \frac{-2\tan\alpha}{1+\tan^{2}\alpha}\\ ... & ...\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha\\ ... & ...\end{bmatrix}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها: صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳)

ریاضیات گسسته

۱۳۱- *(مرتضی فهیم‌علوی)*

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: ابتدا قضیهٔ شرطی را اثبات می‌کنیم:

$$a+\frac{1}{a}\geq 2 \xrightarrow{\text{توان دوم}} a^2+\frac{1}{a^2}+2\geq 4 \Rightarrow a^2+\frac{1}{a^2}\geq 2$$

برای رد درستی عکس این قضیهٔ شرطی، می‌توان $a=-2$ را در نظر گرفت.

گزینهٔ «۲»: خود قضیهٔ شرطی واضح است. عکس آن می‌گوید اگر $a\neq -1$، آنگاه $a>0$ که $a=-2$ مثال نقض است و این گزینه رد می‌شود.

گزینهٔ «۳»: مثال نقض برای رد این عبارت $\alpha=\sqrt{2}$ و $\beta=-\sqrt{2}$ است.

گزینهٔ «۴»: اگر $k^3>k^2$ باشد، می‌توانیم ثابت کنیم $k>1$.

$$k^3>k^2 \Leftrightarrow k^2\times k>k^2\times 1 \xleftrightarrow{k^2>0} k>1$$

تمام مراحل اثبات بالا دوطرفه است، بنابراین قضیهٔ گزینهٔ «۴» دو شرطی است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲ تا ۸)

۱۳۲- *(مهرداد ملوندی)*

مثال نقض برای گزینهٔ «۳»: با فرض $p=2$ و $q=3$، عدد $p+q=5$ نیز عددی اول است. درستی گزینه‌های دیگر را خودتان بررسی کنید.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۲ و ۳)

۱۳۳- *(حسین تباره)*

گزینه «۱»: $a^2\mid a+b \xrightarrow{\times(a-b)} \begin{cases} a^2\mid a^2-b^2 \\ a^2\mid a^2\end{cases} \overset{\text{تفاضل}}{\Rightarrow} a^2\mid b^2$

گزینهٔ «۲»: $\begin{cases}a^2\mid a+b\\ a\mid a^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\mid a+b\\ a\mid a\end{cases}\overset{\text{تفاضل}}{\Rightarrow}\begin{cases}a\mid b\\ a\mid a\end{cases}\Rightarrow a\mid 3b-2a$

گزینهٔ «۴»: $\begin{cases}a^2\mid b^2\\ a^2\mid a^2\end{cases}\overset{\text{مجموع}}{\Rightarrow} a^2\mid a^2+b^2$

مثال نقض برای گزینهٔ «۳»: $a=3$، $b=6$.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱۳۴- *(سروش موئینی)*

$$\left.\begin{array}{l} x+3\mid 4x-1\\ x+3\mid 4x+12\end{array}\right\}\Rightarrow x+3\mid 13\Rightarrow x+3=13 \text{ یا } 1 \text{ یا } -1 \text{ یا } -13$$

بنابراین تنها مقدار طبیعی ممکن برای x، عدد ۱۰ است و $A=(10,3)$ تنها نقطه با مختصات طبیعی روی این منحنی می‌باشد.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۱۳۵- *(سیدوحید ذوالفقاری)*

مثال نقض: اگر $a=4$ و $b=6$ باشد، آنگاه $6\nmid 4$ ولی $(4,6)=2\neq 1$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۷)

۱۳۶- *(امیرحسین ابومحبوب)*

با استفاده از مثال نقض می‌توان درستی گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴» را رد کرد. به عنوان مثال فرض کنید $a=24$ و $b=9$ باشد، در این‌صورت $q=2$ و $r=6$ است.

گزینهٔ «۱»: $(9,6)\neq(24,6)$

گزینهٔ «۳»: $(9,2)\neq(24,2)$

گزینهٔ «۴»: $(24,6)\neq(24,9)$

حال فرض کنید $d=(a,b)$ باشد، در این‌صورت با توجه به این که $a=bq+r$ است، داریم:

$$\left.\begin{array}{r}d\mid b\Rightarrow d\mid bq\\ d\mid a\end{array}\right\}\Rightarrow d\mid a-bq\Rightarrow d\mid r$$

بنابراین دو رابطهٔ $d\mid b$ و $d\mid r$ برقرار است.

حال فرض کنید $m\mid b$ و $m\mid r$. در این‌صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{r}m\mid b\Rightarrow m\mid bq\\ m\mid r\end{array}\right\}\Rightarrow m\mid bq+r\Rightarrow m\mid a$$

$m\mid a$ و $m\mid b$ و چون $d=(a,b)$، پس $m\leq d$. بنابراین $(b,r)=d$ است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۳ تا ۱۷)

۱۳۷- *(مختار منصوری)*

$$x=27q_1+12\Rightarrow 2x=2(27q_1)+24$$
$$y=27q_2+13\Rightarrow 3y=3(27q_2)+39$$
$$\Rightarrow 2x-3y=27(2q_1-3q_2)-15=27q-15$$
$$=27q-27+12=27(q-1)+12\Rightarrow r=12$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۱۳۸- *(رضا پورحسینی)*

$$a=23q+7q\Rightarrow 7q<23\Rightarrow q<\frac{23}{7}\Rightarrow q\leq 3$$

$$q_{max}=3\Rightarrow a_{max}=30(3)=90\Rightarrow \text{مجموع ارقام}=9$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۱۳۹- *(شروین سیاح‌نیا)*

با توجه به الگوریتم تقسیم داریم:

$$\begin{cases}a=bq+10\\ a+100=bq'+11\end{cases}\xrightarrow{\text{از هم کم می‌کنیم}}100=b(q'-q)+1$$

$$\Rightarrow b(q'-q)=99\Rightarrow b\mid 99$$

حال با توجه به آن که باقی‌مانده‌ها برابر با ۱۰ و ۱۱ شده‌اند، پس $b>11$ است. از آن جا که $99=1\times 99=3\times 33$، b می‌تواند دو مقدار $b=33$ و $b=99$ را بپذیرد.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۴ و ۱۵)

۱۴۰- *(حمید کروسی)*

عدد k را با توجه به باقی‌ماندهٔ آن در تقسیم بر ۵، به یکی از حالت‌های زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}k=5q\\ k=5q+1\\ k=5q+2\\ k=5q+3\\ k=5q+4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k^2+1=5q'+1\\ k^2+1=5q'+2\\ k^2+1=5q'+5=5q_1\\ k^2+1=5q'+10=5q_2\\ k^2+1=5q'+17=5q_3+2\end{cases}$$

پس باقی‌ماندهٔ k^2+1 بر ۵، می‌تواند یکی از اعداد صفر، ۱ و ۲ باشد.

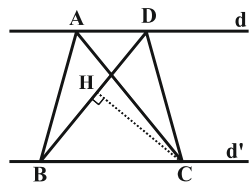
(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریهٔ اعداد: صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

هندسه ۱

۱۴۱- *(محمد خندان)*

اگر دو مثلث، قاعدهٔ مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعدهٔ آن‌ها، روی یک خط موازی با آن قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند.

بنابراین دو مثلث ABC و BCD هم‌مساحت‌اند. پس:



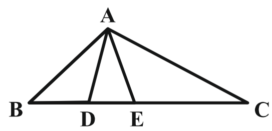
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{BCD}} = 8$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{BCD}} = \frac{CH \times BD}{2} = 8 \xrightarrow{DB=4} CH = 4$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۱۴۲- *(محمد خندان)*

اگر دو مثلث در یک رأس مشترک باشند و قاعدهٔ مقابل به این رأس آن‌ها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌های آن‌هاست. بنابراین:



$$\begin{cases} \dfrac{S_{\overset{\Delta}{ACE}}}{S_{\overset{\Delta}{ADE}}} = \dfrac{CE}{DE} = 3 \Rightarrow DE = \dfrac{1}{3}CE \\ \dfrac{S_{\overset{\Delta}{ACE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABD}}} = \dfrac{CE}{BD} = 2 \Rightarrow BD = \dfrac{1}{2}CE \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{BD + DE + CE}{\frac{1}{3}CE} = \frac{\frac{1}{2}CE + \frac{1}{3}CE + CE}{\frac{1}{3}CE} = \frac{11}{2} = 5/5$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۱۴۳- *(محسن محمدکریمی)*

دو مثلث ABD و ABC، دارای قاعدهٔ مشترک AB هستند و همچنین ارتفاع‌های نظیر این قاعده در دو مثلث، طول یکسانی دارند (فاصلهٔ دو خط موازی). پس $S_{ABC} = S_{ABD}$. با کم‌کردن مساحت مثلث AOB از مساحت این دو مثلث، داریم: $S_{\overset{\Delta}{AOD}} = S_{\overset{\Delta}{BOC}}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{S_{\overset{\Delta}{AOD}}}{S_{\overset{\Delta}{DOC}}} = \dfrac{AO}{OC} \\ \dfrac{S_{\overset{\Delta}{AOB}}}{S_{\overset{\Delta}{BOC}}} = \dfrac{AO}{OC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{AOD}}}{S_{\overset{\Delta}{DOC}}} = \frac{S_{\overset{\Delta}{AOB}}}{S_{\overset{\Delta}{BOC}}}$$

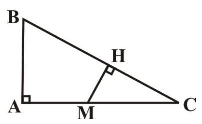
$$\Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{4}{x} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 4 + 6 + 9 + 6 = 25$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۱۴۴- *(محمدعلی نادرپور)*

چون M وسط AC است پس $AC = 2MC$



$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{MHC} \Rightarrow \frac{MC}{BC} = \frac{MH}{AB} = \frac{HC}{AC}$$

$$\frac{MC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow BC = \frac{4}{\sqrt{3}}MC$$

$$\frac{HC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{HC}{2MC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow HC = \frac{\sqrt{3}}{2}MC$$

$$MC^2 = MH^2 + HC^2 = 3 + \frac{3}{4}MC^2 \Rightarrow MC^2 = 12$$

$$\Rightarrow MC = 2\sqrt{3} \Rightarrow BC = 8$$

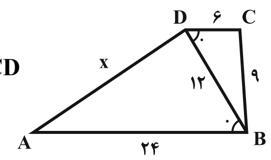
(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

۱۴۵- *(رضا عباسی‌اصل)*

بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب داریم:

$$\begin{cases} AB \parallel CD \\ \text{مورب } BD \end{cases} \Rightarrow A\hat{B}D = B\hat{D}C$$

از طرفی اضلاع دو زاویهٔ فوق متناسب‌اند، پس مثلث‌های ABD و BCD متشابه‌اند:



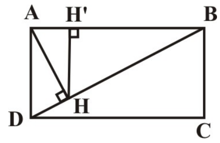
$$\begin{cases} A\hat{B}D = B\hat{D}C \\ \dfrac{AB}{DB} = \dfrac{DB}{DC} = 2 \end{cases} \Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta BCD$$

پس: $\frac{x}{9} = 2 \Rightarrow x = 18$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

-۱۴۶ *(امیرحسین ابومحبوب)*

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD ، داریم:



$$BD^۲ = AB^۲ + AD^۲ = ۱۲ + ۴ = ۱۶ \Rightarrow BD = ۴$$

$$AB^۲ = BD.BH \Rightarrow ۱۲ = ۴ \times BH \Rightarrow BH = ۳$$

حال اگر از H ، عمود HH' را بر ضلع AB رسم کنیم، داریم:

$$HH' \parallel AD \Rightarrow \frac{HH'}{AD} = \frac{BH}{BD} \Rightarrow \frac{HH'}{۲} = \frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow HH' = \frac{۳}{۲}$$

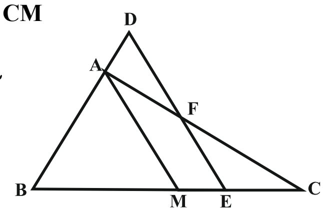
(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

-۱۴۷ *(محمدطاهر شعاعی)*

بنابه فرض $BM = CM$ است. به کمک قضیهٔ تالس داریم:

$$\left.\begin{aligned} &\overset{\Delta}{AMC} : EF \parallel AM \Rightarrow \frac{EF}{AM} = \frac{CE}{CM} \\ &\overset{\Delta}{BDE} : AM \parallel DE \Rightarrow \frac{DE}{AM} = \frac{BE}{BM} = \frac{BE}{CM} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{EF}{AM} + \frac{DE}{AM} = \frac{CE + BE}{CM} = \frac{BC}{CM}$$



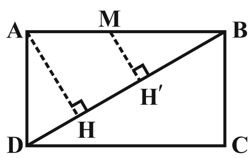
$$\Rightarrow \frac{EF}{AM} + \frac{DE}{AM} = \frac{۲CM}{CM} = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۵} + \frac{DE}{AM} = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{AM} = ۲ - \frac{۳}{۵} = \frac{۷}{۵} = ۱/۴$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

-۱۴۸ *(نوید مجیدی)*



نقطهٔ وسط AB را M می‌نامیم، بنابر داده‌های مسئله $MH' = ۲\sqrt{۳}$ و چون دو مثلث $MH'B$ و ABH متشابه‌اند، پس

$$\frac{MH'}{AH} = \frac{MB}{AB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow AH = ۴\sqrt{۳}$$

از طرفی در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر میانگین هندسی دو قطعهٔ پدید آمده روی وتر است، در نتیجه داریم:

$$AH^۲ = DH.HB \Rightarrow (۴\sqrt{۳})^۲ = DH \times ۳DH$$

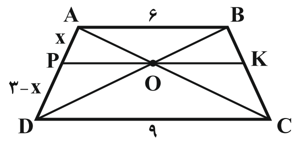
$$\Rightarrow ۳DH^۲ = ۴۸ \Rightarrow DH = ۴$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{AH^۲ + DH^۲} = \sqrt{(۴\sqrt{۳})^۲ + ۴^۲} = \sqrt{۶۴} = ۸$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۲ و ۳۸ تا ۴۲)

-۱۴۹ *(علی وزیری)*

در ذوزنقهٔ شکل زیر، خط KP گذرا از O و به موازات قاعده‌ها رسم شده است.



با نوشتن قضیهٔ تالس در مثلث ACD داریم:

$$OP \parallel CD \Rightarrow \frac{x}{AD} = \frac{OP}{CD} \Rightarrow OP = \frac{x \times CD}{AD} = \frac{x \times ۹}{۳} = ۳x$$

حال با توجه به قضیهٔ تالس در مثلث ABD داریم:

$$OP \parallel AB \Rightarrow \frac{OP}{AB} = \frac{DP}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{۳x}{۶} = \frac{۳ - x}{۳} \Rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{۳ - x}{۳} \Rightarrow ۳x = ۶ - ۲x \Rightarrow x = \frac{۶}{۵} = ۱/۲$$

طول قطعهٔ دیگر $۱/۸ = ۱/۲ - ۳$ است. پس طول قطعهٔ کوچک $۱/۲$ می‌باشد.

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

-۱۵۰ *(محمدابراهیم گیتی‌زاده)*

$$\overset{\Delta}{ODC} : BA \parallel DC \Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC}$$

$$\overset{\Delta}{ODE} : BC \parallel DE \Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{OC}{OE}$$

با مقایسهٔ دو تناسب داریم:

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OE} \Rightarrow OC^۲ = OA.OE$$

$$OC^۲ = ۳ \times ۹ = ۲۷ \Rightarrow OC = ۳\sqrt{۳}$$

(هندسه ۱- قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن: صفحه‌های ۳۴ تا ۳۷)

آمار و احتمال

۱۵۱- (سروش موئینی)

این مجموعه دارای ۴ عضو است. دقت کنید که $\{b,a\} = \{b,a,a\} = \{a,b\}$ پس $A = \{\{a\},\{b\},\{b,a\},b\}$ ، چون زیرمجموعه‌های شامل عضو $\{a\}$ را می‌خواهیم، $\{a\}$ را کنار می‌گذاریم. دقت کنید که زیرمجموعه شامل $\{a\}$ قطعاً ناتهی هست و نیازی به اعمال شرط «ناتهی» در انتخاب $\{b\},\{b,a\},b$ نداریم؛ بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های مورد نظر برابر $۸ = ۲^۳$ است.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۱۵۲- (سیدوحید ذوالفقاری)

به وضوح می‌توان مشاهده کرد که $\{۱,۲\}$ عضوی از مجموعه A می‌باشد، پس گزینهٔ «۱» صحیح است. ۱ عضو A است، پس $\{۱\}$ زیرمجموعهٔ A می‌باشد و گزینهٔ «۲» نیز صحیح است. می‌دانیم تهی زیرمجموعهٔ تمام مجموعه‌ها است، پس گزینهٔ «۴» نیز صحیح می‌باشد. ولی برای این که $\{۱,۲\}$ زیرمجموعهٔ A باشد، باید هم ۱ و هم ۲، عضو A باشند که می‌توان دید، عدد ۲ عضوی از مجموعهٔ A نیست.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۱۹ تا ۲۳)

۱۵۳- (سیدمصطفی سیدحسینی)

$$m \in B\ ,\ A = B \Rightarrow m = ۱ \text{ یا } ۲$$

$$m = ۱ \Rightarrow \begin{cases} m^۲ + m = ۲ \\ -m^۲ + ۲m = ۱ \end{cases} \Rightarrow B = \{۱,۲\} = A$$

$$m = ۲ \Rightarrow \begin{cases} m^۲ + m = ۶ \\ -m^۲ + ۲m = ۰ \end{cases} \Rightarrow B = \{۰,۲,۶\} \neq A$$

پس دو مجموعه، تنها به ازای $m = ۱$ ، برابر یکدیگرند.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۲۳ و ۲۴)

۱۵۴- (محمدرضا اسلامی)

اعضای مجموعهٔ B ، عضوهایی از مجموعهٔ A هستند که زیر مجموعهٔ A نیز باشند: $\{۱\} \in A, \{۱\} \subseteq A$

(این عضو A ، یک زیرمجموعهٔ تک عضوی A نیز هست.)

$\{۱,\{۱\}\} \in A, \{۱,\{۱\}\} \subseteq A$

(این عضو A ، یک زیرمجموعهٔ دو عضوی A نیز هست.)

$\{۱,۲,\{۱\}\} \in A, \{۱,۲,\{۱\}\} \subseteq A$

(این عضو A ، یک زیرمجموعهٔ سه عضوی A نیز هست.)

بنابراین از ۵ عضو A ، ۳ عضو هستند که زیرمجموعهٔ A نیز محسوب می‌شوند. پس B ، سه عضو دارد.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۱۹ تا ۲۳)

۱۵۵- (امیرحسین ابومحبوب)

با توجه به این‌که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ، می‌توان نتیجه گرفت $A \subseteq C$. بنابراین:

$$\begin{cases} ۳ \notin C \Rightarrow ۳ \notin A \\ ۲ \notin B \Rightarrow ۲ \notin A \end{cases} \xrightarrow{۱ \notin A} A = \varnothing$$

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۱۹ تا ۲۵)

۱۵۶- (مهدی عزیزی)

حالت اول: اگر بزرگ‌ترین عضو ۷ و کوچک‌ترین عضو ۲ باشد، در این صورت باید تعداد زیرمجموعه‌های شامل ۲ و ۷ و فاقد ۱ را حساب کنیم که برابر است با: $۱۶ = ۲^۴$

حالت دوم: اگر بزرگ‌ترین عضو ۶ و کوچک‌ترین عضو ۳ باشد، آنگاه باید تعداد زیرمجموعه‌های شامل ۳ و ۶ و فاقد ۱، ۲ و ۷ را محاسبه کنیم که برابر است با: $۴ = ۲^۲$

حالت سوم: بزرگ‌ترین عضو ۵ و کوچک‌ترین عضو ۴ باشد، که فقط مجموعهٔ $\{۴,۵\}$ جواب خواهد بود.

بنابراین تعداد کل حالات برابر با $۱ + ۴ + ۱۶$ یعنی ۲۱ است.

تذکر: در یک مجموعهٔ n عضوی، تعداد زیرمجموعه‌های شامل k عضو (یا فاقد k عضو) برابر با ۲^{n-k} می‌باشد.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۱۵۷- (سعید زوارقی)

اگر یک افراز از مجموعهٔ پنج عضوی A بخواهد شامل یک مجموعهٔ ۳ عضوی باشد، بخش دیگر افراز یا باید دو مجموعهٔ یک عضوی باشد یا یک مجموعهٔ دو عضوی. همچنین می‌دانیم به $\binom{۵}{۳} = ۱۰$ صورت می‌توان یک زیرمجموعهٔ ۳ عضوی از مجموعهٔ ۵ عضوی انتخاب کرد. یکی از این زیرمجموعه‌ها مانند $\{۲,۴,۵\}$ را انتخاب می‌کنیم. با این زیرمجموعه، دو افراز متمایز $[\{۲,۴,۵\},\{۱,۳\}]$ و $[\{۲,۴,۵\},\{۱\},\{۳\}]$ وجود دارد. به طریق مشابه با هر کدام از ۹ زیرمجموعه دیگر نیز می‌توان دو افراز دیگر نوشت. بنابراین به تعداد $۲۰ = ۲ \times ۱۰$ افراز متفاوت وجود دارد که در آن‌ها یک مجموعهٔ ۳ عضوی وجود داشته باشد.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحهٔ ۲۱)

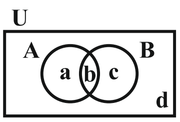
۱۵۸- (سیدعادل حسینی)

تمام اعضای مجموعهٔ A ، اعداد طبیعی فرد هستند و در نتیجه اعضای مجموعهٔ B ، اعداد طبیعی زوج خواهند بود. بنابراین $A \cap B = \varnothing$. از طرفی $C \subseteq A \cap B$ ، پس C فقط می‌تواند مجموعهٔ $\varnothing$ باشد، یعنی تنها یک مجموعه برای C پیدا می‌شود.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۱۹ تا ۲۵)

۱۵۹- (مهدی عزیزی)

دو زیر مجموعهٔ B و A را به‌صورت زیر با نمودار ون نمایش می‌دهیم؛ حال قسمت‌های مختلف نمودار را شماره‌گذاری می‌کنیم:



برای اینکه $A \cap B = \varnothing$ شود، نباید اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ در ناحیهٔ وسط یعنی ناحیهٔ b قرار گیرند، چون A و B در این ناحیه اشتراک دارند. بنابراین هر عضو، دارای ۳ مکان (a، c یا d) برای قرار گرفتن است، یعنی داریم: $۸۱ = ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳$: تعداد کل حالات

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحه‌های ۱۹ تا ۲۵)

۱۶۰- (محمدرضا وکیل‌الرعایا)

در این‌جا چند حالت داریم:

حالت اول: دو مجموعهٔ سه عضوی $\xrightarrow{\text{تعداد حالات}} \dfrac{۶!}{۳!۳!۲!} = ۱۰$

حالت دوم: شش مجموعهٔ یک عضوی $\xrightarrow{\text{تعداد حالات}} \dfrac{۶!}{۶!(۱!)^۶} = ۱$

حالت سوم: سه مجموعهٔ دو عضوی $\xrightarrow{\text{تعداد حالات}} \dfrac{۶!}{۲!۲!۲!۳!} = ۱۵$

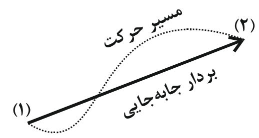
بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر ۲۶ است.

(آمار و احتمال - آشنایی با مبانی ریاضیات؛ صفحهٔ ۲۱)

فیزیک ۳

۱۶۱- *(بابک اسلامی)*

بردار جابه‌جایی، پاره‌خط جهت‌داری است که مکان آغازین حرکت را به مکان پایانی حرکت وصل می‌کند. این بردار اطلاعاتی راجع به مسیر حرکت به ما نمی‌دهد.



مسافت طی شده، طول مسیر حرکت از مکان آغازین حرکت تا مکان پایانی حرکت است.

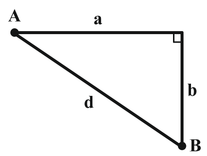
مسافت طی شده کمیتی نرده‌ای است و هیچ‌گونه اطلاعاتی راجع به جهت حرکت به ما نمی‌دهد.

با این توضیحات، تنها گزینهٔ «۴» صحیح است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۲ و ۳)

۱۶۲- *(بهراد موسوی)*

مسافت طی شده توسط متحرک در جابه‌جایی از نقطهٔ A تا نقطهٔ B برابر است با: $\ell = a + b$



جابه‌جایی متحرک طی این مسیر برابر است با: $d = \sqrt{a^۲ + b^۲}$

بنابراین داریم:

$$\frac{\ell}{d} = \frac{a+b}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \Rightarrow \left(\frac{\ell}{d}\right)^۲ = \frac{a^۲+b^۲+۲ab}{a^۲+b^۲} = ۱ + \frac{۲ab}{a^۲+b^۲} \quad (۱)$$

از طرفی داریم:

$$(a-b)^۲ \ge ۰ \Rightarrow a^۲+b^۲-۲ab \ge ۰ \Rightarrow a^۲+b^۲ \ge ۲ab$$

$$\Rightarrow \frac{۲ab}{a^۲+b^۲} \le ۱ \quad (۲)$$

در نتیجه:

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \left(\frac{\ell}{d}\right)^۲ = ۱ + \frac{۲ab}{a^۲+b^۲} \le ۲ \Rightarrow \frac{\ell}{d} \le \sqrt{۲}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۲ و ۳)

۱۶۳- *(بابک اسلامی)*

با توجه به این‌که تندی متوسط اتومبیل را پس از طی مسافت 455km می‌دانیم، می‌توانیم زمان کل حرکت را محاسبه کنیم:

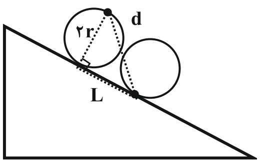
$$s_{av} = \frac{\ell}{t} \Rightarrow ۳۵ = \frac{۴۵۵}{t} \Rightarrow t = ۱۳h$$

نیمهٔ اول زمانی حرکت یعنی ۶/۵ ساعت ابتدایی حرکت و چون ما اطلاعات کافی راجع به حرکت اتومبیل طی این مدت نداریم، نمی‌توان تندی متوسط آن‌را حساب کرد.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۲ تا ۴)

۱۶۴- *(میلاد نقوی)*

هنگامی‌که چرخ به اندازهٔ نیم‌دور می‌چرخد، سنگ به‌اندازهٔ $d = v_{av}t$ جابه‌جا شده است. مطابق شکل داریم:



$$d = v_{av}t = ۴\sqrt{۱۳} \times ۰/۵ = ۲\sqrt{۱۳}m$$

$$L = \frac{۲\pi r}{۲} = \pi r$$

$$d = \sqrt{(۲r)^۲ + (L)^۲} = \sqrt{(۲r)^۲ + (\pi r)^۲}$$

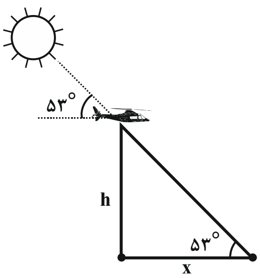
$$\Rightarrow ۲\sqrt{۱۳} = \sqrt{۴r^۲ + \pi^۲ r^۲} \Rightarrow ۲\sqrt{۱۳} = \sqrt{r^۲\left(۴+\pi^۲\right)}$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۱۳} = r\sqrt{۱۳} \Rightarrow r = ۲m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۲ تا ۶)

۱۶۵- *(میلاد نقوی)*

با توجه به حرکت عمودی پهپاد و حرکت افقی سایه بر روی سطح زمین می‌توانیم از مفهوم $\tan\alpha$ برای حل این مسئله کمک بگیریم:



$$h = v_{av}\Delta t = ۵ \times ۴ = ۲۰m$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \Rightarrow \tan ۵۳^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{h}{\tan ۵۳^\circ} = \frac{۲۰}{\frac{۴}{۳}} = ۱۵m$$

بنابراین:

$$(v_{av})_{\text{سایه}} = \frac{x}{\Delta t} = \frac{۱۵}{۴} = ۳/۷۵\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۲ تا ۶)

-۱۶۶ *(بابک اسلامی)*

در حرکت با سرعت ثابت، جابه‌جایی متناسب با زمان است.

$$x = v\Delta t + x_{\circ} \Rightarrow \Delta x = v\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$$

با توجه به این‌که اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = ۳s$ تا $t_2 = ۸s$ برابر با $|\Delta x| = |-۱۴ - ۵| = ۱۹m$ است، بنابراین در هر بازهٔ زمانی ۵ ثانیه‌ای دیگر نیز اندازهٔ جابه‌جایی آن برابر با $۱۹m$ خواهد بود.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ تا ۱۵)

-۱۶۷ *(سعید شرق)*

مساحت زیر نمودار سرعت – زمان بیانگر جابه‌جایی متحرک است. با توجه به شکل، در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، داریم:

$$\Delta x_A > \Delta x_B > \Delta x_C$$

از طرفی با توجه به تعریف سرعت متوسط، داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow (v_{av})_A > (v_{av})_B > (v_{av})_C$$

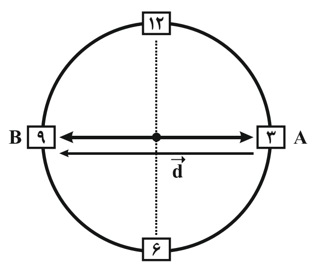
شیب خط واصل بین دو نقطه در نمودار سرعت – زمان، شتاب متوسط متحرک بین آن دو نقطه را نشان می‌دهد. با توجه به شکل، بین دو لحظهٔ t_1 و t_2، شیب خط واصل برای هر سه نمودار یکسان است و بنابراین داریم:

$$(a_{av})_A = (a_{av})_B = (a_{av})_C$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۲۱)

-۱۶۸ *(مصطفی کیانی)*

با توجه به شکل زیر، در بازهٔ زمانی $۳:۱۵'$ تا $۳:۴۵'$ نوک عقربه در مدت $\Delta t = ۳۰min$ از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رود. در این مدت جابه‌جایی نوک عقربه برابر با $d = ۱۰cm$ است. بنابراین با استفاده از رابطهٔ سرعت متوسط به‌صورت زیر اندازهٔ آن‌را حساب می‌کنیم:



$$|\vec{d}| = d = ۱۰cm = ۰/۱m$$

$$\Delta t = ۳۰min = \frac{۱}{۲}h$$

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{۰/۱}{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow v_{av} = ۰/۲\frac{m}{h}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۴)

-۱۶۹ *(مصطفی کیانی)*

گزینهٔ «۱» نادرست است. متحرک در بازهٔ زمانی ۳s تا ۱۰s در جهت مثبت محور x و در بازهٔ زمانی ۱۴s تا ۱۸s در جهت منفی محور حرکت می‌کند. بنابراین در لحظهٔ ۸s رو به سوی مثبت و در لحظهٔ ۱۶s رو به سوی منفی در حرکت است و تغییر جهت نمی‌دهد.

گزینهٔ «۲» درست است. متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۳s و ۱۴s تا ۱۸s و در مجموع به مدت ۷s در خلاف جهت محور x حرکت نموده است.

گزینهٔ «۳» نادرست است. در بازهٔ زمانی ۱۰s تا ۱۴s و به مدت ۴ ثانیه متحرک ساکن و در نتیجه سرعت آن صفر بوده است.

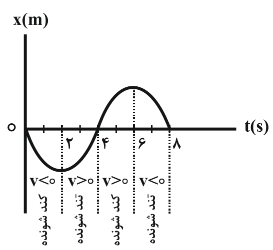
گزینهٔ «۴» نادرست است. تندی متوسط برابر مسافت طی شده تقسیم بر بازهٔ زمانی است. چون برای جسم در حال حرکت، هیچ وقت مسافت طی شده صفر نمی‌شود، لذا تندی متوسط نیز صفر نخواهد شد.

دقت کنید، در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۶ ثانیه چون جابه‌جایی متحرک صفر می‌باشد، سرعت متوسط آن صفر خواهد شد.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۹)

-۱۷۰ *(مصطفی کیانی)*

می‌دانیم شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان معرف سرعت است. بنابراین در بازه‌های زمانی صفر تا ۲s و ۶s تا ۸s، چون شیب خط مماس بر نمودار منفی است، در این بازه‌های زمانی سرعت نیز منفی است. از طرف دیگر، می‌دانیم در حرکت کندشونده اندازهٔ سرعت رو به کاهش است. بنابراین در بازه‌های زمانی صفر تا ۲s و ۴s تا ۶s که اندازهٔ شیب خط مماس کاهش می‌یابد، اندازهٔ سرعت نیز کاهش یافته و حرکت شتاب‌دار کندشونده است. در این صورت می‌توان گفت در بازهٔ زمانی صفر تا ۲s هم سرعت منفی است و هم حرکت شتابدار کندشونده می‌باشد.

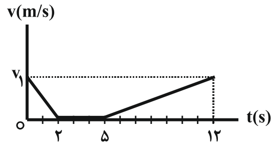


دقت کنید، در بازهٔ زمانی ۴s تا ۶s حرکت شتاب‌دار کندشونده است، اما سرعت مثبت می‌باشد.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۲۱)

-۱۷۱ (سعید نصیری)

با توجه به نمودار زیر، چون سرعت متحرک همواره نامنفی بوده، بیشترین فاصلهٔ آن از مبدأ حرکت برابر با جابه‌جایی آن است. جابه‌جایی نیز برابر با مساحت زیر منحنی سرعت – زمان است. پس:



$$d_{max} = \Delta x_{(0تا12s)} = \Delta x_{(0تا2s)} + \Delta x_{(2sتا5s)} + \Delta x_{(5sتا12s)}$$

$$\Rightarrow 63 = \left(\frac{1}{2}\times v_1 \times 2\right) + 0 + \left(\frac{1}{2}\times v_1 \times 7\right)$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{63}{4/5} = 14\frac{m}{s}$$

حال می‌توان مسافت طی شده در مرحلهٔ تندشونده (یعنی از لحظهٔ $5s$ تا $12s$) را با محاسبهٔ مساحت زیر نمودار به‌دست آورد:

$$d_{(5sتا12s)} = \frac{1}{2}\times 14\times 7 = 49m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۲ تا ۲۱)

-۱۷۲ (مصطفی کیانی)

چون شتاب حرکت جسم ثابت است، ابتدا با استفاده از رابطهٔ $\Delta x = \frac{v+v_0}{2}\Delta t$، سرعت اولیهٔ متحرک را به‌دست می‌آوریم. دقت کنید چون متحرک تغییر جهت نمی‌دهد، مسافت طی شده برابر با جابه‌جایی است.

$$\Delta x = \frac{v+v_0}{2}\Delta t \xrightarrow[\Delta t=4s]{\Delta x=28m,\, v=11\frac{m}{s}} 28 = \frac{11+v_0}{2}\times 4$$

$$\Rightarrow v_0 = 3\frac{m}{s}$$

اکنون، با استفاده از معادلهٔ سرعت می‌توان شتاب متحرک را به‌دست آورد.

$$v = at + v_0 \xrightarrow[v_0=3\frac{m}{s}]{v=11\frac{m}{s},\, t=4s} 11 = a\times 4 + 3$$

$$\Rightarrow 8 = 4a \Rightarrow a = 2\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

-۱۷۳ (امیرحسین برادران)

طبق نمودار زمانی‌که متحرک در مکان $x = -9m$ قرار دارد، سرعت آن برابر با صفر است. باتوجه به معادلهٔ سرعت – جابه‌جایی داریم:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x_1 \xrightarrow[\Delta x_1=27-(-9)=36m]{v_1=0,\, v_2=+12\frac{m}{s}} 144 - 0 = 2a\times 36$$

$$\Rightarrow a = 2\frac{m}{s^2}$$

حال با استفادهٔ دوباره از معادلهٔ سرعت – جابه‌جایی، داریم:

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a\Delta x_2 \xrightarrow[\Delta x_2=-9-0=-9m]{v_1=0,\, v_0=?,\, a=+2\frac{m}{s^2}} 0 - v_0^2 = 2\times 2\times(-9)$$

$$\Rightarrow v_0 = -6\frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

-۱۷۴ (علیرضا یاور)

برای محاسبهٔ مسافت طی شده باید تعیین کنیم که آیا در بازهٔ زمانی مشخص شده، جسم تغییر جهت می‌دهد و یا خیر. برای این کار، معادلهٔ سرعت – زمان را به‌دست آورده و آن‌را تعیین علامت می‌کنیم. در لحظه‌ای که سرعت جسم صفر می‌شود و علامت آن عوض می‌شود، متحرک تغییر جهت می‌دهد.

$$\left.\begin{matrix} x = -t^2 + 4t - 4 \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = -2\frac{m}{s^2},\, v_0 = 4\frac{m}{s},\, x_0 = -4m$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -2t + 4 = 0 \Rightarrow t = 2s$$

t(s)		2	
v	+	0	−

بنابراین در لحظهٔ $t = 2s$ جسم تغییر جهت می‌دهد. برای محاسبهٔ مسافت طی شده داریم:

$$t_0 = 0 \Rightarrow x_0 = -4m$$

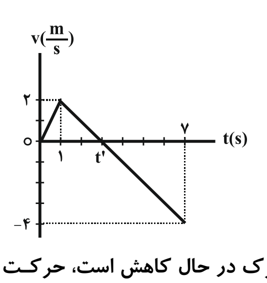
$$t_1 = 2s \Rightarrow x_1 = -2^2 + 4\times 2 - 4 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$t_2 = 4s \Rightarrow x_2 = -4^2 + 4\times 4 - 4 \Rightarrow x_2 = -4m$$

$$d = |x_1 - x_0| + |x_2 - x_1| = |0 - (-4)| + |-4 - 0| = 8m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

-۱۷۵ (محمد اکبری)



زمانی که تندی متحرک در حال کاهش است، حرکت متحرک کندشونده است. بنابراین مطابق نمودار از لحظهٔ $t = 1s$ تا t'، حرکت متحرک کندشونده است. برای محاسبهٔ t' با استفاده از تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\frac{2}{t'-1} = \frac{4}{7-t'} \Rightarrow t' = 3s$$

در بازهٔ $t = 1s$ تا $t' = 3s$ یعنی به‌مدت $2s$ حرکت متحرک کندشونده است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۲ تا ۲۱)

-۱۷۶ (مصطفی کیانی)

برای نوشتن معادلهٔ مکان – زمان، بنا به رابطهٔ $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$، باید a، v_0 و x_0 مشخص باشند، بنابراین چون v، v_0، x_0 و x مشخص‌اند، ابتدا با استفاده از معادلهٔ سرعت – جابه‌جایی، شتاب حرکت جسم را حساب می‌کنیم. دقت کنید، در لحظهٔ $t=0$، سرعت جسم برابر با v_0 می‌باشد.

$$v^2-v_0^2=2a(x-x_0)\xrightarrow[x=16m,\,x_0=12m]{v=3\frac{m}{s},\,v_0=5\frac{m}{s}}9-25=2a(16-12)$$

$$\Rightarrow -16=2a\times 4\Rightarrow a=-2\frac{m}{s^2}$$

اکنون می‌توان معادلهٔ مکان – زمان را نوشت:

$$x_0=12m\ ,\ a=-2\frac{m}{s^2}\ ,\ v_0=5\frac{m}{s}$$

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x=\frac{1}{2}(-2)t^2+5t+12$$

$$\Rightarrow x=-t^2+5t+12$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

-۱۷۷ (مصطفی کیانی)

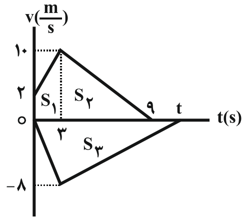
می‌دانیم مساحت سطح محصور بین نمودار $v-t$ و محور t برابر جابه‌جایی متحرک است. بنابراین کافی است مساحت سطح محصور بین هر کدام از نمودارها را حساب نموده و مساوی هم قرار دهیم. دقت کنید، چون تا لحظهٔ توقف، علامت سرعت متحرک‌ها تغییر نکرده است $(v_A>0)$ و $(v_B<0)$، متحرک‌ها تغییر جهت نداده‌اند، لذا جابه‌جایی و مسافت طی شدهٔ آنها با هم برابر است.

$$\Delta x_A=S_1+S_2=\left(\frac{2+10}{2}\times 3\right)+\left(\frac{6\times 10}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta x_A=18+30=48m$$

$$\Delta x_B=|S_3|=\left|\frac{-8\times t}{2}\right|\Rightarrow \Delta x_B=4t$$

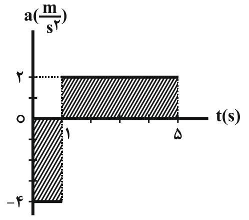
$$\Delta x_A=\Delta x_B\Rightarrow 48=4t\Rightarrow t=12s$$



با توجه به شکل، متحرک A در لحظهٔ $t=9s$ و متحرک B در لحظهٔ $t=12s$ متوقف می‌شود. بنابراین متحرک B به‌مدت $\Delta t=12-9=3s$ بعد از متحرک A متوقف می‌گردد.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۲ تا ۲۱)

-۱۷۸ (بیتا خورشید)



$$v(t=0)=+6\frac{m}{s},\Delta v(t=0\ \text{تا}\ t=1s)=-1\times 4=-4\frac{m}{s}$$

$$v(t=1s)=6-4=2\frac{m}{s}$$

$$v(t=1s)=2\frac{m}{s},\Delta v(t=1s\ \text{تا}\ t=5s)=2\times 4=8\frac{m}{s}$$

$$v(t=5s)=2+8=10\frac{m}{s}$$

- متحرک در لحظهٔ $t=0$ با سرعت $6\frac{m}{s}$ در جهت محور x از مبدأ مکان عبور کرده و تا لحظهٔ $t=1s$ سرعتش به $2\frac{m}{s}$ کاهش یافته است (حرکت کندشونده) سپس با شتاب $2\frac{m}{s^2}$ سرعتش افزایش یافته و به $+10\frac{m}{s}$ رسیده است. (حرکت تندشونده)

- سرعت متحرک به صفر نرسیده و تغییر علامت نداده است، پس تغییر جهت نداریم.

- محاسبه جابه‌جایی توسط رابطهٔ مستقل از شتاب:

$$\Delta x=\frac{v_1+v_2}{2}\times\Delta t$$

$$\Delta x_1(t=0\ \text{تا}\ t=1s)=\frac{6+2}{2}\times 1=4m$$

$$\Delta x_2(t=1s\ \text{تا}\ t=5s)=\frac{2+10}{2}\times 4=24m$$

$$\Delta x_T=\Delta x_1+\Delta x_2=4+24=28m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

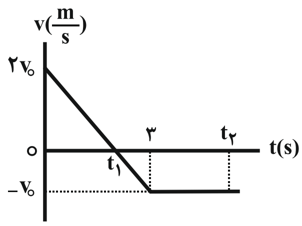
۱۷۹- (سعید شرق)

متحرک در لحظهٔ $t = ۰$ از مبدأ مکان عبور کرده است، بنابراین در لحظه‌ای که دوباره از مبدأ مکان عبور می‌کند، جابه‌جایی آن برابر با صفر می‌شود. از طرفی می‌دانیم مساحت زیر نمودار سرعت – زمان برابر با جابه‌جایی متحرک است. بنابراین ابتدا با استفاده از تشابه مثلث‌ها، لحظه‌ای که سرعت صفر می‌شود را می‌یابیم. داریم:

$$\frac{۲v_۰}{v_۰} = \frac{t_۱}{۳ - t_۱} \Rightarrow t_۱ = ۲s$$

از لحظهٔ صفر تا $t = ۲s$، نمودار سرعت - زمان بالای محور زمان است و بنابراین جابه‌جایی آن مثبت است. داریم:

$$S_۱ = \frac{۲ \times ۲v_۰}{۲} = ۲v_۰$$



از لحظهٔ $t_۱ = ۲s$ به بعد، نمودار سرعت – زمان زیر محور زمان است و بنابراین جابه‌جایی آن منفی است. اگر فرض کنیم متحرک در لحظهٔ $t_۲$ به مبدأ مکان باز می‌گردد، داریم:

$$|S_۲| = \frac{(t_۲ - t_۱) + (t_۲ - ۳)}{۲} \times v_۰$$

$$\xrightarrow{t_۱ = ۲s} |S_۲| = \frac{(t_۲ - ۲) + (t_۲ - ۳)}{۲} \times v_۰ = \frac{۲t_۲ - ۵}{۲} v_۰$$

در نتیجه داریم:

$$S_۱ = |S_۲| \Rightarrow ۲v_۰ = \frac{۲t_۲ - ۵}{۲} v_۰ \Rightarrow t_۲ = ۴/۵s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۲۱)

۱۸۰- (محمد اکبری)

چون نمودار سرعت – زمان هر دو متحرک به‌صورت خط راستی با شیب غیرصفر است، بنابراین شتاب حرکت متحرک‌های A و B ثابت است و بنابراین معادلهٔ سرعت – زمان آن‌ها به‌صورت زیر است:

$$v_A = a_A t + v_{۰_A} = ۳t + ۰ \Rightarrow v_A = ۳t$$

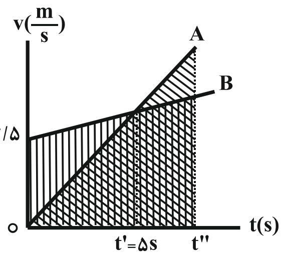
$$v_B = a_B t + v_{۰_B} = ۱/۵t + ۷/۵ \Rightarrow v_B = ۱/۵t + ۷/۵$$

در لحظه‌ای که سرعت دو متحرک برابر می‌شود، داریم:

$$v_A = v_B \Rightarrow ۳t' = ۱/۵t' + ۷/۵ \Rightarrow t' = ۵s$$

برای به‌دست آوردن لحظه‌ای که دو متحرک به‌هم می‌رسند، چون مساحت زیر نمودار سرعت – زمان برابر با جابه‌جایی متحرک است و این دو متحرک بدون تغییر جهت حرکت می‌کنند، داریم:

$$\Delta x_A = \Delta x_B \Rightarrow \frac{t'' \times ۳t''}{۲} = \frac{۷/۵ + (۱/۵t'' + ۷/۵)}{۲} t'' \Rightarrow t'' = ۱۰s$$



به عنوان تمرین، با استفاده از معادلهٔ مکان – زمان دو متحرک A و B، لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند را محاسبه کنید.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

فیزیک ۱

۱۸۱- *(میثم دشتیان)*

شیشه یک جامد بی‌شکل است.

گزینهٔ «۱» درست: در جامدات (از جمله شیشه)، ذرات به سبب نیروهای الکتریکی وارد بر یکدیگر در کنار هم می‌مانند.

گزینهٔ «۲» درست: جامدات آمورف (یا بی‌شکل) از سردسازی سریع حالت مایع آن به‌دست می‌آیند.

گزینهٔ «۳» نادرست: در جامدات، ذرات سازنده، در فواصل معین و تقریباً ثابتی نسبت به یکدیگر قرار گرفته‌اند و در این مکان‌ها حرکت‌های ارتعاشی انجام می‌دهند.

گزینهٔ «۴» درست: مولکول‌های یک مادهٔ جامد، مثل گلوله‌هایی هستند که با یک سری فنر به یکدیگر متصل شده‌اند. زمانی که آن‌ها را از وضع تعادل خود دورتر یا نزدیک‌تر کنیم، نیروهایی بین آنها ایجاد شده که می‌خواهند آن‌ها را مجدداً به وضعیت تعادل خود باز گردانند.

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحهٔ ۶۲)

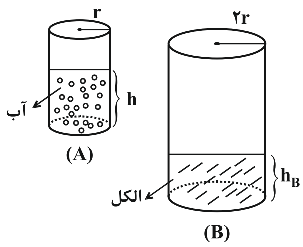
۱۸۲- *(بابک اسلامی)*

نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های جیوه بیشتر از نیروی دگرچسبی بین مولکول‌های جیوه و شیشه است، بنابراین سطح جیوه در لولهٔ مویین پایین‌تر از سطح آزاد جیوه در ظرف قرار می‌گیرد.

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۶۸ تا ۷۲)

۱۸۳- *(عبدالرضا امینی‌نسب)*

مطابق شکل زیر، ابتدا باید حساب کنیم ارتفاع الکل در ظرف B چند برابر ارتفاع آب در ظرف A می‌باشد. برای این کار داریم:



$$V_A = V_B \Rightarrow \pi r_A^2 h_A = \pi r_B^2 h_B \xrightarrow{r_B = 2r_A}$$

$$r_A^2 h_A = 4 r_A^2 h_B \Rightarrow h_B = \frac{h_A}{4}$$

از طرفی فشار ناشی از مایعات در کف ظرف از رابطهٔ $P = \rho gh$ محاسبه می‌شود. داریم:

$$P = \rho gh \Rightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{\rho_A}{\rho_B} \times \frac{h_A}{h_B} = \frac{1}{0/8} \times 4 = 5$$

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۷۲ تا ۸۰)

۱۸۴- *(علیرضا مقصودی)*

فشار وارد بر سطح مقطع لولهٔ باریک برابر است با:

$$\Delta P_1 = \frac{F_1}{A_1} \Rightarrow \Delta P_1 = \frac{20}{A_1}$$

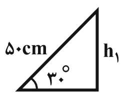
طبق اصل پاسکال این فشار به کف ظرف منتقل می‌شود، بنابراین افزایش نیروی وارد بر کف ظرف برابر است با:

$$\Delta F_2 = \Delta P_1 A_2 \Rightarrow \Delta F_2 = \frac{20}{A_1} \times A_2 = \frac{20}{A_1} \times 10A_1 \Rightarrow \Delta F_2 = 200N$$

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۷۲ تا ۷۷)

۱۸۵- *(میثم دشتیان)*

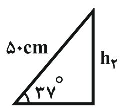
در حالت اول ارتفاع عمودی لوله را چنین می‌توان به‌دست آورد:



$$\sin 30^\circ = \frac{h_1}{50} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h_1}{50} \Rightarrow h_1 = 25cm$$

چون فشار هوا $75cmHg$ است پس فشاری به اندازهٔ $75 - 25 = 50cmHg$ از طرف جیوه بر انتهای بستهٔ لوله در حالت اول وارد می‌شود.

در حالت دوم، زاویهٔ سطح جیوه و لوله به 37° می‌رسد، پس می‌توان نوشت:



$$\sin 37^\circ = \frac{h_2}{50} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{h_2}{50} \Rightarrow h_2 = 30cm$$

بنابراین در این حالت، فشاری معادل $75 - 30 = 45cmHg$ از طرف جیوه بر انتهای بستهٔ لوله وارد می‌شود.

پس چون فشار وارده کاهش یافته، نیروی وارده نیز کاهش می‌یابد. اگر اندازهٔ کاهش فشار را با $|\Delta P|$ نمایش دهیم، داریم:

$$|\Delta P| = 5cmHg$$

$$|\Delta P| = (\rho gh)_{\text{جیوه}} = 13/6 \times 10^3 \times 10 \times 5 \times 10^{-2} = 6800Pa$$

$$|\Delta F| = |\Delta P|.A = 6800 \times 10 \times 10^{-4} = 6/8N$$

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۷۲ تا ۸۰)

۱۸۶- *(سیاوش فارسی)*

نیروی وارد بر کف ظرف ناشی از فشار کل وارد بر کف ظرف است. بنابراین داریم:

$$F = PA \Rightarrow ۳۴۰ = P \times ۱۰۰ \times ۱۰^{-۴} \Rightarrow P_{\text{کل}} = ۳۴۰۰۰Pa$$

حال فشار بر حسب سانتی‌متر جیوه را به‌دست می‌آوریم:

$$P_{\text{کل}} = \rho_{Hg} g h_{Hg} \Rightarrow ۳۴۰۰۰ = ۱۳۶۰۰ \times ۱۰ \times h_{Hg}$$

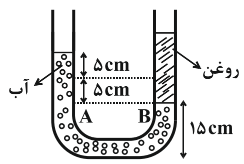
$$\Rightarrow h_{Hg} = ۰/۲۵m = ۲۵cm$$

$$P_{\text{کل}} = P_{\text{گاز}} + P_{\text{مایع}} \Rightarrow ۲۵ = P_{\text{گاز}} + (۱۲+۸) \Rightarrow P_{\text{گاز}} = ۵cmHg$$

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۷۲ تا ۸۰)

۱۸۷- *(زهره آقامحمدی)*

پس از ریختن روغن در شاخهٔ سمت راست شکل به‌صورت زیر در می‌آید. نقاط A و B نقاط هم‌تراز داخل یک مایع ساکن هستند، پس هم‌فشارند.



$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_{\text{آب}} h_{\text{آب}} = \rho_{\text{روغن}} h_{\text{روغن}}$$

$$\Rightarrow ۱ \times ۱۰ = ۰/۸ \times h_{\text{روغن}} \Rightarrow h_{\text{روغن}} = ۱۲/۵cm$$

فاصله سطح بالایی روغن تا پایین برابر خواهد شد با:

$$۱۲/۵ + ۱۵ = ۲۷/۵cm$$

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۷۲ تا ۸۰)

۱۸۸- *(سعید نصیری)*

چون پیستون‌ها در یک تراز افقی قرار دارند، می‌توان نوشت:

$$\frac{F_۱}{A_۱} = \frac{F_۲}{A_۲} \xrightarrow{F_۱=f,F_۲=mg} mg = \frac{A_۲}{A_۱} \times f \qquad (۱)$$

در حالت دوم که نیروی f، ده درصد افزایش می‌یابد، داریم:

$$f' = f + \frac{۱۰}{۱۰۰} f = ۱/۱f$$

چون در حالت دوم هم پیستون‌ها هم‌تراز هستند، داریم:

$$\frac{F'_۱}{A_۱} = \frac{F'_۲}{A_۲} \xrightarrow{F'_۱=۱/۱f,F'_۲=m'g} m'g = \frac{A_۲}{A_۱} \times (۱/۱)f \qquad (۲)$$

با تقسیم رابطه (۲) به (۱) داریم:

$$\frac{m'g}{mg} = \frac{\frac{A_۲}{A_۱} \times ۱/۱f}{\frac{A_۲}{A_۱} \times f} = ۱/۱ \Rightarrow m'g = ۱/۱mg \Rightarrow m' = ۱/۱m$$

$$\Rightarrow m' = ۱/۱ \times ۲۰ = ۲۲kg$$

پس مقدار افزایش جرم (یا جرم وزنه‌ای که باید روی m قرار دهیم) برابر است با:

$$m' - m = ۲۲ - ۲۰ = ۲kg$$

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۷۲ تا ۸۰)

۱۸۹- *(بابک اسلامی)*

در حالت اول، نیروسنج وزن جسم و در حالت دوم وزن جسم غوطه‌ور در مایع را نشان می‌دهد. طبق اصل ارشمیدس، مایع نیرویی بالاسو به جسم وارد کرده است که اندازهٔ آن با وزن شارهٔ جابه‌جا شده برابر است، بنابراین داریم:

وزن شارهٔ جابه‌جا شده: $W' = ۲۲/۱۲۸ - ۲۱/۸۷۲ = ۰/۲۵۶N$

جرم شارهٔ جابه‌جا شده: $m = \frac{W'}{g} = \frac{۰/۲۵۶}{۱۰} = ۲۵۶ \times ۱۰^{-۴}kg = ۲۵/۶g$

حال چگالی مایع را محاسبه می‌کنیم:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{۲۵/۶}{۳۲} = ۰/۸ \frac{g}{cm^۳}$$

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۸۰ تا ۸۵)

۱۹۰- *(بابک اسلامی)*

با استفاده از تعریف آهنگ جریان شاره، داریم:

$$\text{آهنگ جریان شاره} = \frac{\text{حجم شاره}}{\text{زمان}} = Av$$

$$\Rightarrow \frac{\pi R^۲ h}{t} = Av \Rightarrow \frac{۳ \times \left(\frac{۱/۵}{۲}\right)^۲ \times ۴}{t} = ۴۵ \times ۱۰^{-۴} \times ۰/۵$$

$$\Rightarrow t = ۳۰۰۰s = ۵۰min$$

(فیزیک ۱- ویژگی‌های فیزیکی مواد: صفحه‌های ۸۵ تا ۸۹)

فیزیک ۲

۱۹۱- *(حامد خسروی)*

با دو برابر کردن فاصلهٔ بین دو صفحهٔ یک خازن تخت، طبق رابطهٔ $C = \kappa\varepsilon_0 \frac{A}{d}$، ظرفیت آن نصف می‌شود. بنابراین داریم:

$$Q_2 - Q_1 = -3\mu C$$

$$\Rightarrow C_2V - C_1V = -3\mu C \xrightarrow{C_2=\frac{C_1}{2}} \frac{C_1}{2}V - C_1V = -3\mu C$$

$$\Rightarrow C_1V = 6\mu C \xrightarrow{V=20V} C_1 = 0.3\mu F$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۷)

۱۹۲- *(حامد خسروی)*

ابتدا اختلاف پتانسیل دو سر خازن را محاسبه می‌کنیم:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{96}{4} \Rightarrow V = 24V$$

با توجه به این‌که میدان الکتریکی داخل خازن یکنواخت است، می‌توان نوشت:

$$E = \frac{\Delta V}{d} \Rightarrow \frac{V_+ - V_-}{d} = \frac{V_B - V_A}{d - \frac{d}{3} - \frac{d}{4}} \Rightarrow \frac{24}{d} = \frac{V_B - V_A}{\frac{5}{12}d}$$

$$\Rightarrow V_B - V_A = 10V$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴)

۱۹۳- *(مصطفی کیانی)*

ابتدا رابطهٔ بین میدان الکتریکی و چگالی سطحی بار الکتریکی را با استفاده از رابطه‌های $Q = CV$، $\sigma = \frac{Q}{A}$، $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ و $E = \frac{V}{d}$ به‌دست می‌آوریم:

$$E = \frac{V}{d} \xrightarrow{V=\frac{Q}{C}} E = \frac{Q}{Cd} \xrightarrow[Q=\sigma A]{C=\varepsilon_0\frac{A}{d}} E = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0 \frac{A}{d} \times d}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \xrightarrow[\varepsilon_0=9\times10^{-12}\frac{F}{m}]{\sigma=9\times10^{-6}\frac{C}{m^2}} E = \frac{9\times10^{-6}}{9\times10^{-12}} \Rightarrow E = 10^{6}\frac{N}{C}$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۳۲ تا ۳۷)

۱۹۴- *(خسرو ارغوانی‌فرد)*

ظرفیت خازن تغییری نمی‌کند و چون اختلاف پتانسیل دو سر خازن افزایش یافته است، بنابراین بار الکتریکی ذخیره شده در آن نیز افزایش می‌یابد. داریم:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow \frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q_2}{V_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q_1 + 30}{V_1 + 7.5}$$

$$\Rightarrow Q_1V_1 + 7.5Q_1 = Q_1V_1 + 30V_1 \Rightarrow \frac{Q_1}{V_1} = 4 \Rightarrow C = 4\mu F$$

از طرف دیگر داریم:

$$U_2 = U_1 + 187.5 \Rightarrow \frac{Q_2^2}{2C} = \frac{Q_1^2}{2C} + 187.5$$

$$\Rightarrow \frac{Q_2^2}{2\times4} = \frac{(Q_2 - 30)^2}{2\times4} + 187.5 \Rightarrow Q_2 = 40\mu C$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۳۲ تا ۴۰)

۱۹۵- *(مصطفی کیانی)*

ابتدا انرژی و بار خازن را در حالت اول (قبل از جدا کردن از مولد) حساب می‌کنیم:

$$Q_1 = CV \xrightarrow[V=10V]{C=6\mu F} Q_1 = 6\times10 = 60\mu C$$

$$U_1 = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\times6\times100 \Rightarrow U_1 = 300\mu J$$

وقتی خازن از مولد جدا شود، بار الکتریکی آن ثابت می‌ماند. بنابراین در حالت دوم بار خازن $Q_2 = 60\mu C$ است. در این حالت کافی است ظرفیت خازن را با وارد کردن دی‌الکتریک حساب کنیم و از رابطهٔ $U = \frac{Q^2}{2C}$ انرژی خازن را به‌دست آوریم و تغییر آن‌را تعیین نماییم.

$$C = \kappa\varepsilon_0\frac{A}{d} \xrightarrow[d=\text{ثابت}]{A=\text{ثابت}} \frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \xrightarrow[\kappa_1=1]{\kappa_2=2, C_1=6\mu F} \frac{C_2}{6} = \frac{2}{1}$$

$$\Rightarrow C_2 = 12\mu F$$

$$U_2 = \frac{Q_2^2}{2C_2} = \frac{60\times60}{2\times12} \Rightarrow U_2 = 150\mu J$$

می‌بینیم انرژی خازن از $U_1 = 300\mu J$ به $U_2 = 150\mu J$ تغییر کرده است. بنابراین انرژی خازن $150\mu J$ کم‌تر شده است.

$$\Delta U = 150 - 300 \Rightarrow \Delta U = -150\mu J$$

(فیزیک ۲- الکتریسیتهٔ ساکن: صفحه‌های ۳۲ تا ۴۰)

-۱۹۶ (بابک اسلامی)

در یک سیم که اختلاف پتانسیل دو سر آن صفر است، الکترون‌های آزاد با تندی‌هایی از مرتبهٔ $10^6 \frac{m}{s}$ در حرکتند و زمانی‌که به دو سر سیم اختلاف پتانسیل اعمال می‌کنیم، الکترون‌ها حرکت کاتوره‌ای خود را کمی تغییر می‌دهند و با سرعتی متوسط به نام سرعت سوق که بزرگی آن از مرتبهٔ $1\frac{mm}{s}$ است در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت می‌کنند، بنابراین:

$$\frac{10^6 \frac{m}{s}}{1\frac{mm}{s}} = 10^6 \frac{m}{mm} = 10^6 \times 10^3 \frac{mm}{mm} = 10^9$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی: صفحه‌های ۴۶ و ۴۷)

-۱۹۷ (بابک اسلامی)

طبق رابطهٔ $\Delta q = I\Delta t$، اگر جریان بر حسب میلی‌آمپر و زمان بر حسب ساعت باشد، بار الکتریکی بر حسب mAh خواهد بود. داریم:

$$\Delta q = I\Delta t \Rightarrow 4\times10^3 = 5\times10^4 \times 10^{-3}\Delta t \Rightarrow \Delta t = 80h$$

$$\Rightarrow \Delta t = 80\times60 = 4800 min$$

بار الکتریکی شارش شده در مدار برابر با بار الکتریکی ذخیره شده در باتری است. داریم:

$$\Delta q = 4000 mAh = 4000\times10^{-3}(A)\times3600(s) = 14/4\times10^3 As$$

$$\Rightarrow \Delta q = 14/4\times10^3 C \Rightarrow \Delta q = 14/4\times10^9 \mu C$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی: صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

-۱۹۸ (بابک اسلامی)

با استفاده از رابطهٔ تغییرات مقاومت الکتریکی یک سیم با تغییرات دمای آن، داریم:

$$T_1 = 273K \ , \ T_2 = 100^\circ C = 373K$$

$$\rho = \rho_0[1+\alpha\Delta T] \xrightarrow{R=\rho\frac{L}{A}} R = R_0[1+\alpha\Delta T]$$

$$\Rightarrow \frac{R}{R_0} = 1+\alpha\Delta T = 1+4/3\times10^{-3}\times(373-273) = 1/43$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی: صفحه‌های ۵۲ تا ۵۴)

-۱۹۹ (بابک اسلامی)

چون مقاومت ترکیبی نوار چهارم را ندارد، بنابراین تلرانس آن ۲۰ درصد است. برای خواندن حلقه‌های رنگی، مقاومت را طوری در دست می‌گیریم که نوار چهارم و یا محل آن در سمت راست قرار گیرد. داریم:

$$R = \overline{ab}\times10^n = 25\times10^3\Omega = 25k\Omega$$

تلرانس $= 0/2\times25 = 5k\Omega$

$$\Rightarrow 20k\Omega \le R \le 30k\Omega$$

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی: صفحه‌های ۵۷ و ۵۸)

-۲۰۰ (بابک اسلامی)

در مقاومت‌های نوری (LDR)، مقاومت الکتریکی به نور تابیده شده به آن بستگی دارد، به‌طوری که با افزایش شدت نور، از مقاومت الکتریکی آن کاسته می‌شود. در مقاومت‌های نوری که از جنس نیم‌رسانای خالص هستند، با افزایش شدت نور بر تعداد حامل‌های بار الکتریکی افزوده می‌شود و در نتیجه از مقاومت الکتریکی آن کاسته می‌شود.

(فیزیک ۲- جریان الکتریکی: صفحه‌های ۵۸ تا ۶۱)

شیمی ۳

۲۰۱- *(محمد وزیری)*

تعداد مول اتم‌های موجود در یک گرم اتیلن گلیکول با فرمول $C_2H_6O_2$، بیشتر از اوره با فرمول $CO(NH_2)_2$ است.

$$1gC_2H_6O_2 \times \frac{1mol}{62g} \times \frac{10\,mol\,atom}{1mol} = \frac{10}{62} \simeq 0/16\,mol\,atom$$

$$1gCO(NH_2)_2 \times \frac{1mol}{60g} \times \frac{8\,mol\,atom}{1mol} = \frac{8}{60} \simeq 0/13\,mol\,atom$$

(شیمی ۳، صفحه‌های ۴ و ۵)

۲۰۲- *(مهدی شریفی)*

عبارت‌های الف، ب و پ درست هستند.

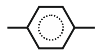
امید به زندگی در مناطق توسعه‌یافته و برخوردار، بیشتر از مناطق کم‌برخوردار است.

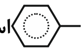
(شیمی ۳، صفحه‌های ۱ تا ۳)

۲۰۳- *(محمد وزیری)*

پاک‌کننده‌های صابونی بر خلاف پاک‌کننده‌های غیر صابونی، ترکیباتی غیرآروماتیک هستند و در آب‌های سخت خاصیت پاک‌کنندگی خود را از دست می‌دهند. ساختار آن‌ها با فرض این که بخش کاتیونی هر دو پاک‌کننده، یون سدیم باشد، به صورت زیر است:

پاک‌کننده‌های صابونی: $C_nH_{2n+1}COO^-Na^+$

پاک‌کننده‌های غیر صابونی: $C_nH_{2n+1}-$  $-SO_3^-Na^+$

با فرض برابر بودن تعداد اتم‌های کربن زنجیر هیدروکربنی (C_nH_{2n+1})، اختلاف جرم مولی آن‌ها به اندازهٔ اختلاف جرم مولی COO^- و  $-SO_3^-$ است که بیشتر از ۳۶ گرم بر مول می‌باشد.

(شیمی ۳، صفحه‌های ۶، ۹ و ۱۰)

۲۰۴- *(دانیال مهرعلی)*

منظور از ترکیبی با فرمول مولکولی $C_{57}H_{104}O_6$، روغن زیتون است که از جمله موادی است که می‌تواند در واکنش با سدیم هیدروکسید، صابون جامد را تولید کند.

(شیمی ۳، صفحه‌های ۵ و ۶)

۲۰۵- *(حامد پویان‌نظر)*

فقط عبارت «الف» درست است.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت «ب»: صابون‌ها در آب حاوی یون‌های منیزیم و کلسیم نسبت به آب مقطر کمتر کف کرده و قدرت پاک‌کنندگی آنها کاهش می‌یابد.

عبارت «پ»: رسوب ایجاد شده $(RCOO)_2Mg$ می‌باشد.

عبارت «ت»: با توجه به اینکه میزان منیزیم و کلسیم موجود در آب دریا مشخص نیست و دما نیز یکسان نمی‌باشد، نمی‌توان مقایسهٔ دقیقی بین آن دو انجام داد.

(شیمی ۳، صفحه‌های ۸ و ۹)

۲۰۶- *(محمد کوهستانیان)*

افزایش SO_3 و CO_2 به آب باعث افزایش یون هیدرونیوم و تشکیل سولفوریک اسید و کربنیک اسید می‌شود.

(شیمی ۳، صفحهٔ ۱۶)

۲۰۷- *(محمد کوهستانیان)*

$$HF(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + F^-(aq) \qquad [H^+] = [F^-]$$

$$K = \frac{[H^+][F^-]}{[HF]} \Rightarrow 5\times10^{-7} = \frac{[H^+][F^-]}{0/5}$$

$$\Rightarrow 5\times10^{-7} = \frac{[H^+]^2}{0/5} \Rightarrow [H^+]^2 = 5\times10^{-7}\times0/5$$

$$\Rightarrow [H^+] = 5\times10^{-4}\,\frac{mol}{L}$$

(شیمی ۳، صفحهٔ ۲۲)

۲۰۸- *(سعید محسن‌زاده)*

شکل (۱) انحلال اکسیدی نافلزی در آب است که باعث می‌شود محیط آب اسیدی شود.

شکل (۲) محلولی از الکترولیت قوی است، اما HF یک اسید ضعیف است و رسانایی الکتریکی کمی دارد.

(شیمی ۳، صفحه‌های ۱۶ تا ۱۹)

۲۰۹- *(محمد وزیری)*

به فرایندی که در آن یک ترکیب مولکولی در آب به یون‌های مثبت و منفی تبدیل می‌شود، یونش می‌گویند؛ بنابراین استفاده از لفظ یونش برای ترکیب یونی منیزیم هیدروکسید اشتباه است.

(شیمی ۳، صفحه‌های ۱۸ تا ۲۱)

۲۱۰- *(محمد وزیری)*

HF اسیدی ضعیف است که در آب، هم به‌صورت یونی و هم به‌صورت مولکولی حل می‌شود. با فرض اینکه تعداد x مولکول HF به‌صورت یونی در آب حل شود، داریم:

$$HF\begin{cases} \xrightarrow[x]{\text{یونی}} \underset{x}{H^+}(aq) + \underset{x}{F^-}(aq) \\ \xrightarrow[200-x]{\text{مولکولی}} \underset{200-x}{HF}\,(aq) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 200 - x + x + x = 260 \Rightarrow x = 60 \Rightarrow \alpha = \frac{60}{200} = 0/3$$

(شیمی ۳، صفحهٔ ۱۸)

شیمی ۱

۲۱۱- *(سیدعلی ناظمی)*

گزینهٔ «۱»: مدل اتمی بور، فقط قادر به توجیه طیف نشری خطی اتم هیدروژن می‌باشد.

گزینهٔ «۲»: هرچه انرژی دریافت شده توسط الکترون در هنگام برانگیخته شدن بیشتر باشد، الکترون به لایه‌های بالاتری صعود می‌کند. در نتیجه در هنگام بازگشت به حالت پایه، انرژی بیشتری را به شکل نشر نور آزاد می‌کند. یعنی انرژی پرتوهای نشر شده بیشتر می‌شود و چون انرژی با طول موج رابطهٔ عکس دارد، نور با طول موج کوتاه‌تری منتشر می‌شود.

گزینهٔ «۳»: هنگامی که به اتم‌های گازی هر عنصر (نه هر حالت فیزیکی دیگر!) انرژی می‌دهیم، الکترون‌ها از لایه‌ای به لایهٔ بالاتر منتقل می‌شوند.

گزینهٔ «۴»: در نتیجهٔ جابه‌جایی الکترون بین لایه‌های مختلف الکترونی، انرژی با طول موج معین جذب یا نشر می‌گردد.

(شیمی ۱، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۷)

۲۱۲- *(مریم اکبری)*

آرایش الکترونی عناصر مس و اسکاندیم به صورت زیر است:

$_{29}Cu: 1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,3d^{10}\,4s^1$

$_{21}Sc: 1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,3d^1\,4s^2$

$l=2$ مربوط به زیرلایهٔ d و $l=1$ مربوط به زیرلایهٔ p است. همچنین تعداد الکترون‌های لایهٔ ظرفیت $_{21}Sc$ برابر ۳ می‌باشد.

(شیمی ۱، صفحه‌های ۲۸ تا ۳۴)

۲۱۳- *(مهدی محمدی)*

$_{33}As: 1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,3d^{10}\,4s^2\,4p^3$

$_{21}Sc: 1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^6\,3d^1\,4s^2$

با توجه به آرایش‌های الکترونی نوشته شده، فقط عبارت (ت) درست است.

(شیمی ۱، صفحه‌های ۲۸ تا ۳۴)

۲۱۴- *(علی افتقاری)*

$$\begin{cases} _{13}Al: [_{10}Ne]3s^2 3p^1 \rightarrow 3 \\ _{39}Y: [_{36}kr]4d^1 5s^2 \rightarrow 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} _{42}Mo: [_{36}Kr]4d^5 5s^1 \rightarrow 6 \\ _{34}Se: [_{18}Ar]3d^{10} 4s^2 4p^4 \rightarrow 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} _{25}Mn: [_{18}Ar]3d^5 4s^2 \rightarrow 7 \\ _{53}I: [_{36}Kr]4d^{10} 5s^2 5p^5 \rightarrow 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} _{23}V: [_{18}Ar]3d^3 4s^2 \rightarrow 5 \\ _{45}Rh: [_{36}Kr]4d^7 5s^2 \rightarrow 9 \end{cases}$$

(شیمی ۱، صفحه‌های ۲۸ تا ۳۴)

۲۱۵- *(مریم اکبری)*

این عنصر ۶ الکترون ظرفیتی دارد و از آنجایی که جزو عناصر دستهٔ p است، در گروه ۱۶ جدول تناوبی قرار دارد و با آهن که در دورهٔ چهارم است، هم‌دوره می‌باشد.

(شیمی ۱، صفحه‌های ۳۰ تا ۳۸)

۲۱۶- *(محمد کوهستانیان)*

گاز کلر از مولکول‌های دو اتمی Cl_2 تشکیل شده است و خاصیت رنگ‌بری و گندزدایی دارد.

(شیمی ۱، صفحه‌های ۳۸ تا ۴۱)

۲۱۷- *(حسن لشکری)*

گاز آرگون به تنهایی ۰/۹۲۸ درصد حجم هوا را تشکیل می‌دهد.

(شیمی ۱، صفحه‌های ۴۹ و ۵۱)

۲۱۸- *(حسن لشکری)*

با افزایش ارتفاع فشار تقریباً به طور منظم کاهش می‌یابد (نمودار «ت»). ولی دما نامنظم تغییر می‌کند (نمودار «الف»).

(شیمی ۱، صفحهٔ ۴۷)

۲۱۹- *(میکائیل غراوی)*

از گاز نیتروژن، برای پر کردن تایر خودروها، در صنعت سرماسازی برای انجماد مواد غذایی و برای نگهداری نمونه‌های بیولوژیک در پزشکی استفاده می‌شود. همچنین برای بسته‌بندی برخی مواد خوراکی از گاز نیتروژن استفاده می‌شود.

(شیمی ۱، صفحه‌های ۴۸ تا ۵۱)

۲۲۰- *(حسن لشکری)*

کاهش دما در تروپوسفر $= 11km \times 6 = 66^\circ C$

افزایش دما در استراتوسفر $= 29km \times 1/6 = 46/4^\circ C$

تغییر دما دراثر افزایش ارتفاع : $46/4 - 66 = -19/6^\circ C$

دما در سطح زمین ۱۴ درجه است، بنابراین دما در نهایت در ارتفاع $40km$ حدود ۵/۶- درجهٔ سانتیگراد خواهد بود.

(شیمی ۱، صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

شیمی ۲

۲۲۱- *(سید محمد معروفی)*

نفت خام مخلوطی از هیدروکربن‌ها است.

(شیمی ۲، صفحه‌های ۲۸ و ۲۹)

۲۲۲- *(محمدامین معنوی)*

موارد «ب» و «پ» صحیح هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

«الف»: عنصر کربن در خانهٔ ششم جدول دوره‌ای جای داشته و در لایهٔ ظرفیت خود، ۴ الکترون دارد.

«ت»: اتم کربن برای رسیدن به آرایش هشت‌تایی می‌تواند دو پیوند یگانه و یک پیوند دوگانه، یا یک پیوند سه‌گانه و یک پیوند یگانه با اتم‌های دیگر بدهد.

(شیمی ۲، صفحهٔ ۳۰)

۲۲۳- *(سیدمحمد معروفی)*

ویژگی‌های چسبندگی و نقطهٔ جوش با افزایش تعداد کربن آلکان‌ها، افزایش می‌یابد و ویژگی‌های فراریت و تمایل به جاری شدن با افزایش تعداد کربن، کاهش می‌یابند.

(شیمی ۲، صفحه‌های ۳۴ و ۳۵)

۲۲۴- *(سیدمحمد معروفی)*

نام ساختارهای الف و ت، ۳-اتیل-۲، ۵ - دی‌متیل هگزان است.

نام ساختار ب، ۲، ۳، ۳، ۴ - ترا متیل هگزان است.

نام ساختار پ، ۲، ۳، ۳، ۶ - ترا متیل هپتان است.

(شیمی ۲، صفحه‌های ۳۶ تا ۳۹)

۲۲۵- *(محمد وزیری)*

نفت سبک کشورهای عربی همانند نفت سنگین آن‌ها، درصد برابری از بنزین و گازوئیل را دارا می‌باشد.

(شیمی ۲، صفحه‌های ۳۲ تا ۴۳)

۲۲۶- *(محمدامین معنوی)*

آلکین‌ها واکنش‌پذیری زیادی دارند و با مواد شیمیایی مختلف واکنش می‌دهند.

(شیمی ۲، صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

۲۲۷- *(مهسا دوستی)*

عبارت‌های «الف» و «ب» درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت «پ»: بیشترین سرانهٔ مصرف مواد خوراکی در ایران، مربوط به نان است.

عبارت «ت»: گوشت قرمز و ماهی علاوه بر پروتئین، غنی از انواع ویتامین و مواد معدنی نیز هستند.

(شیمی ۲، صفحه‌های ۵۰ و ۵۱)

۲۲۸- *(مینا شرافتی‌پور)*

الف) یکای رایج دما درجهٔ سلسیوس است که با نماد «$^\circ C$» نشان داده می‌شود.

ب) دما معیاری برای توصیف میانگین انرژی جنبشی ذرات سازندهٔ یک ماده است.

پ) با تغییر حالت فیزیکی یک ماده، جرم آن تغییر نمی‌کند. جرم و دما از عوامل مؤثر بر انرژی گرمایی هستند، بنابراین فقط یکی از عوامل مؤثر بر انرژی گرمایی (دما) تغییر می‌کند.

ت) نمونه‌ای با دمای کمتر در صورت داشتن جرم بیشتر می‌تواند انرژی گرمایی بیشتری داشته باشد.

(شیمی ۲، صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵)

۲۲۹- *(مهسا دوستی)*

میانگین تندی ذره‌ها فقط به دما و انرژی گرمایی به دما و تعداد ذره‌ها بستگی دارد.

(شیمی ۲، صفحه‌های ۵۴ و ۵۵)

۲۳۰- *(مینا شرافتی‌پور)*

فرض می‌کنیم xg طلا و yg نقره داریم:

$$Q = mc_{Au}\Delta\theta + mc_{Ag}\Delta\theta$$

$$\Rightarrow Q = x \times ۰/۲۴ \times ۱۰ + y \times ۰/۱۲ \times ۱۰$$

$$\Rightarrow ۱۹/۲ = ۲/۴x + ۱/۲y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = ۱۲ \\ ۲/۴x + ۱/۲y = ۱۹/۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \\ y = ۸ \end{cases}$$

$$\text{درصد جرمی طلا} = \frac{۴}{۱۲} \times ۱۰۰ \simeq ۳۳/۳۳\%$$

(شیمی ۲، صفحه‌های ۵۶ تا ۵۸)