بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی پایه

دورهٔ پیش‌دانشگاهی

رشتهٔ علوم انسانی

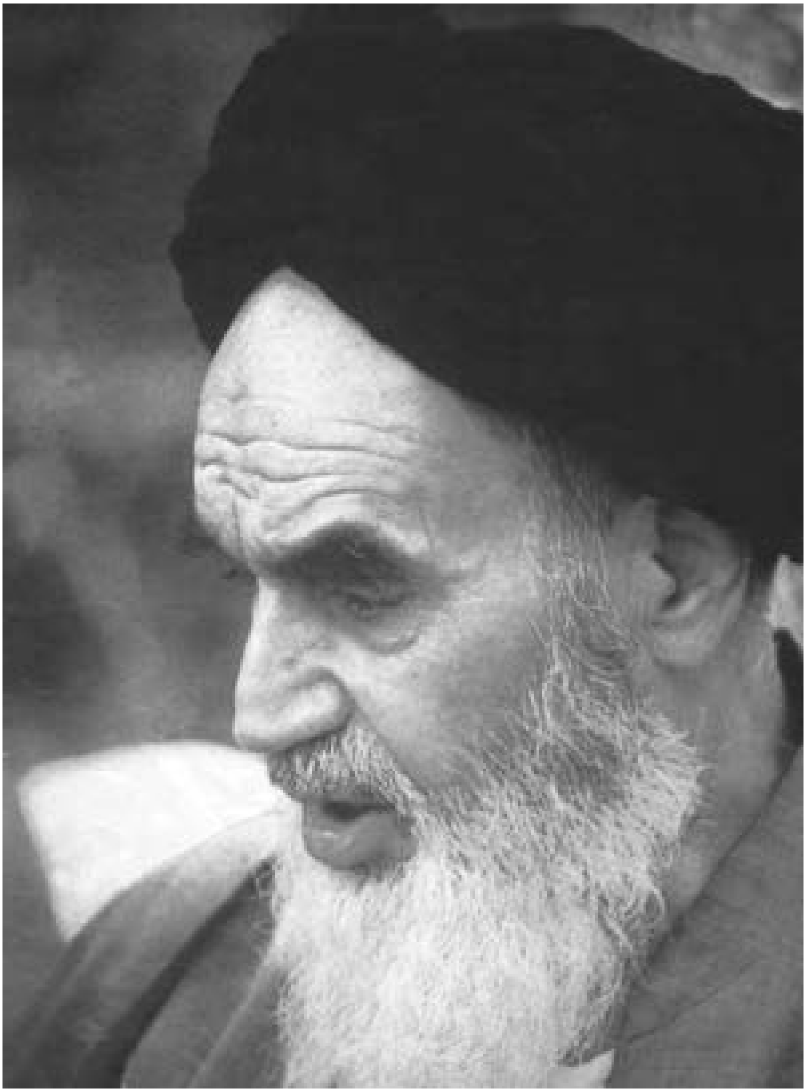
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب :	ریاضی پایه دورهٔ پیش‌دانشگاهی ـ ۲۹۲/۲
پدیدآورنده :	سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف :	دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف :	یحیی تابش، محمّدحسن بیژن‌زاده، امیر نادری، حمیده داریوش همدانی و جواد حاجی‌بابایی (اعضای شورای برنامه‌ریزی) زهرا گویا، مریم گویا، بیژن ظهوری زنگنه، جواد حاجی‌بابایی و روح‌الله جهانی‌پور (اعضای گروه تألیف)
مدیریت آماده‌سازی هنری :	ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی :	لیدا نیک‌روش (مدیر امور فنی و چاپ) ـ علیرضا رضائی‌کُر (طراح جلد) ـ طرفه سهائی (صفحه‌آرا)
نشانی سازمان :	تهران : خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی) تلفن : ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
ناشر :	شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران : تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن : ۵ ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵
چاپخانه :	شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ :	چاپ بیست و سوم ۱۳۹۶

برای دریافت فایل pdf کتاب‌های درسی به پایگاه کتاب‌های درسی به نشانی www.chap.sch.ir و برای خرید کتاب‌های درسی به سامانه فروش و توزیع مواد آموزشی به نشانی www.irtextbook.ir یا www.irtextbook.com مراجعه نمایید.

شابک ۶-۲-۰۱۰۲-۰۵-۹۶۴ ISBN 964-05-0102-6

۱۳۹۶



اگر بخواهید عزیز و سربلند باشید باید از سرمایه‌های عمر و استعداد جوانی استفاده کنید و با اراده و عزم راسخ خود به‌طرف علم و عمل و کسب دانش و بینش حرکت نمایید که زندگی زیر چتر علم و آگاهی آن‌قدر شیرین و انس با کتاب و قلم و اندوخته‌ها آن‌قدر خاطره‌آفرین و پایدار است که همهٔ تلخی‌ها و ناکامی‌های دیگر را از یاد می‌برد.

امام خمینی (ره)

فهرست مطالب

پیشگفتار

به نام خداوند لوح و قلم   حقیقت نگار وجود و عدم

در آستانه‌ی ورود به قرن بیست و یکم، هدف اصلی آموزش ریاضی ایجاد توانایی استدلال، حل مسأله، ارتباطات و هم‌چنین، تلفیق مقوله‌های مختلف ریاضی و ارتباط آن‌ها با سایر مقولات است. ریاضی اقیانوس بیکران و به هم پیوسته‌ای است که نه فقط ریاضیدان‌ها، بلکه هر کس و هر شاخه‌ی تحصیلی به گونه‌ای تشنه‌ی آن است و نیاز به جرعه‌ای دارد.

آب دریا را اگر نتوان کشید   هم به قدر تشنگی باید چشید

در دنیای پیشرفته و پیچیده‌ی کنونی که همراه با تحولات تکنولوژی، تمامی کشورها به‌نوعی به هم پیوند خورده‌اند این تشنگی به‌خصوص بیشتر محسوس است. امروزه نقش ریاضیات در آموزش انسان‌ها امری پذیرفته شده است و آشنایی با این علم، برای جوانان مستعد، متفکر و توانای ما یک ضرورت است. برای رسیدن به اهداف فوق، بایستی که فراگیرندگان با ریاضیات به‌عنوان یک تلاش انسانی که علاوه بر کاربردهایش، موجب تقویت قوه‌ی استدلال، ایجاد نظم فکری و دمیدن روح زیبایی‌شناسی در آن‌ها می‌شود، آشنا شوند. چنین نگرشی به ریاضی باعث بالا بردن توانایی حل مسأله در دانش‌آموزان و برخورد بهتر آن‌ها با مشکلات در زندگی واقعی می‌شود.

دانش‌آموزان رشته‌ی علوم انسانی دارای توانایی لازم برای یادگیری ریاضی هستند ؛ با این حال نوع ریاضی ارائه شده به آنان باید با در نظر گرفتن روحیه حسّاس، هنرمند، خلّاق و متناسب با نیازهای تحصیلی آن‌ها باشد. رشته‌های علوم انسانی به ریاضیاتی که در عین سادگی و روانی، دارای استحکام و دقت و ظرافت است نیازمندند. انتظار می‌رود دانش‌آموزان عزیز با نگرشی که نسبت به ریاضی پیدا می‌کنند، بتوانند طرز تلقی جامعه را نیز تغییر دهند و خود را باور کنند و بدانند که در دنیای امروز، همه‌ی علوم، زنجیروار به هم مرتبطند و هم‌چنان‌که ریاضیات از علوم انسانی و ادبیات بهره می‌گیرد، علوم انسانی و ادبی نیز برای اعتلای خود، ناگزیر از روی‌آوردن به ریاضیات هستند، چنان‌که در رشته‌های روانشناسی، جامعه‌شناسی، فلسفه، اقتصاد و مدیریت، حقوق، هنر و پزشکی، همه جا حضور ریاضی دیده می‌شود.

در این کتاب، بیشترین تکیه بر ذوق‌آفرینی و ارائه‌ی کاربردهای واقعی ریاضی بوده است.

هر تمثیلی که به کار گرفته شده یا از هر مطلب ملموسی که استفاده گردیده، در جهت تحکیم مبانی ریاضی بوده است. هدف آن بوده است که مطالب کتاب باعث ایجاد خلاقیت در دانش‌آموزان گردد و این باور نادرست که ریاضی چون دژی نفوذناپذیر است را لرزان کند! به قول کیت دولین[1]، «اگر در کتاب به فرمول‌ها و قوانینی برخوردید که یادآور کلاس‌های بعضاً خشک و بی‌روح ریاضی در تجربه‌ی تحصیلی شما است، آن را به حساب ریاضی نگذارید! چنان‌که یک صفحه از کتاب هاملت ممکن است خاطره‌ی ناخوشایند حفظ کردن‌های کسل‌کننده در کلاس‌های ادبیات انگلیسی را برای شما تداعی کند. امّا آن کلاس‌ها، به هیچ‌وجه از زیبایی و جاودانگی آثار کلاسیک شکسپیر نمی‌کاهد!»

در تهیه مطالب کتاب، با توجه به اصول برنامه‌ریزی و روان‌شناسی یادگیری ریاضی، برای درک بهتر مباحث، فعالیت‌هایی در هر بخش مطرح شده که با دنبال کردن آن‌ها به چگونگی ایجاد یک فرمول یا یک قانونمندی ریاضی پی می‌بریم و مراحل تکوین آن‌ها را درمی‌یابیم. این یکی از جنبه‌های زیبا و جذّاب ریاضی است که هر قضیه یا قانون و فرمول تحت ضابطه و نظمی منطقی به‌وجود می‌آید. در تمام کتاب کوشش شده است که دانش‌آموزان با نحوه‌ی استدلال آشنا شوند تا در آینده با اعتماد به نفس بیشتری به اتخاذ تصمیم‌های اصولی در زندگی واقعی بپردازند و بتوانند با توجه به امکانات محدود، بهترین راه را با صرف کمترین هزینه و بیشترین بهره‌وری انتخاب کنند. هنگامی که در جریان تلاش‌هایی که به یک نتیجه منجر می‌شود قرار می‌گیریم، عمق آن را دریافته و چون همراه با سیر تحول مطالب پیش می‌رویم، کمتر در یادگیری دچار مشکل خواهیم شد و این ناشی از همان بینش آموزشی است که در تدوین کتاب مورد نظر بوده است ؛ در حالی که اگر تنها به نتیجه‌گیری‌های کلی بسنده می‌کردیم، کتاب کم‌حجم‌تر می‌شد امّا یادگیری را هم مشکل‌تر می‌ساخت!

اگرچه خواهان آن هستیم که با انجام فعالیت‌های هر درس[2]، دانش‌آموزان، در کلاس به‌نحوی درگیر فرآیند حل مسأله شوند و کتاب جنبه‌ی خودآموز پیدا کند، امّا به اعتقاد ما کتاب هرگز نباید و نمی‌تواند جانشین معلم گردد، زیرا وجود معلمان علاقه‌مند و آگاه در کلاس درس یکی از مهم‌ترین عوامل مؤثر در یادگیری است. کتاب حاضر از هم‌فکری و همراهی گروه تألیف

۱ــ ریاضی : دانش الگوها، ۱۹۹۴

۲ــ از معلّمان گرامی استدعا می‌شود که برای انجام فعالیت‌ها و بهتر فهمیدن مطالب کتاب، دانش‌آموزان را با طرز کار ماشین حساب آشنا کنند و استفاده از ماشین حساب را به آن‌ها توصیه نمایند.

متشکل از روان‌شناس و برنامه‌ریز ریاضی، متخصص ریاضی، معلم ریاضی و کارشناس تألیف سود جسته است و انتظار می‌رود تجارب و توانایی‌های حرفه‌ای این عده، در تدوین مطالب مفید واقع شده باشد. لازم به یادآوری است که بسیاری از ایده‌های آموزشی این کتاب، در کلاس‌های درس به محک تجربه گذاشته شده و نتایج مفیدی دربر داشته است.

از شما معلمان گرامی، دانش‌آموزان عزیز و همه‌ی دل‌سوختگان امر آموزش صمیمانه استدعا داریم بدون پیش‌داوری کتاب را نقد کنید و ما را از پیشنهادهای مفید و سازنده‌ی خود مطلع سازید تا در ویرایش‌ها و چاپ‌های بعدی کار کم‌عیب‌تر شود! پیشاپیش از همه‌ی شما عزیزان که با حوصله و دقت برای بهبود کیفی کتاب، آن را مطالعه می‌کنید و نارسایی‌ها را مطرح می‌نمایید سپاسگزاری می‌کنیم.

مؤلفان

فصل ۱

استدلال ریاضی

«اختلاف کردن در چگونگی و شکل پیل»

پیل اندر خانه‌ی تاریک بود   عرضه را آورده بودندش هنود
از برای دیدنش مردم بسی   اندر آن ظلمت همی شد هر کسی
دیدنش با چشم، چون ممکن نبود   اندر آن تاریکیش کف می‌بِسود
آن یکی را کف به خرطوم اوفتاد   گفت هم‌چون ناودان است این نهاد
آن یکی را دست بر گوشش رسید   آن برو چون باد بیزن شد پدید
آن یکی را کف چو بر پایش بسود   گفت شکل پیل دیدم چون عمود
آن یکی بر پشت او بنهاد دست   گفت خود این پیل چون تختی به‌دست
هم‌چنین هر یک به جزوی که رسید   فهم آن می‌کرد هرجا می‌شنید
از نظرکه، گفتشان شد مختلف   آن یکی دالش لقب داد این الف
در کف هر کس اگر شمعی بُدی   اختلاف از گفتشان بیرون شدی
چشم‌حس هم‌چون کف‌دستست‌وبس   نیست کف را بر همه‌ی او دسترس

۱ــ۱ــ درک شهودی

از زمانی که انسان زندگی غارنشینی را آغاز کرد و غار را مأوا ومأمنی برای خود دانست تا امروز که خبری در یک لحظه به سراسر دنیا مخابره می‌شود، او همواره برای درک آن‌چه که در پیرامونش می‌گذشته از شهودش کمک می‌گرفته است. انسان به‌طور فطری خود را تا حدودی با محیط هماهنگ می‌کرده و سعی داشته است تا با مشکلات مبارزه کند و بر آن‌ها چیره شود. برای مثال، قبل از آن‌که انسان بتواند از ساعت شنی یا ساعت خورشیدی برای تنظیم وقت خود استفاده

کند، از حواسش برای نگه‌داشتن حساب روز و ماه بهره می‌گرفت. از بلندی یا کوتاهی سایه‌ی اشیاء پی به‌موقعیت زمان می‌برد و یا برای تشخیص جهت در بیابان‌ها و دریاها از شهود خود کمک می‌گرفت. هرجا که با چشم دل می‌دید و با گوش جان می‌شنید، یا خوب می‌چشید و درست لمس می‌کرد، رازهای ناگفته و نادیده بر او فاش می‌شد و این همه، راه را برای فهم و استنباط و استدلال باز می‌کرد تا او بتواند با درک حقایق، پی به راز آفرینش ببرد و اسرار طبیعت را کشف کند.

برگ درختان سبز در نظر هوشیار — هر ورقش دفتریست معرفت کردگار

واین همان شهود است که می‌تواند راهگشای انسان در کشف پدیده‌ها و حلّ مسائل بغرنج شود.

با دقت در شعر «اختلاف کردن در چگونگی و شکل پیل» می‌فهمیم چون مردم در تاریکی قرار داشتند، قادر به تشخیص فیل نبودند، امّا با لمس کردن توانستند درکی هرچند مختصر از فیل داشته باشند که گرچه کافی نبود تا حدودی راهگشا بود. با این حال، برای به‌دست آوردن آگاهی کامل، مولوی هشدار می‌دهد که به ابزار قوی‌تری یعنی شمع در کف دست نیازمندیم و این شمع روشنگر همان استدلالی است که باید خالی از ابهام باشد. در این فصل، به معرفی چند نوع استدلال ریاضی می‌پردازیم.

۱ــ۲ــ استدلال تمثیلی[1]

در اکثر کارهای روزمرّه از نتیجه‌گیری‌های سطحی تا موفقیت‌های عمده‌ی علمی یا کارهای هنری از **تمثیل** استفاده می‌کنیم. تمثیل که در واقع همان یافتن نوعی مشابهت بین مفاهیم گوناگون است، در تمام سطوح مختلف قابل‌استفاده است. در ادبیات ما نمونه‌های زیبایی از تمثیل وجود دارد که با ظرافت خاصی محدودیت‌های آن مطرح می‌گردد که از آن جمله داستان **بقال و طوطی** در مثنوی معنوی است:

بود بقالی و وی را طوطیی — خوش نوایی سبز گویا طوطیی
در دکان بودی نگهبان دکان — نکته گفتی با همه سوداگران
در خطاب آدمی ناطق بدی — در نوای طوطیان حاذق بدی
جست‌ازسوی دکان‌سویی‌گریخت — شیشه‌های روغن گل را بریخت
از سوی خانه بیامد خواجه‌اش — بردکان بنشست فارغ خواجه‌وش
دید پر روغن دکان و جامه چرب — بر سرش زد گشت طوطی کَل[2] ز ضرب

۱ــ Analogy

۲ــ کَل = کچل

روزکی چندی سخن کوتاه کرد | مرد بقال از ندامت آه کرد
ریش برمی‌کند و می‌گفت ای دریغ | کآفتاب نعمتم شد زیر میغ
دست من بشکسته بودی آنزمان | چون زدم من بر سر آن خوش زبان
هدیه‌ها می‌داد هر درویش را | تا بیابد نطق مرغ خویش را
بعد سه روز و سه شب حیران و زار | بر دکان بنشسته بُد نومیدوار
می‌نمود آن‌مرغ را هرگون شگفت | تا که باشد کاندر آید او بگفت
جولقی سر برهنه می‌گذشت | با سر بی مو چو پشت طاس و طشت
طوطی اندر گفت آمد در زمان | بانگ بر درویش زد که هی فلان
از چه ای کل با کلان آمیختی | تو مگر از شیشه روغن ریختی
از قیاسش[1] خنده آمد خلق را | کو چو خود پنداشت صاحب دلق را
کار پاکانرا قیاس از خود مگیر | گرچه ماند در نبشتن شیر و شیر
جمله عالم زین سبب گمراه شد | کم کسی زابدال حق آگاه شد

تمرین : با توجه به داستان، توضیح دهید که طوطی چه تمثیلی به کاربرد و علت خنده‌ی مردم چه بود؟

انواع تمثیل با آن‌که محدودیت‌هایی دارند می‌توانند در ایجاد یک زمینه‌ی شهودی برای درک بسیاری از مفاهیم و اثبات‌های ریاضی کمک مؤثری باشند و نباید اهمیت آن‌ها را نادیده گرفت. مثلاً از تمثیل می‌توان برای درک بهتر این حقیقت که حاصل‌ضرب عدد منفی در عدد منفی، عددی مثبت است استفاده کرد. به نمونه‌ی زیر توجه کنید :

وارد شدن آب به مخزن را عملی مثبت (+) و خروج آب از آن را عملی منفی (−) در نظر می‌گیریم. در نمایش فیلم نیز، جلو بردن فیلم را عملی مثبت (+) و عقب بردن آن را عملی منفی(−) به حساب می‌آوریم. حال اگر فیلمی نمایش داده شود که در آن، آب در حال خروج از یک مخزن است (−) و فیلم را به عقب برگردانیم (−)، آب دوباره به مخزن باز می‌گردد (+)! یعنی حاصل دو عمل منفی (خروج آب و عقب بردن فیلم) عمل مثبت بازگشت آب به مخزن شده است.

۱ــ در این‌جا، «قیاس» به همان معنای تمثیل (analogy) به کار برده شده است و با لغت «قیاس» که به معنای sylogism در منطق ارسطویی به کار می‌رود متفاوت است. برای اطلاعات بیشتر به صفحات ۶۶ و ۶۷ کتاب منطق سال چهارم فرهنگ و ادب مراجعه شود.

۱ــ۳ــ استدلال استقرایی

فرض کنید یک محقق فرهنگ و تمدن ایران، به قصد جمع‌آوری اطلاعاتی در مورد معماری سنتّی قریه‌ها به آن‌جا سفر می‌کند، در اولین قریه (روستا) مشاهده می‌کند که سقف همه‌ی خانه‌ها گنبدی و دیوارها قطور هستند. در قریه‌ی بعدی نیز مشاهده می‌کند که سقف خانه‌ها گنبدی و دیوارها قطور هستند. به نظر شما مشاهده‌ی دو قریه برای نتیجه‌گیری کلّی در مورد وضعیت معماری روستاهای ایران کافی است؟ شاید توصیه شما به محقق این باشد که به مشاهدات خود تا حصول نتیجه ادامه دهد ؛ شاید بتواند در مورد همه‌ی روستاهای ایران یک ادّعای کلی بکند. عملاً محدودیت امکانات و زمان اجازه نمی‌دهند جستجوها در همه‌ی موارد انجام شوند، در مسائل ریاضی هم وضع به همین منوال است زیرا معمولاً فرایند جستجو متناهی نیست. به مثال زیر توجه کنید :

مثال ۱ : می‌خواهیم اعداد فرد متوالی را با هم جمع کنیم، برای این کار به جمع‌آوری اطلاعات می‌پردازیم.

$$۱=۱$$

$$۱+۳=۴$$

$$۱+۳+۵=۹$$

$$۱+۳+۵+۷=۱۶$$

مشاهدات بالا نشان می‌دهد که حاصل جمع اعداد فرد متوالی می‌توانند زوج یا فرد باشند. امّا چهار مورد بالا همگی مربع کامل می‌باشند. پس اولین حدس این است که **حاصل جمع اعداد فرد متوالی مربع کامل است**.آیا با مشاهده‌ی موارد فوق می‌توانیم نسبت به صحت حدس خود مطمئن باشیم؟ مسلماً نه! بنابراین برای حصول اطمینان از حدس اولیه، جستجو را ادامه می‌دهیم.

$$۱+۳+۵+۷+۹=۲۵$$

$$۱+۳+۵+۷+۹+۱۱=۳۶$$

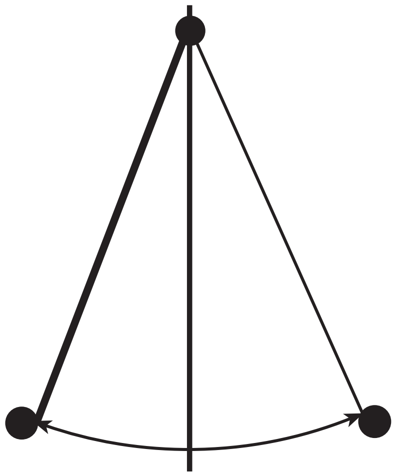
این دو نمونه نیز حدس را تأیید کرد، ولی آیا مجموع هر تعداد از اعداد فرد متوالی که از ۱ شروع شود، مربع کامل می‌شود؟

فعّالیت ۱ــ۱

گالیله دانشمند بزرگ ایتالیایی، با **مشاهده‌ی** رفتار نوسانی وزنه‌های آویزان، موفق به کشف‌هایی شد که درنهایت او را قادر به اختراع ساعت آونگ‌دار کرد. یکی از کشف‌هایی که گالیله را در

اختراع ساعت آونگ‌دار یاری داد، دیدن **رابطه‌ی** بین **طول** آونگ و **زمان** نوسان بود.

جدول زیر، زمان نوسان چند آونگ با طول‌های متفاوت را نشان می‌دهد :



جدول (۱)

طول پاندول	**زمان نوسان**
۱ واحد	۱ ثانیه
۴ واحد	۲ ثانیه
۹ واحد	۳ ثانیه
۱۶ واحد	۴ ثانیه

۱ــ با توّجه به الگویی که در جدول فوق می‌بینید، به‌نظر شما چه نوع رابطه‌ای بین طول آونگ و زمان نوسان وجود دارد؟

۲ــ حدس شما برای طول آونگی با زمان نوسانِ ۷ ثانیه چیست؟

۳ــ حدس شما برای طول آونگی با زمان نوسانِ ۱۰ ثانیه چیست؟

فعّالیت ۱ــ۲

تا سال **۱۷۷۲** میلادی، تنها شش سیّاره شناخته شده بود و فاصله‌های[۱] واقعی آن‌ها از خورشید به‌دست آمده بود. ستاره‌شناس آلمانی یوهان الِرت باود[۲]، با **مشاهده‌ی** فاصله‌ی آن سیّارات از خورشید، متوجّه **نظم** و **الگویی** در آن‌ها شد. این الگو به یوهان باود این‌توانایی‌راداد که فاصله‌ی سیّارات (هنوز ناشناخته) از خورشید را **پیش‌بینی** کند. جالب است بدانید که با کشف سیّاره‌های دیگری، **حدسیّه**[۳] یا **فرضیّه‌ای** که او ساخت به **آزمایش** گذاشته شد و درستی آن تأیید گشت!

جدول (۲)، فاصله‌ی نسبتاً واقعی سیّاره‌ها از خورشید و فاصله‌ی پیش‌بینی شده با الگوی یوهان باود را نشان می‌دهد :

۱ــ فاصله‌ی زمین تا خورشید ۱۰ واحد فرض شده است و باقی فاصله‌ها بر مبنای آن محاسبه شده است.

۲ــ Johan Elert Bode

۳ــ Conjectures

جدول (۲)

سیّاره	فاصله‌ی واقعی	الگوی یوهان باود
تیر (عطارد)	۴	۴ = ۴ + ۰
زهره (ناهید)	۷	۷ = ۴ + ۳
زمین (ارض)	۱۰	۱۰ = ۴ + ۶
بهرام (مریخ)	۱۵	۱۶ = ۴ + ۱۲
؟	$\square$	$\square = \square + \square$
مشتری (برجیس)	۵۲	۵۲ = ۴ + $\square$
کیوان (زحل)	۹۶	۱۰۰ = ۴ + ۹۶
؟	$\square$	$\square = \square + \square$

با کمی دقّت، متوجّه نزدیکی فاصله‌های واقعی سیّارات از خورشید با فاصله‌هایی که توسط الگوی یوهان باود پیش‌بینی شده بود می‌شویم.

۱ــ به نظر شما، آیا می‌توان رابطه‌ی بین فاصله‌ی بهرام و مشتری را به وسیله‌ی یک معادله نشان داد؟

۲ــ به نظر شما، چگونه می‌توان فاصله‌ی سیّاره‌های بعد از کیوان از خورشید را پیدا کرد؟ الگوی باود چه کمکی در پیدا کردن معادله‌ای برای یافتن فاصله‌ها می‌کند؟

در سال ۱۷۸۱، سیّاره‌ی بعد از کیوان یعنی اورانوس، به وسیله‌ی ویلیام هرشل[۱] کشف شد. فاصله‌ی ۱۹۲ واحدی اورانوس تا خورشید، به‌طور قابل توّجهی با فاصله‌ی پیش‌بینی شده به وسیله‌ی معادله‌ی فوق نزدیک بود. به همین دلیل، ستاره‌شناسان به این نتیجه رسیدند که رابطه‌ی بین معادله‌ی باود برای بهرام و مشتری معنای خاصّی دارد.

۳ــ به نظر شما این معنای خاصّ چیست؟

همان‌طورکه حدس زدید و به تجربه دریافتید، معادله‌ی باود برای پیدا کردن فاصله‌های تقریبی سیارات از خورشید به‌صورت

$$d = ۴ + (۳ \times ۲^{n-۲}) \quad n \geq ۲$$

بود.

۱ــ William Herschel

در سال ۱۸۰۱، سیاره‌ی کوچکی کشف شد که فاصله‌ی آن تا خورشید ۲۸ واحد بود!

۴ــ آیا می‌توانیم معنای خاصّ معادله‌ی باود را به عنوان یک **نتیجه‌گیری کلّی** بپذیریم؟

گالیله و باود، با جمع‌آوری اطّلاعات و مشاهده‌ی آن‌ها، متوجّه نظم و الگویی در مشاهدات خود شدند. آن‌ها با دیدن این نظم، حدسیه‌هایی ساختند که ایشان را قادر به پیش‌بینی نتایج مشاهدات بعدی می‌کرد. گالیله و باود، با انجام مشاهدات دیگری، پیش‌بینی خود را آزمایش کردند و همان نتایجی را که حدس می‌زدند به‌دست آوردند. این فرایند، گالیله و باود را مطمئن کرد که حدسیّه‌ی آن‌ها درست بوده است. آن‌ها روابطی را که به‌دست آورده بودند، به عنوان یک **نتیجه‌گیری کلّی** اعلام کردند. به روشی که گالیله و باود و به طور کلی عالمان علوم تجربی را به نتیجه‌گیری کلی می‌رساند **استدلال استقرایی**[1] می‌گویند.

> ***استدلال استقرایی***، *روش نتیجه‌گیری کلّی برمبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات است.*

فعّالیت ۱ــ۳

الف:

۱ــ یک عدد سه رقمی انتخاب کنید ؛

۲ــ آن عدد را در ۷ ضرب کنید ؛

۳ــ حاصل‌ضرب به‌دست آمده رادر ۱۱ ضرب کنید ؛

۴ــ حاصل‌ضرب به‌دست آمده در قسمت (۳) را در ۱۳ ضرب کنید.

ب:

مراحل ۱ تا ۴ را برای یک عدد سه رقمی دیگر انجام دهید.

پ:

۱ــ چه رابطه‌ای بین حاصل‌ضرب‌های به‌دست آمده در قسمت ۴ و عدد انتخابی خود در ۱ می‌بینید؟

۱ــ Inductive reasoning

مراحل ۲، ۳ و ۴ را برای چندین عدد سه رقمی دیگر که انتخاب کرده‌اید تکرار کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا می‌توانید ادّعا کنیدکه نتیجه‌ی شما برای تمام اعداد سه رقمی درست است؟

ت:

۱ــ حاصل‌ضرب ۱۳×۱۱×۷ را به‌دست آورید ؛

۲ــ بدون استفاده از ماشین حساب، اعداد سه رقمی انتخابی خود را در حاصل‌ضرب به‌دست آمده ضرب کنید. مراحل کار خود را نشان دهید ؛

۳ ــ چه نتیجه‌ای گرفتید؟ آیا می‌توانید ادّعا کنید که اگر هر عدد سه رقمی را در ۷ و ۱۱ و ۱۳ ضرب کنید، به نتیجه‌ی مشابه می‌رسید؟

۱ــ۴ــ محدودیت‌های استدلال استقرایی

آب آن‌قدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند ... برف آن‌قدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند... یخ آن‌قدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند ... هر چیزی آن‌قدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند!

دراین‌جا، بعد از آن‌که مرد غارنشین کشف کرد که آب و برف و یخ آن‌قدر می‌جوشند تا آن‌که چیزی از آن‌ها باقی نماند، این مشاهدات را تعمیم داد و ادّعا کرد که «**هر چیزی** آنقدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند!» این نتیجه‌گیری کلّی که براساس مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات است، ضعف اساسی استدلال استقرایی را نشان می‌دهد، زیرا همیشه این احتمال وجود دارد که با کشف شواهد بیشتر، درستی نتیجه‌ی به‌دست آمده نقض شود.

فعّالیت ۱ــ۴

محاسبات زیر را به صورت ستونی و بدون استفاده از ماشین حساب انجام دهید :

الف:

۱ــ حاصل‌ضرب ۱۱۲×۱۲۴ را به‌دست آورید ؛

۲ــ حاصل‌ضرب ۲۱۱×۴۲۱ را به‌دست آورید ؛

۳ــ چه رابطه‌ای بین قسمت‌های ۱ و ۲ و جواب‌های به‌دست آمده وجود دارد؟

ب:

۱ــ حاصل‌ضرب ۳۱۲×۲۲۱ را به‌دست آورید ؛

۲ــ بدون هیچ محاسبه‌ای، حاصل‌ضرب ۲۱۳×۱۲۲ را حدس بزنید ؛

۳ــ حال حاصل‌ضرب ۲۱۳×۱۲۲ را محاسبه کنید. آیا حدس شما درست بود؟

پ:

۱ــ حالا حاصل‌ضرب ۱۱۳×۲۲۳ را محاسبه کنید ؛

۲ــ بدون هیچ محاسبه‌ای، حاصل‌ضرب ۳۱۱×۳۲۲ را حدس بزنید ؛

۳ــ حالا حاصل‌ضرب ۳۱۱×۳۲۲ را محاسبه کنید. آیا حدستان درست بود؟

با انجام این فعالیت متوجه می‌شویم که استدلال استقرایی عمومیت ندارد و با محدودیت‌هایی مواجه است. در واقع، در استدلال استقرایی، اطمینان قطعی به‌درستی نتایج نداریم زیرا نتیجه‌گیری‌های ما برمبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات است.

۱ــ۵ــ استقرای ریاضی

آیا مجموع اولین n عدد فرد متوالی، n^2 است؟

در مثال ۱، با فرایند استقرایی و جمع‌آوری مشاهدات، جواب سؤال فوق را به‌طور تجربی نشان دادیم. امّا چون تعداد اعداد فرد، نامتناهی است نتوانستیم همه‌ی موارد را تحقیق کنیم. بنابراین، برای اثبات ادعای خود از یک ابزار دقیق و قوی ریاضی یعنی اصل استقرای ریاضی کمک می‌گیریم.

اصل استقرای ریاضی: *فرض کنید حکمی درباره‌ی عدد طبیعی n داشته باشیم. اگر این حکم برای $n=1$ درست باشد و برای هر $k \geq 1$، با فرض درستی حکم برای $n=k$ بتوان درستی حکم برای $n=k+1$ را نتیجه گرفت آن‌گاه حکم برای هر عدد طبیعی n درست است.*

می‌خواهیم نشان دهیم که مجموع اولین n عدد فرد متوالی، n^2 است.
همانند گذشته به جمع‌آوری مشاهدات می‌پردازیم :

$$1=1=1^2$$
$$1+3=4=2^2$$
$$1+3+5=9=3^2$$
$$1+3+5+7=16=4^2$$
$$1+3+5+7+9=25=5^2$$
$$1+3+5+7+9+11=36=6^2$$

اگر با دقت به تساوی‌های بالا بنگریم می‌بینیم که :

مجموع n عدد فرد متوالی اولیه = مربع تعداد آن‌ها = n^2

یا

$$\underbrace{1+3+5+\dots\dots+2n-1}^{\text{n تا}}=n^2 \qquad (1)$$

اثبات: طبق اصل استقرای ریاضی، ابتدا باید درستی حکم فوق را در مورد $n=1$ بیازماییم.
اگر رابطه‌ی (۱) را برای $n=1$ در نظر بگیریم داریم

$$1=1^2$$

پس برای $n=1$ حکم درست است.
در گام بعدی، فرض می‌کنیم حکم به ازای $n=k$ درست باشد یعنی

$$1+3+5+\dots\dots+2k-1=k^2$$

حالا باید ثابت کنیم حکم برای $n=k+1$ نیز درست است یعنی

$$1+3+5+\dots\dots+2k-1+2(k+1)-1=(k+1)^2 \qquad (2)$$

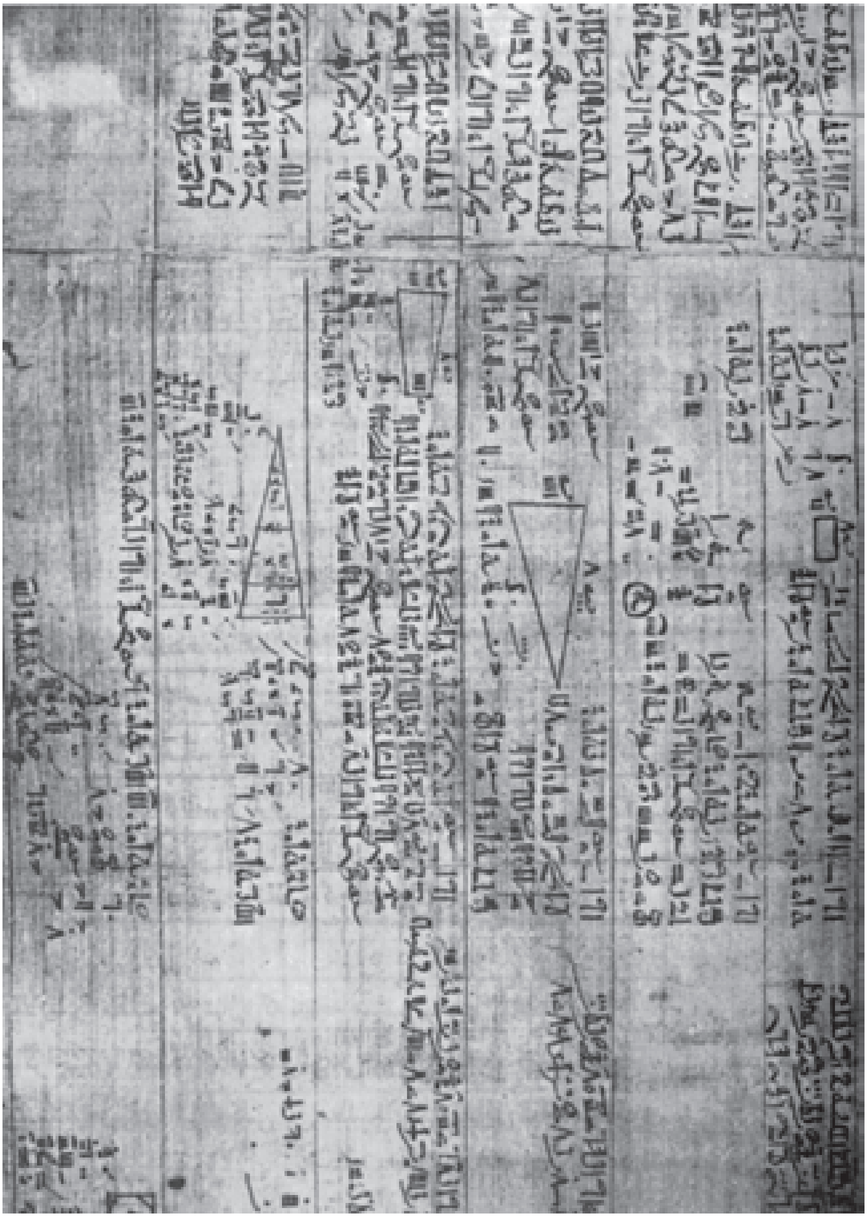
برای اثبات تساوی اخیر (حکم استقرا) به طرفین رابطه‌ی (۱) (فرض استقرا)، جمله‌ی $(k+1)$ ام یعنی $2(k+1)-1$ را اضافه می‌کنیم

$$\begin{aligned}1+3+5+\dots\dots+2k-1+2(k+1)-1&=k^2+2(k+1)-1\\&=k^2+2k+2-1\\&=k^2+2k+1\\&=(k+1)^2,\end{aligned}$$

بنابراین حکم استقراء یعنی (۲) را اثبات کردیم. درنتیجه برای هر عدد طبیعی n داریم.

$$1+3+\dots\dots+2n-1=n^2.$$

۱ــ۶ــ استدلال استنتاجی



در مقدّمه‌ی پاپیروس رایند ــ ۱۶۵۰ سال قبل از میلاد ــ که شاید قدیمی‌ترین تاریخ موجود ریاضی باشد، چنین آمده است: «به جرأت می‌توان گفت که بارزترین مشخّصه‌ی شعور انسان که نشان‌دهنده‌ی درجه‌ی تمدّن هر ملّت است، همان قدرت استدلال کردن است و به‌طور کلّی این قدرت به بهترین وجهی می‌تواند در مهارت‌های ریاضی افراد آن ملّت به نمایش گذاشته شود.»

دو مسأله‌ی بازی با اعداد در تاریخ ریاضی مصر(پاپیروس رایند) موجود است که طبق دستورالعمل‌های این دو مسأله، عددی انتخاب می‌شود و سپس چندین کار دیگر روی آن انجام می‌گیرد و در پایان بدون در نظر گرفتن عدد انتخابی، نتیجه همیشه یکسان است! با یکی از این دو مسأله آشنا می‌شویم.

فعّالیت ۱ــ۵

مثال‌های زیر یکی از انواع سرگرمی با اعداد است.

مثال ۲: هر مرحله از این بازی در سمت راست و نتایج هر مرحله برای ۴ عددکه به‌طور تصادفی انتخاب شده‌اند، در سمت چپ جدول زیر نشان داده شده است.

جدول (۳)

یک عدد انتخاب کنید	۵	۸	۱۷	۴۶
آن را در ۳ ضرب کنید	۱۵	۲۴	۵۱	۱۳۸
به آن ۶ اضافه کنید	۲۱	۳۰	۵۷	۱۴۴
آن را بر ۳ تقسیم کنید	۷	۱۰	۱۹	۴۸
عددی را که از ابتدا انتخاب کرده بودید از این نتیجه‌ی تقسیم کم کنید	۲	۲	۲	۲

بررسی بالا ما را مطمئن می‌سازد که نتیجه همیشه برابر با ۲ است.

اگر چه با استدلال استقرایی می‌توان دریافت که این نتیجه **شاید** برای همه‌ی اعداد درست باشد، امّا برای اثبات کلی این مطلب، یعنی **تبدیل شاید به باید**، به استدلال استنتاجی نیازمندیم.

مثال ۳: همان مثال قبلی را با اندکی تغییر بررسی می‌کنیم و به جای انتخاب یک یا چند عدد،درموقع شروع از علامت‌گذاری استفاده می‌کنیم. در طیّ بازی، مربّع کوچک معرّف عدد انتخابی اوّلیّه است و برای هربارافزودن یاکاستن اعدادجدید، از یک دایره‌ی کوچک استفاده می‌کنیم.

جدول (۴)

عدد انتخابی	□
عدد انتخابی ضرب در ۳	□□□
نتیجه‌ی قبلی به اضافه‌ی ۶	□□□○○○○○○
حاصل تقسیم بر ۳	□○○
کم کردن عدد اوّلیه	○○

در مثال ۱ دیدیم که نتیجه همیشه عدد ۲ است. حال به وضوح می‌بینیم که عدد انتخابی اوّلیه هر چه که باشد باز هم نتیجه عدد ۲ است.

شاید مربع‌ها و دایره‌ها نمادهای جالبی برای استفاده‌ی همیشگی نباشند. در ریاضیّات معمولاً از **حروف** برای نشان دادن اعداد دلخواه استفاده می‌کنیم.

مثال ۴: حال مثال قبلی را با نماد جبری، یعنی با استفاده ازیک حرف به‌جای عدد انتخابی اوّلیّه، دوباره بررسی می‌کنیم :

جدول (۵)

عدد انتخابی	**n**
عدد انتخابی ضرب در ۳	۳n
نتیجه‌ی قبلی به اضافه‌ی ۶	۳n + ۶
حاصل تقسیم بر ۳	n + ۲
کم کردن عدد اوّلیه	۲

نکته‌ای که در هر سه مثال به چشم می‌خورد این است که نتایجی را بر مبنای عباراتی که درستی آن‌ها را قبول کرده‌ایم به دست آوردیم یعنی از استدلال استنتاجی استفاده کردیم.

استدلال استنتاجی *روش نتیجه‌گیری کلی با استفاده از حقایقی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.*

فعّالیت ۱ــ۶

در فعالیّت ۱ــ۳، دیدیم که اگر اعداد سه رقمی مختلفی را انتخاب کنیم و آن‌ها را در ۷ ، ۱۱ و ۱۳ ضرب کنیم، حاصل یک عدد شش رقمی خواهد بود که تکرار عدد سه رقمی انتخابی اولیّه است. حال از زاویه‌ای دیگر به آن فعالیّت نگاه می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم که $\overline{abcabc}$ نشان‌دهنده‌ی هر عدد شش رقمی‌ای است که از تکرار عدد سه رقمی $\overline{abc}$ به‌دست آمده است. می‌خواهیم ثابت کنیم که $\overline{abcabc}$ بر ۷، ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیر است.

عدد $\overline{abcabc}$ را به‌صورت تجزیه شده می‌نویسیم

$$\overline{abcabc}=100{,}000\ a+10{,}000\ b+1000\ c+100\ a+10\ b+c$$

با دقّت در صورت تجزیه شده‌ی $\overline{abcabc}$ و فاکتورگیری از عوامل مشترک، عدد ۱۰۰۱ را ردیابی می‌کنیم. این همان عددی است که در فعالیت ۱ــ۳، از ضرب ۱۳×۱۱×۷ به دست آوردیم

$$\overline{abcabc}=\underline{100{,}000\ a}+\underline{\underline{10{,}000\ b}}+\underline{\underline{\underline{1000\ c}}}+\underline{100\ a}+\underline{\underline{10\ b}}+\underline{\underline{\underline{c}}}$$

$$=100a(1000+1)+10b(1000+1)+c(1000+1)$$

$$=100a(1001)+10b(1001)+c(1001)$$

مجدداً از عامل مشترک ۱۰۰۱ فاکتور می‌گیریم

$$1001(100a+10b+c) \qquad (1)$$

داخل پرانتز، صورت تجزیه شده‌ی عدد سه رقمی $\overline{abc}$ است

$$1001\ \overline{abc} \qquad (2)$$

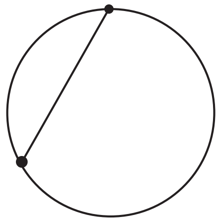
از (۲) نتیجه می‌گیریم که $\overline{abcabc}$ بر ۷ و ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیر است این نتیجه‌گیری قابل تعمیم است زیرا ما بدون هیچ محدودیّتی، $\overline{abcabc}$ را به عنوان نماینده‌ی **هر** عدد شش رقمی که از تکرار یک عدد سه رقمی تشکیل شده است، انتخاب کردیم و باز هم توانستیم نشان دهیم که این عدد بر ۷، ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیر است زیرا دارای ضریب ۱۰۰۱ است.

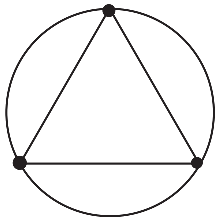
فرق اساسی فعالیت ۱ــ۳ و این فعالیّت در آن است که در مورد قبلی، براساس مجموعه‌ی محدودی از شواهد، به یک نتیجه‌گیری کلّی رسیدیم امّا در این فعالیّت، حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم مبنایی برای بررسی‌ها و نتیجه‌گیری‌های کلّی ما شد.

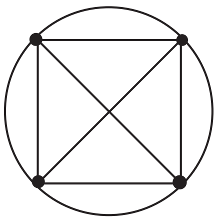
۱ــ۷ــ مثال نقض

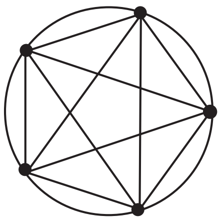
استدلال استنتاجی به ما اطمینان می‌دهد که نتیجه‌ی به‌دست آمده حتماً درست است. این جامعیّت، یکی از نشانه‌های اقتدار و زیبایی این نوع استدلال است. گاهی اتفاق می‌افتد که با مثالی، عمومیت نتیجه‌ای که حدس می‌زنیم، نقض می‌شود.

مثال۵: اگر دو نقطه‌ی اختیاری بر روی پیرامون دایره را به وسیله‌ی یک پاره خط به هم وصل کنیم، دایره به دو ناحیه تقسیم می‌شود. با اتّصال سه نقطه‌ی اختیاری بر روی دایره، دایره به ۴ ناحیه تقسیم می‌شود. شکل زیر این موضوع را برای ۲، ۳، ۴ و ۵ نقطه‌ی اختیاری بر روی دایره نشان می‌دهد :


(الف)


(ب)


(پ)

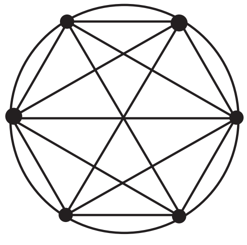

(ت)

آیا اگر تعداد نقاط ۶ باشد، تعداد ناحیه‌ها ۳۲ می‌شود؟ ۶ نقطه بر روی دایره اختیار می‌کنیم و آن‌ها را به وسیله‌ی پاره‌خط‌هایی به هم وصل می‌کنیم. با توجه به شکل می‌بینیم که تعداد ناحیه‌ها به‌صورت ۲، ۴، ۸، ۱۶،...، افزایش می‌یابد.

جدول (۶)

تعداد نقطه‌ها	۲	۳	۴	۵
تعداد ناحیه‌ها	۲	۴	۸	۱۶

با استدلال استقرایی به نظر می‌رسد پاره‌خط‌هایی که ۶ نقطه را به‌هم متّصل می‌سازند، دایره را به ۳۲ ناحیه تقسیم می‌کنند.


(ث)

امّا با شمردن ناحیه‌ها، می‌بینیم که تعداد آن‌ها ۳۰ است، که نادرست بودن نتیجه‌ی فوق را نشان

می‌دهد. اگر حتّی یک نمونه پیدا شود که حدس ما را رد کند، گوییم که با مثال نقض، نادرستی حدس ثابت شده است.

*به مثالی که کلیت حکمی را نقض کند، **مثال نقض** می‌گویند.*

مثال۶: برای هر دو عدد گنگ x و y می‌خواهیم ببینیم آیا $x+y$ نیز گنگ است یا خیر؟

حل: کافی است نشان دهیم که x و yای پیدا می‌شوند که گنگ هستند امّا مجموع آن‌ها، یعنی $x+y$ گنگ نیست. برای این کار اگر دو عدد گنگ $x=۲+\sqrt{۲}$ و $y=۲-\sqrt{۲}$ را انتخاب کنیم، می‌بینیم که $x+y=(۲+\sqrt{۲})+(۲-\sqrt{۲})=۲+۲=۴$ که یک عدد گویا است. پس این مثال، کلیّت این حکم را که مجموع دو عدد گنگ همیشه یک عدد گنگ است نقض می‌کند.

مسائل[1]

۱ــ با استفاده از استدلال استنتاجی، نتایج زیر را کامل کنید.

الف) اگر باران ببارد، زمین مرطوب می‌شود. الآن باران می‌بارد.

نتیجه: زمین $\boxed{}$ است.

ب) خطوط موازی هیچگاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند. خطوط $L_۱$ و $L_۲$ موازی هستند.

نتیجه: $L_۱$ و $L_۲$ $\boxed{}$.

۲ــ آیا نتایج زیر از عبارات داده شده حاصل می‌شوند؟ جواب خود را توضیح دهید.

الف) تمام دانش‌آموزانی که ریاضی یاد می‌گیرند می‌توانند استدلال کنند.

حمید دانش‌آموزی است که ریاضی یاد می‌گیرد.

نتیجه: حمید می‌تواند استدلال کند.

ب) بعضی از دانش‌آموزان با طرز کار کامپیوتر آشنا هستند.

نرگس دانش‌آموز است.

نتیجه: نرگس با طرز کار کامپیوتر آشنا است.

پ) مثلث متساوی‌الساقین دارای حداقل دو ضلع مساوی است.

مثلث متساوی‌الاضلاع دارای سه ضلع مساوی است.

نتیجه: هر مثلث متساوی‌الاضلاع، یک مثلث متساوی‌الساقین است.

۱ــ تمرین‌های ۱ تا ۵ از کتاب **جبر و احتمال** سال سوم ریاضی نظام جدید گرفته شده است.

۳ــ نشان دهید که مجموع دو عدد زوج همیشه زوج است.

۴ــ علی، احمد،کامران، داوود و ابراهیم عضو تیم بسکتبال مدرسه‌ی خود هستند. با توجّه به اطلاعات زیر، آن‌ها را برحسب افزایش قد مرتّب کنید :

الف) حداقل دو نفر از آن‌ها از علی کوتاه‌تر هستند ؛

ب) داوود از کامران کوتاه‌تر است ؛

پ) احمد کوتاه‌ترین پسر نیست ؛

ت) داوود از علی بلندتر است.

۵ ــ کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است. در صورت نادرست بودن یک مثال نقض پیدا کنید.

الف) اگر ۱ با هر عدد فردی جمع شود، نتیجه همیشه یک عدد زوج است ؛

ب) توان دوم یک عدد همیشه از آن بزرگ‌تر است ؛

پ) مجموع دو زاویه‌ی حادّه کمتر از ۱۸۰ است ؛

ت) همیشه ارتفاع یک مثلث داخل آن قرار می‌گیرد ؛

ث) هر مستطیلی یک مربع است ؛

ج) هر مربعی یک مستطیل است.

۶ــ نمونه‌های زیر را درنظر بگیرید :

$$۶ = ۱^۲ + ۱^۲ + ۲^۲,$$

$$۱۴ = ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲,$$

$$۲۴ = ۲^۲ + ۲^۲ + ۴^۲,$$

$$۵۹ = ۱^۲ + ۳^۲ + ۷^۲,$$

$$۶۱ = ۳^۲ + ۴^۲ + ۶^۲,$$

$$۸۹ = ۲^۲ + ۲^۲ + ۹^۲,$$

نتیجه‌ی احتمالی آن است که : «هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت مجموع سه مربع کامل نوشت». با ارائه‌ی یک مثال نقض نشان دهید که نتیجه‌گیری فوق نادرست است.

۷ ــ کدام یک از احکام زیر درست است؟

الف) اگر x گنگ و y گویا باشد، آن‌گاه $x+y$ گویا است.

ب) اگر x و y هردو گویا باشند، آن‌گاه $x+y$ گویا است.

احکام درست را اثبات کنید و برای رد احکام نادرست مثال‌های نقض بیاورید.

فصل ۲

دنباله‌های اعداد

«ریاضی ملکه‌ی علوم است» کارل فِردِریک گوس[1]

۲ــ۱ــ دنباله‌ها

اولین فعّالیتی که کودک را با ماهیت اعداد آشنا می‌کند، **شمارش** است. مجموعه‌ی اعداد طبیعی N که از ۱ آغاز می‌شود و یکی یکی افزوده می‌گردد، مثالی از یک **دنباله‌ی عددی** است و هریک از این اعداد یک **جمله** از دنباله‌ی‌اعداد طبیعی نامیده می‌شوند. به بیانی دیگر، برای ساختن دنباله‌ای از اعداد طبیعی، به هر جمله یکی اضافه می‌کنیم تا جمله‌ی بعدی به‌دست آید. چنین دنباله‌هایی می‌توانند از هر عدد طبیعی شروع شوند وتا بی‌نهایت ادامه یابند.

> *دنباله‌ی عددی آرایشی از اعداد است که هر عدد یا جمله‌ی آن با یک **قانون یکسان** به دنبال جمله‌ی قبلی می‌آید.*[2]

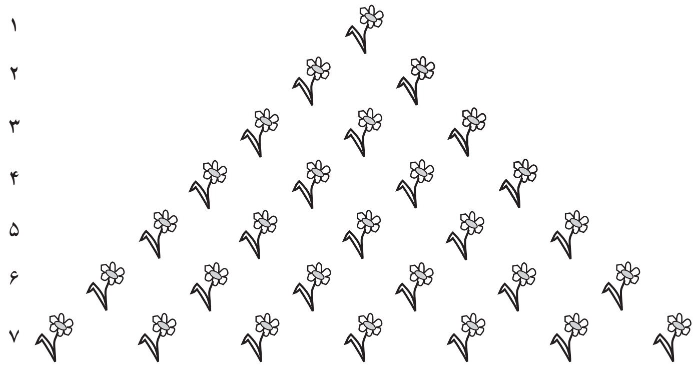
۱ــ Karl Friedrich Gauss

۲ــ این تعریف دسته‌ی خاصی از دنباله‌های اعداد را در بر می‌گیرد.

در مثال‌های زیر، به بررسی راه‌های مختلف پیدا کردن مجموع اعداد طبیعی می‌پردازیم :

فعالیت ۲ــ۱

چند گل برای ساختن شکل زیر لازم است؟



شکل ۱

یکی از راه‌های پاسخ به سؤال فوق، یافتن تعداد گل‌های موجود در هر ردیف است که درسمت چپ نوشته شده است، یعنی : ۷+۶+۵+۴+۳+۲+۱

راه دیگر از تصویر زیر حدس زده می‌شود :

شکل ۲

در شکل ۲ ؛ تعداد ردیف‌ها ۷ و تعداد گل‌ها در هر ردیف ۸ است.

تمرین ۱: ویژگی شکل ۲ را مشخص کنید و سپس راه میان‌بری برای تعیین تعداد گل‌ها در شکل ۲ پیدا کنید.

تمرین ۲: با توجّه به شکل ۲، راه میان‌بری برای تعیین تعداد گل‌ها در شکل ۱ پیدا کنید. چه رابطه‌ای بین مجموع گل‌های شکل ۲ و مجموع گل‌های شکل ۱ وجود دارد؟

با دقّت در تمرین‌های ۱ و ۲، متوجّه شدیم که مجموع تعداد گل‌ها در ردیف‌های اوّل و آخر مساوی است با تعداد گل‌ها در ردیف‌های دوّم و ماقبل آخر و به‌همین ترتیب تا آخر، یعنی در شکل ۲، تعداد گل‌ها در هر ردیف برابر است با

$$\begin{array}{ccccccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ \\ +۷ & +۶ & +۵ & +۴ & +۳ & +۲ & +۱ \\ \hline ۸ & ۸ & ۸ & ۸ & ۸ & ۸ & ۸ \end{array}$$

اگر به شکل ۲ دقیق‌تر نگاه کنید، متوازی‌الاضلاعی را می‌بینید که قاعده‌ی آن ۸، یعنی مجموع ردیف‌های اوّل و آخر و ارتفاع آن ۷، یعنی تعداد ردیف‌ها است. حال جواب تمرین ۱ را با مساحت متوازی الاضلاع مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تمرین ۳: دوباره به شکل ۱ نگاه کنید! این شکل ذوزنقه‌ای است که طول قاعده‌ی بالایی آن ۱ (هر گل یک واحد) و طول قاعده‌ی پایینی آن ۷ است. مجدداً جواب تمرین ۲ را با مساحت ذوزنقه مقایسه کنید و نتیجه را یادداشت کنید.

۲ــ۲ــ تاریخچه‌ی یک کشف کوچک[۱] یا یک نبوغ بزرگ!

داستانی درباره‌ی گوس که از بزرگترین نوابغ و ریاضیدان‌های معروف دنیا (۱۸۵۵ــ۱۷۷۷) است نقل می‌کنند[۲] که بسیار جالب است. ماجرا از این قرار بوده است که وقتی گوس در دبستان درس می‌خواند روزی معلّم از آن‌ها خواست که اعداد ۱ تا ۱۰۰ را پشت سر هم بنویسند و جمع کنند. قبل از این‌که همکلاسی‌های گوس عددنویسی را به‌پایان ببرند، او مجموع اعداد از ۱ تا ۱۰۰ را به‌دست آورد و به معلّمش نشان داد! معلّم برآشفت و فکر کرد که گوس قصد اذیّت کردن او را دارد. با این حال، براثر پافشاری گوس، معلم او به جمع اعداد متوالی از ۱ تا ۱۰۰ پرداخت و پس از صرف مدّت زمانی طولانی به نتیجه‌ای رسید که گوس کودک در چند دقیقه رسیده بود. حدس‌های متعددی درباره‌ی راه حل گوس زده می‌شود. **واقعاً گوس مسأله را چگونه حل کرده بود؟**

۱ــ خلاقیّت ریاضی اثر جورج پولیا.

۲ــ برگردان‌های مختلفی از داستان گوس در منابع تاریخ ریاضی وجود دارد.

نمودار زیر[1] چند شیوه‌ی مختلف به‌دست آوردن مجموع اعداد متوالی از ۱ تا ۱۰۰ را نشان می‌دهد :

A	B	C	D
۱	۱	۱	۱
۲	~~۲~~	۲	۲
۳	~~۳~~	~~۳~~	۳
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	۵۰	۵۰
.	.	.	۵۱
.	.	۶۵	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	۹۸	~~۹۸~~	۹۸
.	۹۹	۹۹	۹۹
۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰

در ستون A ، طریق به‌دست آوردن مجموع، نوشتن عددها به ترتیب از آغاز و جمع آن‌ها است، یعنی همان شیوه‌ای که در ابتدا برای جمع کردن تعداد گل‌های شکل ۱ به‌کار بردیم.

در ستون B ، جمع اعداد با شروع از انتها یعنی ۱۰۰ به‌ترتیب نزولی

شیوه‌ی به‌دست آوردن مجموع در ستون C ، جمع‌کردن این اعداد بدون هیچ ترتیب خاصی است.

ستون D از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. زیرا رابطه‌ی جالبی بین اعداد ابتدایی و انتهایی دیده می‌شود. این همان راه میان‌بُری است که در تمرین ۲ پیدا کردید. مجموع هردو عددی که به یک فاصله از دو انتها باشند، مجموع معیّنی می‌دهند، یعنی

$$۱+۱۰۰=۲+۹۹=۳+۹۸=\cdots=۵۰+۵۱=۱۰۱$$

و چون مجموعاً ۵۰ جفت از این اعداد داریم، درنتیجه مجموع اعداد از ۱ تا ۱۰۰ برابر است با

$$۵۰\times۱۰۱=۵۰۵۰$$

دوباره به تمرین ۲ دقّت کنید! در آن تمرین، تعداد گل‌های شکل ۱ را با توجّه به شکل ۲ به‌دست آوردید. درواقع، تعداد گل‌های شکل ۲ در هر ردیف برابر مجموع گل‌های ردیف‌های اوّل و آخر بود

۱ــ به نقل از جرج پولیا، ۱۹۶۲

و چون مجموعاً ۷ ردیف گل داشتیم، درنتیجه مجموع گل‌های شکل ۱ نصف گل‌های شکل ۲ یعنی $۸\times\frac{۷}{۲}$ بود. به بیانی دیگر

$$\text{مجموع گل‌های شکل ۱}=\frac{\text{تعداد ردیف‌ها}}{۲}\left(\text{تعداد گل‌های ردیف اول}+\text{تعداد گل‌های ردیف آخر}\right)$$

که این همان روش پیدا کردن مساحت ذوزنقه‌ای است که قاعده‌ی کوچک آن ۱، قاعده‌ی بزرگ آن ۷ و بلندی یا ارتفاع آن ۷ یعنی تعداد ردیف‌ها است :

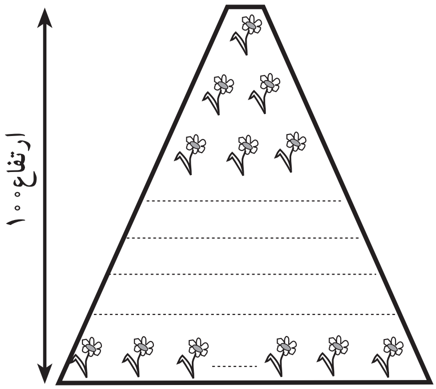
$$\text{مجموع گل‌های شکل ۱}=\frac{\text{ارتفاع}}{۲}\left(\text{قاعده‌ی کوچک}+\text{قاعده‌ی بزرگ}\right)$$

در مسأله‌ی گوس نیز، ۱۰۱ مجموع عددهای ابتدا و انتها و ۵۰ نصف تعداد آن‌ها بود پس

$$S[1]=\text{مجموع اعداد از ۱ تا ۱۰۰}=\frac{\text{تعداد عددها}}{۲}\left(\text{عدد ابتدا}+\text{عدد انتها}\right)$$

$$=\frac{۱۰۰}{۲}(۱+۱۰۰)$$

به یاد چه می‌افتید؟ همان‌طورکه قبلاً هم دیدید، مجموع فوق یادآور مساحت ذوزنقه‌ای است که ارتفاع آن ۱۰۰ و قاعده‌های آن ۱ و ۱۰۰ است.



حال همین مسأله را اساس کار قرار می‌دهیم و به تعمیم آن می‌پردازیم .به جای عدد خاص ۱۰۰، عدد طبیعی n را درنظر می‌گیریم. در واقع با کمک‌گرفتن از تجربه‌ی گوس، می‌خواهیم

۱ــ S حرف اول Sum به معنی مجموع است.

مجموع اولین n عدد طبیعی را پیدا کنیم.

برای این کار، از همان شیوه‌ای که در ستون D به‌کار بردیم دوباره استفاده می‌کنیم؛ یعنی پیدا کردن جفت مرتب‌هایی از اعداد ابتدایی و انتهایی (اعدادی که به فاصله‌ی معینی از ابتدا و انتها قرار گرفته‌اند) که مجموع معینی دارند.

به همان شیوه‌ای که در شکل ۲ داشتیم، مجموع S را دوباره می‌نویسیم مشروط بر این که در سطر دوّم، ترتیب جمله‌ها برعکس، یعنی از بزرگ به کوچک نوشته شوند. (حتماً به یاد می‌آورید که در شکل ۲ ردیف گل‌ها را برعکس چیدیم.)

$$S = ۱ + ۲ + ۳ + \quad + (n - ۲) + (n - ۱) + n$$

$$S = n + (n - ۱) + (n - ۲) + \quad + ۳ + ۲ + ۱$$

از جمع دو سطر بالا نتیجه می‌گیریم که

$$۲S = \underbrace{(۱ + n) + (۱ + n) + (۱ + n) + \quad + (۱ + n) + (۱ + n) + (۱ + n)}_{\text{n بار}}$$

چون تعداد جمله‌ها n تا بود پس

$$۲S = n(۱ + n)$$

یا

$$\boxed{S = \frac{n(۱ + n)}{۲}} \qquad (*)$$

یعنی:

$$\boxed{S = \frac{\text{(جمله‌ی آخر + جمله‌ی اوّل) تعداد جمله‌ها}}{۲}}$$

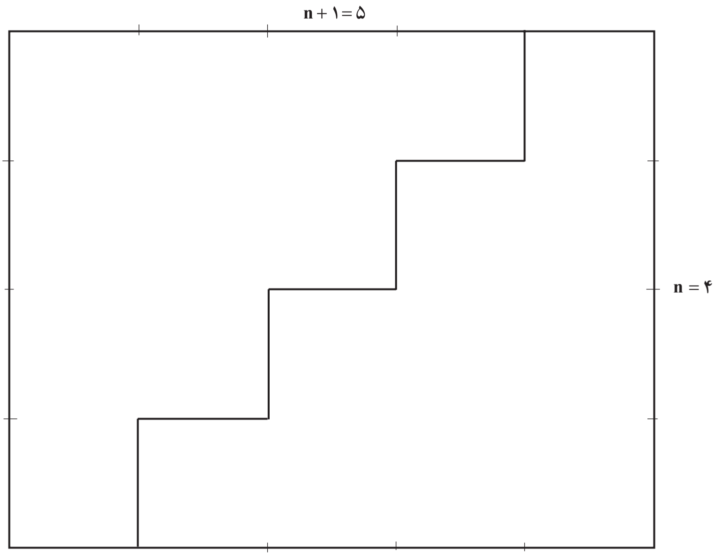
فعالیت ۲ــ۲

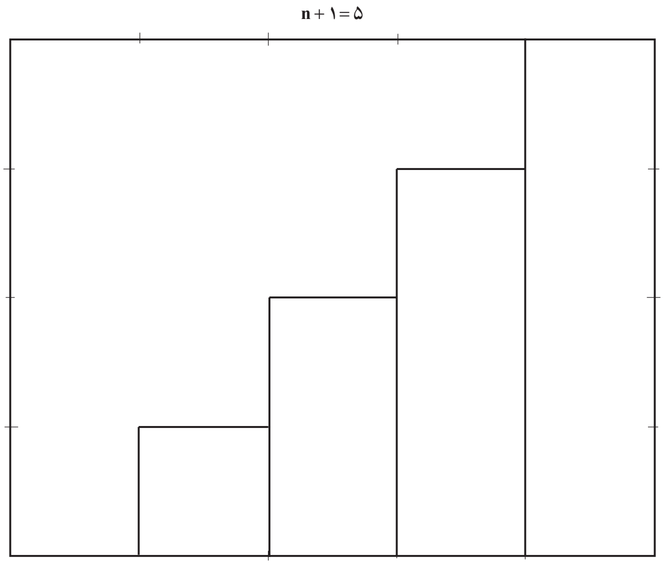
برای نشان دادن مجموع $۱ + ۲ + ۳ + \quad + n = \frac{n(n + ۱)}{۲}$ مستطیلی را درنظر می‌گیریم که یک ضلع آن n و ضلع دیگرش $n + ۱$ باشد. حال با خطی پلکانی، مستطیل را به دو قسمت مساوی تقسیم

می‌کنیم : مساحت هر قسمت برابر است با $۱+۲+۳+\quad+n$. چرا؟ به آن فکر کنید! مساحت تمام مستطیل چقدر است؟ درست حدس زدید! با توجّه به طول و عرض مستطیل، مساحت آن $n(n+۱)$ و مساحت نصف آن $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است. بنابراین

$$۱+۲+۳+\quad+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

شکل زیر با فرض $n=۴$ رسم شده است.





۲ــ۳ــ دنباله‌ی حسابی

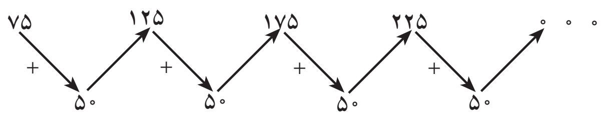
مادر بزرگ گلاره تصمیم گرفت به تمام نوه‌های خود عیدی بدهد. به این ترتیب که به کوچکترین آن‌ها ۳ سکه ۲۵ تومانی و به بچه‌های دیگر به ترتیب سن ۲ سکه بیشتر از نفر قبلی بدهد. درضمن هیچ کدام از بچه‌ها هم‌سن نبودند. می خواهیم مجموع پول‌هایی که مادر بزرگ گلاره به نوه‌های خود داده است و مقدار عیدی نفر پانزدهم را به‌دست آوریم. دنباله‌ی زیر نشان‌دهنده‌ی عیدی‌های دریافتی از مادر بزرگ است:

۷۵ , ۱۲۵ , ۱۷۵ , ۲۲۵ , ۲۷۵ , , ۴۲۵ ,

این دنباله نمونه‌ای از یک **دنباله‌ی حسابی** است.

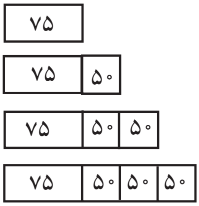
*هر جمله از یک دنباله‌ی حسابی از افزودن **یک مقدار ثابت** به جمله‌ی قبلی به‌دست می‌آید. به این مقدار ثابت **قدر نسبت** می گوییم.*

دنباله‌ی عیدی‌ها شبیه دنباله‌ی اعداد طبیعی است، با این تفاوت که هر جمله‌ی آن با افزودن عدد ۵۰ به جمله‌ی قبلی به‌دست می‌آید. با این حال، این دنباله حالت تعمیم یافته‌ای از مثال ردیف‌های گل و اعداد از ۱ تا ۱۰۰ است که با آن‌ها آشنا شدیم. در دو مثال قبلی، اولین جمله‌ی دنباله‌ها (اولین ردیف گل‌ها) عدد ۱ بود و به‌ترتیب در سطرها (ردیف‌های) بعدی یک گُل افزوده شد، یعنی اختلاف هر دو جمله در آن‌ها دقیقاً ۱بود، امّا در این دنباله، جمله‌ی اوّل ۷۵ است و جمله‌ها به ترتیب ۵۰ تا ۵۰ تا زیاد شده‌اند، یعنی اختلاف هر دو جمله در این دنباله دقیقاً ۵۰ است.



تمرین ۴: مجموع پول‌هایی که مادر بزرگ به ۱۵ نفر از نوه‌های خود داده است چه‌قدر است؟

در فعّالیت ۲ــ۱، پیدا کردن تعداد گل‌ها در هر ردیف ساده بود، زیرا گل‌های هر ردیف یکی یکی اضافه می‌شدند و صدمین جمله در دنباله‌ی اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ همان صد است. اگر فرض کنیم مادر بزرگ ۱۰۰ نوه داشته باشد پیدا کردن مقدار پرداختی مادر بزرگ به این صد نوه به این وضوح نیست و اگر روشی برای به‌دست آوردن آن‌ها نداشته باشیم، صد بار جمع کردن این اعداد کار وقت‌گیری است! پس دوباره جمله‌های این دنباله را به‌طریقی دیگر می‌نویسیم تا روش مناسب را پیدا کنیم :



تمرین ۵: جمله‌های پنجم تا دهم را حدس بزنید و سپس با ادامه‌ی نمودار حدس خود را آزمایش کنید.

می‌توانیم این جمله‌ها را به‌صورت زیر بنویسیم :

جمله اوّل $= ۷۵+۰\times ۵۰,$

جمله دوّم $= ۷۵+۱\times ۵۰,$

جمله سوّم $= ۷۵+۲\times ۵۰,$

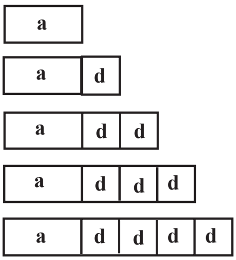
جمله چهارم $= ۷۵+۳\times ۵۰,$

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، کم کم روش مناسب را پیدا می‌کنیم زیرا بین شماره (ترتیب) جمله‌ها و تعداد ۵۰ تومانی‌های افزوده شده رابطه‌ای دیده می‌شود یعنی در هر جمله، تعداد ۵۰ تومانی‌های اضافه شده یکی کمتر از شماره‌ی جمله است. با این اطلاعات، می‌توانیم پرداختی مادربزرگ به n اُمین نوه‌ی خود را حدس بزنیم :

جمله n اُم $= ۷۵+(n-۱)\times ۵۰$

اگر به جای جمله‌ی اوّل که ۷۵ است حرف a و به جای ۵۰ حرف d[1] (اختلاف هر دوجمله) را قرار دهیم، آن وقت دنباله‌ی حسابی را در حالت کلّی نشان داده‌ایم! یا به بیان دیگر نمایش یک دنباله‌ی

۱ــ d اولین حرف کلمه‌ی difference به‌معنای فاصله یا اختلاف ثابت هر دو جمله‌ی متوالی است.



حسابی با جمله‌ی اوّل a و قدرنسبت d چنین است :

$$a, a+d, a+۲d, a+۳d, \ldots, a+(n-۱)d, \ldots$$

یعنی nاُمین جمله‌ی این دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی

$$a+(n-۱)d$$

به‌دست می‌آید و این راه میان‌بری است که ما را از محاسبات کسل‌کننده بی‌نیاز می‌کند.

برای محاسبه‌ی مجموع این جمله‌ها چه می‌توان کرد؟

به نمودار بالا توجّه کنید. آن‌را تا nاُمین جمله ادامه می‌دهیم و بعد به دنبال مجموع nجمله می‌گردیم. می‌بینیم که جمله‌ی اوّل به تعداد جمله‌ها تکرار شده است، یعنی این مجموع شامل n تا a است. از طرف دیگر جملات d ، ۲d ، ۳d ، ...$(n-۱)d$ نیز وجود دارند که بخشی از مجموع ما را تشکیل می‌دهند، درنتیجه

$$\text{مجموع جمله‌ها} = S = na + ۱d + ۲d + ۳d + \quad + (n-۱)d$$

اگر به جمله‌های بعد از na توجّه کنید همگی در d مشترک هستند و می‌توانیم برای سهولت کار از d فاکتور بگیریم

$$S = na + [۱+۲+۳+\ldots+(n-۱)]d \qquad (۱)$$

ضریب d مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا $n-۱$ است و با استفاده از رابطه‌ی (*) دربند ۲ ــ ۲ می‌توان آن را به این صورت نوشت

$$S_۱ = \frac{\text{(جمله‌ی آخر + جمله‌ی اوّل) تعداد جمله‌ها}}{۲}, \qquad (۲)$$

یا

$$S_۱ = \frac{(n-۱)[۱+(n-۱)]}{۲},$$

یا

$$\boxed{S_۱ = \frac{(n-۱)n}{۲}}$$

این مجموع را در رابطه‌ی (۱) به جای ضریب d قرار می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم

$$S = na + \left(\frac{(n-۱)n}{۲}\right)d$$

آیا می‌توانیم این رابطه را به‌صورت رابطه‌ی (۲) دربیاوریم؟ یعنی آیا مجموع n جمله‌ی اوّل یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اوّل a و قدر نسبت d نیز همان **نصف تعداد جملات** $\times$ **مجموع جمله‌های اول و آخر** می‌شود؟

معمولاً در ساده کردن عبارت‌ها، علاوه‌بر عوامل مشترک، از عوامل مشکل آفرین از جمله کسرها نیز تا حد امکان فاکتور می‌گیریم تا رابطه‌ی به‌دست آمده به‌ساده‌ترین شکل ممکن درآید. در این مورد هم چنین می‌کنیم

$$S = \frac{n}{۲}[۲a + (n-۱)d] \qquad (۳)$$

این رابطه به رابطه‌ی (۲) بسیار نزدیک است. قبلاً دیده بودیم که جمله‌ی nاُم یک دنباله‌ی حسابی $a+(n-۱)d$ است. با کمی دقّت در (۳) متوجّه می‌شویم که اگر $۲a$ را به‌صورت $a+a$ بنویسیم، درواقع (۲) را به‌دست آورده‌ایم

$$S = \overset{\text{تعداد جمله‌ها}}{\frac{n}{۲}}[\underbrace{a}_{\text{جمله‌ی اوّل}} + \underbrace{a+(n-۱)d}_{\text{جمله‌ی آخر}}] \;,$$

یعنی

$$S = \frac{\text{(جمله‌ی آخر + جمله‌ی اوّل) تعداد جمله‌ها}}{۲}$$

$$S = \frac{n}{۲}(a + l)$$ [۱]

اگر دوباره به مسأله‌ی گوس و جمع تعداد گل‌ها بازگردیم، می‌بینیم که آن‌ها حالت‌های خاصّی ازدنباله‌های حسابی بودند که در آن‌ها d ، یعنی قدر نسبت، عدد ۱ و جمله‌ی اوّل نیز ۱ بود. با این حال همگی ماهیت یکسان دارند و مجموع چنین دنباله هایی با رابطه‌ی یکسانی به‌دست می‌آیند.

۱ــ l اول کلمه‌ی last است.

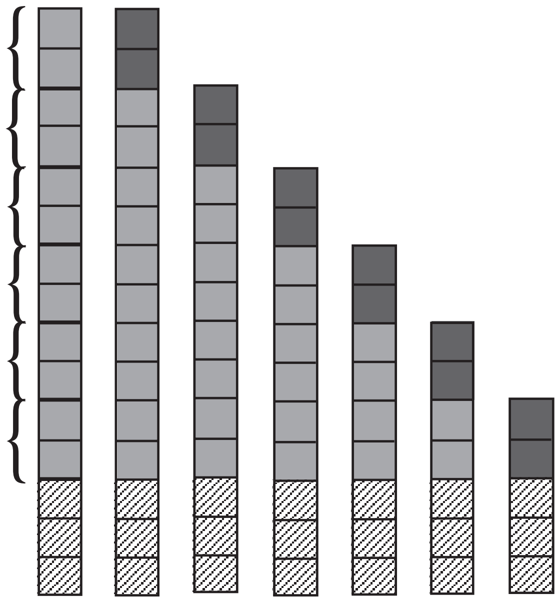
تمرین ۶: با توجّه به روشی که گوس، مجموع n جمله‌ی اوّل دنباله‌ی طبیعی را به‌دست آورد، مجموع n جمله‌ی اوّل دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت d و جمله‌ی اوّل a را به‌دست آورید. سپس نتیجه را با رابطه‌ی (۲) مقایسه کنید.

اینجا با دنباله‌های حسابی افزایشی آشنا شدیم، یعنی دنباله‌هایی که قدر نسبت آن‌ها مثبت بود و هر جمله از جمله‌ی قبلی بیشتر می‌شد. امّا همیشه چنین نیست و گاهی جمله‌های دنباله‌ی حسابی به‌میزان ثابتی کاهش می‌یابند. به مثال زیر توجّه کنید :

مثال: خواهر گلاره ۱۵ سکّه‌ی ۲۵ تومانی دارد و می‌خواهد به هریک از بچّه‌های کوچک‌تر از خود در فامیل دو سکّه عیدی بدهد و سه سکه را نیز برای خودش نگه دارد. وضعیّت موجودی خواهر گلاره قبل و بعد از دادن عیدی، دنباله‌ی حسابی زیر را می‌سازند

۳۷۵ ,۳۲۵ , ۲۷۵ , ۲۲۵, ۱۷۵, ۱۲۵, ۷۵

همان‌طورکه مشاهده می‌کنید، قدر نسبت این دنباله، عدد ۵۰- است و نمودار آن به‌صورت زیر است :



*در دنباله‌ی حسابی، اگر مقدار ثابت، **مثبت** باشد، جمله‌های دنباله به‌اندازه‌ی ثابتی افزایش می‌یابند و اگر مقدار ثابت، **منفی** باشد، جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی کاهش می‌یابند.*

تمرین

۱ــ جاهای خالی را در دنباله‌های حسابی زیر پر کنید :

الف) ۱۰ □ ۵۰

ب) ۱۰ □ □ ۵۰

پ) ۱۰ □ □ □ ۵۰

ت) ۱۰ □ □ □ □ ۵۰

ث) ۱۰ □ □ □ □ □ ۵۰

۲ــ کدامیک از دنباله‌های زیر حسابی هستند؟ آن‌ها را معلوم کرده و قدر نسبت آن‌ها را پیدا کنید.

الف) ۴, ۲۴, ۴۴, ۶۴, ۸۴, ...

ب) ۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸, ...

پ) ۵, ۵, ۵, ۵, ۵,...

ت) ۱۰, ۱۰۰, ۱۰۰۰, ۱۰۰۰۰, ۱۰۰,۰۰۰, ...

ث) ۲۰, ۲۱, ۲۳, ۲۶, ۳۰,...,...

ج) ۱۵, ۱۴, ۱۳, ۱۲, ۱۱, ...

۳ــ مجموع ۱۵ جمله‌ی اوّل دنباله‌های حسابی تمرین ۲ را حساب کنید.

۴ــ دنباله حسابی روبرو را درنظر بگیرید : ۱ ,۵, ۹, ۱۳, ۱۷, ...

و هر جمله آن را در ۲ ضرب کنید. دنباله‌ی ۲,۱۰, ۱۸, ۲۶, ۳۴, ... به‌دست می‌آید.

الف) آیا دنباله‌ی حاصل نیز یک دنباله‌ی حسابی است؟

ب) اگر جمله‌های دنباله‌ی حسابی را در یک عدد ضرب کنیم، آیا دنباله‌ی حاصل همیشه دنباله‌ی حسابی خواهد شد؟ چرا؟

۵ ــ مجموع ۵۰ جمله‌ی اوّل یک دنباله‌ی حسابی ۲۰۰ و مجموع ۵۰ جمله‌ی بعدی آن ۲۷۰۰ است، جمله‌ی اوّل این دنباله را پیدا کنید.

۶ــ در فعّالیت ۱، ردیف صفر را به گل‌ها اضافه کنید : یعنی در ردیف صفر هیچ گلی نباشد و در ردیف ۱ یک گل و به همین ترتیب تا در ردیف ۷ که هفت گل قرار می‌گیرد. این‌بار ترتیب چیدن گل‌ها چه شکلی می‌سازد؟ تعداد گل‌ها را با توجه به مساحت این شکل

به‌دست آورید.

۷ــ مجموع[1] ۵ جمله‌ی اوّل یک دنباله‌ی حسابی ۱۰۰ و مجموع سه جمله‌ی بزرگ‌تر هفت برابر مجموع دو جمله‌ی کوچک‌تر است. جمله‌های این دنباله را پیدا کنید. (قدر نسبت مثبت فرض شود)

۲ــ۴ــ دنباله‌ی هندسی

فعّالیت ۲ــ۳

نیما به دنبال شغل مناسبی می‌گشت تا بتواند هم هزینه‌ی تحصیل خود را تأمین کند و هم مهارت‌های شغلی خود را بالا ببرد، در ضمن فرصت کافی برای درس خواندن داشته باشد، او در صفحه‌ی نیازمندی‌های روزنامه، چشمش به یک آگهی درباره‌ی شغل مورد علاقه‌اش افتاد که نوشته بود: «به یک جوان وظیفه شناس و ماهر در زمینه‌ی مورد نظر نیازمندیم. برای کار خوب دستمزد خوب می‌دهیم. روز اوّل به شما یک ریال و سپس تا پایان ماه، هر روز دستمزد شما را دوبرابر می‌کنیم. متقاضیان با در دست داشتن مدارک و یک معرفی‌نامه‌ی معتبر به آدرس ... مراجعه نمایند.»

نیما اوّل از دستمزدِ وعده داده شده خنده‌اش گرفت! امّا پس از چند لحظه از روی کنجکاوی و به عنوان سرگرمی، تصمیم گرفت درآمد یک ماه را محاسبه نماید. ما هم به همراه نیما، به بررسی راه‌های مختلف محاسبه‌ی دستمزدهای روزانه و درآمد ماهانه‌ی وعده داده شده می‌پردازیم تا با تأکید پیشنهاد ردّ یا قبول این شغل را به او بدهیم!

شاید طبیعی‌ترین راهی که به ذهن برسد، دوبرابر کردن دستمزد روز قبل برای به دست آوردن دستمزد روز بعد و ادامه آن تا ۲۹ ، ۳۰ یا ۳۱ روز (تعداد روزهای ماه‌های مختلف سال) باشد[2]، آیا صرف وقت برای چنین کار یکنواختی معقول به نظر می‌رسد؟ شاید بتوانیم چاره‌ای بیندیشیم و راه میان‌بری برای انجام این محاسبات پیدا کنیم. در تلاش برای یافتن این راه میان‌بُر، با قدرت و ظرافت ریاضی بیشتر آشنا می‌شویم، زیرا در هر دو صورت (قبول یا ردّ پیشنهاد) از وقتی که صرف کرده‌ایم پشیمان نخواهیم شد، چرا که با ساختار مسأله بیشتر آشنا شده‌ایم. در واقع این آگهی بهانه‌ای برای ما

۱ــ برگرفته از پولیا، ۱۹۶۲ که اصل مسأله از پاپیروس رایند در مصر باستان گرفته شده است.

۲ــ می‌توانید از ماشین‌حساب استفاده کنید.

خواهد شد تا چیزهای جدیدتری یاد بگیریم.

اگر کسی شغلی به شما پیشنهاد کند که دستمزد روز اول آن یک ریال باشد و سپس تا پایان ماه این دستمزد هر روز دوبرابر شود، آیا شغل را می‌پذیرید یا رد می‌کنید؟

برای یافتن پاسخ این سؤال می‌توانیم جدولی تهیه کنیم و دستمزدهای روزانه را در آن یادداشت کنیم. الگویی برای ادامه‌ی کار پیدا نماییم و مجبور نباشیم که وقت زیادی را صرف آن کنیم.

(جدول ۱)

روزهای ماه	دستمزد روزانه
۱	۱
۲	۱×۲=۲
۳	۲×۲=۴
۴	۴×۲=۸
۵	۸×۲=۱۶
۶	۱۶×۲=۳۲

قبل از آن‌که جدول را ادامه دهیم به بررسی آن می‌پردازیم، شاید الگوی مناسبی پیدا کنیم و با دنبال کردن آن، از ادامه‌ی این کار بی‌نیاز شویم.

با دقّت در جدول (۱)، متوجّه می‌شویم که دستمزدهای روزانه در ستون دوّم توان‌های ۲ هستند و رابطه‌ای نیز بین روزهای ماه و توان‌های ۲ در ردیف نظیر آن‌ها در آن ستون وجود دارد. بنابراین جدول (۲) را تشکیل می‌دهیم.

(جدول ۲)

روزهای ماه	دستمزد روزانه
۱	۱=۲^{۰}
۲	۲=۲^{۱}
۳	۴=۲^{۲}
۴	۸=۲^{۳}
۵	۱۶=۲^{۴}
۶	۳۲=۲^{۵}

تمرین ۷: دستمزد روز دهم را از روی جدول حدس بزنید. سپس با ادامه‌ی جدول، حدس خود را به آزمایش بگذارید. بعد از اطمینان از درستی حدس خود، دستمزد روزهای بیست و نهم، سی‌اُم و سی‌و یکم را پیدا کنید.

حالا که دستمزدهای روزهای بیست و نهم، سی‌اُم و سی‌یکم را هم به‌دست آوردیم، می‌توانیم عدد دلخواه n کوچک‌تر یا مساوی ۳۱ را به عنوان نماینده‌ی روز انتخاب کنیم و رابطه‌ی به‌دست آمده از جدول (۲) را دوباره بنویسیم، که جدول (۳) به‌دست می‌آید.

با دقّت در جدول (۳) حدس ما به یقین تبدیل شد و مطمئن شدیم که دستمزد هر روز از رابطه‌ی «**۲ به توان یکی کمتر از آن روز**» به‌دست می‌آید. با ادامه‌ی جدول، دستمزد روز nاُم (n عددی طبیعی) را پیش‌بینی می‌کنیم، که در جدول (۴) آمده است.

(جدول ۳)

روز = n		دستمزد روزانه
اول	۱	$۲^{n-۱} = ۲^{۱-۱} = ۲^{۰}$
دوم	۲	$۲^{n-۱} = ۲^{۲-۱} = ۲^{۱}$
سوم	۳	$۲^{n-۱} = ۲^{۳-۱} = ۲^{۲}$
چهارم	۴	$۲^{n-۱} = ۲^{۴-۱} = ۲^{۳}$
پنجم	۵	$۲^{n-۱} = ۲^{۵-۱} = ۲^{۴}$
ششم	۶	$۲^{n-۱} = ۲^{۶-۱} = ۲^{۵}$

این مسأله را به صورت نموداری نیز می‌توان نشان داد.

دیده می‌شود که با دانستن آخرین رابطه‌ی جدول (۴)، یعنی دستمزد nاُمین روز، می‌توانیم دستمزد هر روزی را که بخواهیم، به‌دست آوریم

(جدول ۴)

روز	n	دستمزد روزانه
روز اول	۱	$۲^{۰}$
روز دوم	۲	$۲^{۱}$
روز سوم	۳	$۲^{۲}$
روز چهارم	۴	$۲^{۳}$
روز یازدهم	۱۱	$۲^{۱۱-۱} = ۲^{۱۰}$
روز بیست و نهم	۲۹	$۲^{۲۹-۱} = ۲^{۲۸}$
روز سی‌اُم	۳۰	$۲^{۳۰-۱} = ۲^{۲۹}$
روز سی‌و یکم	۳۱	$۲^{۳۱-۱} = ۲^{۳۰}$

نکته‌ی جالب اینجاست که با مشاهده‌ی دستمزدهای روزهای مختلف، رابطه‌ی (۱) را نتیجه گرفتیم و حالا با استفاده از این نتیجه‌ی کلی، می‌توانیم بدون انجام محاسبات قبلی، دستمزد روزانه را پیدا کنیم. این همان قوت و ظرافت ریاضی بود که به دنبالش می‌گشتیم!

$$\text{دستمزد } n\text{اُمین روز} = ۲^{n-۱} \qquad (۱)$$

تمرین ۸: رابطه‌ی بین مراحل مختلف فعالیّت (۲ــ۳) و نتیجه‌گیری نهایی را با استقرای تجربی و استدلال استنتاجی بررسی کنید.

تمرین ۹: مقدار تقریبی دستمزد روزهای سی‌ام و سی و یکم را برحسب ریال و تومان به‌دست آورید. آیا می‌توانید در تصمیم‌گیری به نیما کمک کنید یا هنوز به دلایل بیشتری نیازمندید؟

فعالیت ۲ــ۴

درفعالیت۲ــ۳، دستمزد روزانه‌ی شغل پیشنهادی در آگهی روزنامه را بررسی کردیم. با این حال، هنوز از درآمد ماهانه اطّلاع درستی در دست نداریم. پس با تکمیل جدول (۱) صفحه‌ی ۳۲، به مطالعه‌ی درآمدها می‌پردازیم تا شاید الگوی مناسبی برای تعیین درآمد در nاُمین روز بیابیم.

با دقت در جدول (۵)، امکان وجود رابطه‌ای بین n و درآمد تاپایان روز nاُم را بررسی می‌کنیم :

(جدول ۵)

روز	n	دستمزد روز nاُم	درآمد تاپایان روز nاُم(مجموع دستمزدها)
روز اول	۱	$۲^{۰}=۱$	۱
روز دوم	۲	$۲^{۱}=۲$	$۱+۲=۳$
روز سوم	۳	$۲^{۲}=۴$	$۱+۲+۴=۷$
روز چهارم	۴	$۲^{۳}=۸$	$۱+۲+۴+۸=۱۵$
روز پنجم	۵	$۲^{۴}=۱۶$	$۱+۲+۴+۸+۱۶=۳۱$
روز ششم	۶	$۲^{۵}=۳۲$	$۱+۲+۴+۸+۱۶+۳۲=۶۳$

با توجه به جدول (۶) می‌توانیم رابطه‌ی عمومی پیدا کردن مجموع دستمزدها (درآمد ماهانه) را پیش‌بینی کنیم:

(۲) $\qquad$ درآمد ماهانه $= ۲^n - ۱$

(جدول ۶)

روز	n	دستمزد روز n اُم	درآمد تاپایان روز nاُم(مجموع دستمزدها)
روز اول	۱	$۲^{۱-۱} = ۲^۰ = ۱$	$۲^۱ - ۱ = ۱$
روز دوم	۲	$۲^{۲-۱} = ۲ = ۲^۱$	$۲^۲ - ۱ = ۳ = ۱+۲$
روز سوم	۳	$۲^{۳-۱} = ۲^۲ = ۴$	$۲^۳ - ۱ = ۷ = ۱+۲+۴$
روز چهارم	۴	$۲^{۴-۱} = ۲^۳ = ۸$	$۲^۴ - ۱ = ۱۵ = ۱+۲+۴+۸$
روز پنجم	۵	$۲^{۵-۱} = ۲^۴ = ۱۶$	$۲^۵ - ۱ = ۳۱ = ۱+۲+۴+۸+۱۶$
روز ششم	۶	$۲^{۶-۱} = ۲^۵ = ۳۲$	$۲^۶ - ۱ = ۶۳ = ۳۲ + ۱+۲+۴+۸+۱۶$
روز سی‌اُم	۳۰	$۲^{۳۰-۱}$	$۲^{۳۰} - ۱$

تمرین ۱۰: درآمد تقریبی را در روز سی‌ام و سی‌و یکم به‌دست آورید و با دلیل، به نیما تصمیم قاطع خود را در مورد قبول یا رد شغل پیشنهادی بگویید!

جدول (۶) به ما کمک کرد که میان‌بُر بزنیم و بدون جمع کردن و تنها با استفاده از رابطه‌ی (۲)، مجموع دستمزدهای روزانه را به‌دست آوریم.

تمرین ۱۱: آیا از رابطه‌ی (۲) می‌توانیم نتیجه بگیریم که

درآمد تا پایان روز nاُم = (۲× دستمزد روز nاُم) −۱

درستی نتیجه را با توجّه به جدول (۶) و رابطه‌ی (۲) بررسی کنید.

اگر دستمزد هر روز را یک جمله بنامیم و آن‌ها را در یک سطر بنویسیم، می‌بینیم که افزایش آن‌ها نسبت ثابتی دارد، یعنی هر جمله با دو برابر کردن جمله قبلی به‌دست می‌آید

۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲، ۶۴، ...

این جمله‌ها (اعداد) دنباله‌ی توان‌های ۲ را تشکیل می‌دهند.

حال می‌خواهیم از روش پیدا کردن دستمزدها در فعالیّت‌های قبلی استفاده کنیم و مسأله را تعمیم دهیم. به همین دلیل، به جای دستمزد پیشنهادی «یک ریال» برای روز اوّل مقدار a و به جای

«دوبرابر شدن»، r [۱] برابر شدن با شرط r بزرگ‌تر از یک و به جای ۳۰ روز، n روز را درنظر می‌گیریم. تغییر آگهی استخدام چنین خواهد بود *«اگر کسی به شما شغلی پیشنهاد کند که دستمزد روز اوّل آن a باشد و این دستمزد بدون توقّف هر روز r برابر شود، آیا پیشنهاد استخدام را برای n روز می‌پذیرید یا رد می‌کنید؟»*

با درنظر گرفتن این تغییرات، جدول (۴) را دوباره‌سازی می‌کنیم (جدول ۷).

(جدول ۷)

روز	n	دستمزد روزانه a ، نسبت افزایش r
جمله‌ی اول	۱	$ar^۰ = a$
جمله‌ی دوم	۲	$ar = ar^۱$
جمله‌ی سوم	۳	$(ar)r = ar^۲$
جمله‌ی چهارم	۴	$(ar^۲)r = ar^۳$
جمله‌ی پنجم	۵	$(ar^۳)r = ar^۴$
جمله‌ی n اُم	n	$ar^{n-۱}$

به جمله nاُم، **جمله‌ی عمومی** گفته می‌شود و آن را با t نمایش می‌دهند

جمله عمومی: $t = ar^{n-۱}$

دستمزدهای جدول (۷) را به ترتیب روزها در یک سطر می‌نویسیم :

$$a, ar, ar^۲, ar^۳, ar^۴, \quad , ar^{۲۹}, \quad , ar^{n-۱}$$

این جمله‌ها تشکیل یک دنباله‌ی هندسی می‌دهند و نسبت بین هر دو جمله‌ی متوالی غیرصفر یعنی r، که ثابت است را **قدر نسبت** می‌گویند. (a ۰)

*هر جمله از یک دنباله‌ی هندسی از ضرب جمله‌ی قبلی در **یک مقدار ثابت** به‌دست می‌آید. با فرض مثبت بودن جمله‌ی اول، اگر مقدار ثابت بزرگتر از یک باشد **دنباله افزایشی** و اگر مقدار ثابت کوچکتر از یک باشد، **دنباله کاهشی** خواهد بود.*

۱ــ r اوّل کلمه‌ی ratio به‌معنی نسبت است. در کتاب‌های قدیمی، به جای r از q که اوّل کلمه‌ی لاتین quitient است استفاده می‌کردند.

همان‌طور که در جدول (۶) دیدیم، برای به‌دست آوردن کل درآمد در پایان هر روز، مجموع دستمزدهای روز اوّل تا آن روز را محاسبه کردیم. همان روند را ادامه می‌دهیم و راه میان‌بُری برای پیدا کردن مجموع n جمله‌ی اوّل یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a و مقدار ثابت r جستجو می‌کنیم :

(۳) مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی $= a + ar + ar^{۲} + ar^{۳} + \quad + ar^{n-۲} + ar^{n-۱}$

فعالیت ۲ــ ۵

هر دو شیوه‌ای را که برای به‌دست آوردن مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی اتخاذ کردید، در مورد پیدا کردن مجموع n جمله اوّل یک دنباله‌ی هندسی نیز به کار ببرید. آیا به نتیجه‌ای رسیدید؟ آیا آن شیوه‌ها را توانستید به عنوان یک روش در این مورد هم به‌کار ببرید یا خیر؟ نتیجه به‌دست آمده را بررسی کنید.

همان‌طور که در مورد پیدا کردن n جمله‌ی اوّل دنباله‌ی حسابی ملاحظه کردید، سعی ما بر این بود که تا حد امکان، تعداد مجهول‌ها را کم بکنیم و رابطه‌ای پیدا کنیم که اجزای کمتر و کلیت بیشتری داشته باشد. با دقّت در رابطه‌ی (۳) می‌بینیم که اگر رابطه‌ی (۴) را از ضرب r در (۳) نتیجه بگیریم، بسیاری از جمله‌های رابطه‌ی اخیر با (۳) مشابه هستند

$$S_n = a + ar + ar^{۲} + ar^{۳} + \ldots + ar^{n-۲} + ar^{n-۱}$$

$$S_n r = ar + ar^{۲} + ar^{۳} + ar^{۴} + \ldots + ar^{n-۱} + ar^{n} \qquad (۴)$$

با کم‌کردن (۳) از (۴) **جمله‌های** مشابه حذف می‌شوند و آن‌چه که باقی می‌ماند چنین است

$$S_n r - S_n = ar^{n} - a \qquad (۵)$$

چون مجهول ما، S_n ، یعنی مجموع n جمله‌ی اوّل یک دنباله‌ی هندسی بود، در نتیجه با فاکتورگیری از عامل مشترک S_n و a در دو سمت رابطه‌ی (۵)، مقدار S_n را به‌دست می‌آوریم

$$S_n(r-۱) = a(r^{n}-۱)$$

یا

$$\boxed{S_n = \frac{a(r^{n}-۱)}{r-۱}} \quad \text{یا} \quad \boxed{S_n = \frac{a(۱-r^{n})}{۱-r}} \qquad (۶)$$

تمرین ۱۲: مجموع ۵۰ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول ۴ و قدر نسبت ۳ را به‌دست آورید.

تمرین ۱۳: با توجّه به اینکه جمله‌ی عمومی یا جمله‌ی nاُم یک دنباله‌ی هندسی برابر است با ar^{n-1} ، رابطه‌ی (۶) را برحسب جمله‌ی عمومی بنویسید.

فعالیت ۲ــ۶

الف ــ قدر نسبت این دنباله‌ی هندسی ...، ۴،۴،۴،۴ را پیدا کنید؛

ب ــ با استفاده از رابطه‌ی (۶) سعی کنید مجموع n جمله‌ی اوّل این دنباله را به‌دست آورید. به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟

همان‌طور که در فعالیت ۴ دیدید، اگر قدر نسبت یک دنباله‌ی هندسی یک باشد، رابطه‌ی (۶) به صورت کسر $\frac{0}{0}$ [1] درمی‌آید، در نتیجه لازم است که رابطه‌ی (۶) را محدود به دنباله‌های هندسی با قدر نسبت ۱ r بکنیم

$$\boxed{S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \quad ; \quad r \quad 1} \qquad (7)$$

تمرین ۱۴: چگونگی رابطه (۷) را برای حالتی که r بزرگتر از صفر و کوچکتر از یک است بررسی کنید. اگر تعداد جمله‌های دنباله‌ی هندسی بیشتر و بیشتر شود، چه تغییراتی در مجموع فوق پیش می‌آید؟ درباره‌ی آن فکر کنید!

فعالیت ۲ــ۷

مدّت ۷۰ سال طول می‌کشد تا تعداد اتم‌های تجزیه شده‌ی اورانیوم ۲۳۲ به نصف برسد و

۱ــ کسر $\frac{0}{0}$ تعریف نشده است.

دوباره ۷۰ سال دیگر طول می‌کشد تا نیمی از اتم‌های باقی مانده، یعنی نیمی از نصف تجزیه شوند و این روند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند. فرض کنید که نمونه‌ای از این نوع اورانیوم شامل ۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ اتم در سال ۱۰۰۰ میلادی بوده است. در نتیجه، مقدار باقی‌مانده‌ی اورانیوم در پایان هر هفتاد سال که آن را یک **دوره‌ی زمانی** می‌نامیم، به نصف مقدار قبلی کاهش می‌یابد

$$۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \quad , \quad ۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰\times\frac{۱}{۲} \; , \; (۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰\times\frac{۱}{۲})\times\frac{۱}{۲} \; \text{و} \; \ldots$$

با دقّت در سطر بالا، متوجّه می‌شویم که این اعداد نمایشگر یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اوّل $a =$ ۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ و قدر نسبت $r = \frac{۱}{۲}$ هستند. مقدار اورانیوم باقی‌مانده در سال‌های ۱۰۷۰، ۱۱۴۰، ۱۲۱۰، ۱۲۸۰ و ۱۳۵۰ یعنی در یک، دو، سه، چهار و پنج دوره‌ی زمانی را محاسبه می‌کنیم :

(جدول ۸)

مرتبه‌ی جمله	سال میلادی	تعداد دوره‌های زمانی	مقدار اورانیوم باقی‌مانده	نتیجه
جمله‌ی اول	۱۰۰۰	۰×۷۰	۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰	۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰
جمله‌ی دوم	۱۰۷۰	۱×۷۰	$۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰\times\frac{۱}{۲}$	۵۰۰,۰۰۰,۰۰۰
جمله‌ی سوم	۱۱۴۰	۲×۷۰	$(۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰\times\frac{۱}{۲})\times\frac{۱}{۲}$	۲۵۰,۰۰۰,۰۰۰
جمله‌ی چهارم	۱۲۱۰	۳×۷۰	$(۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})\times\frac{۱}{۲}$	۱۲۵,۰۰۰,۰۰۰
جمله‌ی پنجم	۱۲۸۰	۴×۷۰	$(۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})\times\frac{۱}{۲}$	۶۲,۵۰۰,۰۰۰
جمله‌ی ششم	۱۳۵۰	۵×۷۰	$(۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})\times\frac{۱}{۲}$	۳۱,۲۵۰,۰۰۰

در جدول فوق، مشاهده می‌کنیم که

الف) مقدار اورانیوم باقی‌مانده به سرعت روبه زوال می‌رود ؛

ب) بین دوره‌های زمانی، تعداد ضریب‌های $r = \frac{۱}{۲}$ و مرتبه‌ی جمله‌های این تصاعد هندسی رابطه‌ای برقرار است ؛

با توجّه به مشاهده‌ی فوق، جدول (۸) را دوباره می‌نویسیم که جدول (۹) حاصل می‌شود.

(جدول ۹)

سال	تعداد دوره‌های زمانی	مقدار اورانیوم باقیمانده	مرتبه‌ی جمله‌های دنباله
۱۰۰۰	۰	$1,000,000,000 \times (\frac{1}{2})^0$	جمله‌ی اول
۱۰۷۰	۱	$1,000,000,000 \times (\frac{1}{2})^1$	جمله‌ی دوم
۱۱۴۰	۲	$1,000,000,000 \times (\frac{1}{2})^2$	جمله‌ی سوم
۱۲۱۰	۳	$1,000,000,000 \times (\frac{1}{2})^3$	جمله‌ی چهارم
۱۲۸۰	۴	$1,000,000,000 \times (\frac{1}{2})^4$	جمله‌ی پنجم
۱۳۵۰	۵	$1,000,000,000 \times (\frac{1}{2})^5$	جمله‌ی ششم

تمرین۱۵: مقدار اورانیوم باقیمانده در سال‌های ۱۷۰۰ و ۱۹۸۰ را اوّل حدس بزنید و سپس محاسبه کنید.

شاید از خود بپرسید که چه زمانی مقدار اورانیوم به صفر نزدیک می‌شود؟ برای یافتن پاسخ، جدول (۹) را ادامه می‌دهیم که نتایج در جدول ۱۰ ثبت شده است.

(جدول ۱۰)

سال	تعداد دوره‌های زمانی	مقدار اورانیوم باقیمانده	مرتبه‌ی جمله‌های دنباله
۱۰۰۰	۰	$1,000,000,000 \times (\frac{1}{2})^0$	جمله‌ی اول
۱۰۷۰	۱	$1,000,000,000 \times (\frac{1}{2})^1$	جمله‌ی دوم
۱۱۴۰	۲	$1,000,000,000 \times (\frac{1}{2})^2$	جمله‌ی سوم
۱۲۱۰	۳	$1,000,000,000 \times (\frac{1}{2})^3$	جمله‌ی چهارم
۱۲۸۰	۴	$1,000,000,000 \times (\frac{1}{2})^4$	جمله‌ی پنجم
۱۳۵۰	۵	$1,000,000,000 \times (\frac{1}{2})^5$	جمله‌ی ششم
۱۹۸۰	۱۴	$1,000,000,000 \times (\frac{1}{2})^{14}$	جمله‌ی پانزدهم
	$n-1$	$1,000,000,000 \times (\frac{1}{2})^{n-1}$	جمله‌ی n اُم
	n	$1,000,000,000 \times (\frac{1}{2})^{n}$	جمله‌ی $(n+1)$ اُم

همان‌طور که در تمرین ۱۵ دیدید، هرقدر تعداد دوره‌های زمانی (n) بیشتر می‌شود، مقدار $(\frac{۱}{۲})^n$ و مقدار باقیمانده‌ی اورانیوم کم‌کم به صفر نزدیک شود.

تمرین ۱۶: به کمک ماشین حساب، مقدار اورانیوم باقیمانده را برای nهای بزرگتر از ۱۴ و کوچکتر از ۲۰ به‌دست آورید (n عدد طبیعی است) و نتیجه را گزارش کنید. سپس تا آنجایی که می‌توانید، پیش بروید و سالی که مقدار اورانیوم باقی‌مانده بسیار نزدیک به صفرمی‌شود را پیدا کنید.

همان‌طور که در تمرین ۱۴ حدس زدید، با افزایش تعداد دوره‌های زمانی، مقدار اورانیوم کم‌و کمتر می‌شود. پس از گذشت ۳۰۰ دوره‌ی زمانی ($۳۰۰\times۷۰=۲۱۰۰۰$) یعنی در سال ۲۲۰۰۰ میلادی، مقدار اورانیوم را حساب می‌کنیم

$$\text{جمله‌ی سیصدویکم} = ar^{۳۰۰} = ۱{,}۰۰۰{,}۰۰۰{,}۰۰۰\times(\frac{۱}{۲})^{۳۰۰} = ۴/۹۰۹\times۱۰^{-۸۲}$$

می‌بینیم که این مقدار خیلی نزدیک به صفر است. اگر محاسبه را ادامه دهیم، جمله‌ی سیصدو بیست و نهم یعنی $۱{,}۰۰۰{,}۰۰۰{,}۰۰۰\times(\frac{۱}{۲})^{۳۲۸}$ را ماشین حساب صفر نشان می‌دهد.

الف ــ در یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت بزرگ‌تر از صفر و کوچک‌تر از یک، هرقدرتعداد جمله‌ها (n) بیشتر و بیشتر شود، جمله‌ی nاُم (a_n) به صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شود. به زبان نمادین، اگر تعداد جمله‌ها یعنی n به سمت بی‌نهایت میل کند، حد a_n صفر می‌شود (از نماد ∞ برای نشان دادن بی‌نهایت استفاده می‌شود و Limit به معنای حد است.)

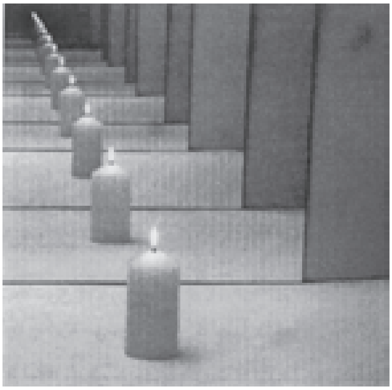
$$\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$$

ب ــ در فعالیّت ۱، دیدیم که چون مقدار قدر نسبت بزرگ‌تر از یک بود ($r=۲>۱$) درنتیجه $r<r^۲<r^۳<...$، امّا در فعالیّت ۲ چون قدر نسبت کوچک‌تر از یک بود ($۰<r=\frac{۱}{۲}<۱$)، در نتیجه $r>r^۲>r^۳>...$. با بیشتر شدن n، r^n کوچک و کوچک‌تر می‌شود و به صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به زبان نمادین، حد r^n وقتی که n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند برابر صفر می‌شود

$$\lim_{n\to\infty} r^n = ۰$$

تمرین ۱۷ ــ مجموع یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اوّل a و قدر نسبت $۰ < r < ۱$ را بررسی کنید.

فعالیت ۲ــ ۸



به سوی بی‌نهایت[۳] :باطل‌نمای زنون نیاز به پیدایش یک نظریه برای فرایندهای نامتناهی داشت. همچنین نظریه‌ی چنین فرایندی، نیوتن ولایب نیتز را به سوی کشف حسابان راهبری کرد.

شاید داستان باطل‌نمای[۱] زنون را شنیده باشید! ماجرا از این قرار است که در زمان‌های دور، دونده‌ای قصد پیمودن یک مسیر را داشته است. زنون مسأله را چنین می‌دید که دونده در مرحله‌ی اوّل نصف مسافت را می‌پیماید، سپس نصف مسافت باقی‌مانده ــ یعنی نصفِ نصف مسافت ــ را می‌دود، بعداً نصفِ نصفِ نصفِ مسافت را طی می‌کند و به همین ترتیب تا به پایان مسیر برسد. با کمی دقّت، متوجه می‌شویم که مسافت‌های طی شده در هر مرحله، یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $r = \frac{۱}{۲}$ و جمله‌ی اوّل $a = \frac{۱}{۲}$ تشکیل می‌دهند

$$\frac{۱}{۲} \;,\; \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲} \;,\; (\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})\times\frac{۱}{۲} \;,\; (\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})\times\frac{۱}{۲} \;,\; \dots$$

در آن زمان، زنون به دلیل عدم آشنایی با نتایجی که در فعالیّت ۲ــ۷ به آن رسیدیم، دچار یک سردرگمی شده بود. علّت این بود که از یک طرف، توانایی محاسبه‌ی مجموع یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت مثبت و کوچک‌تر از یک، که تعداد جمله‌های آن روبه افزایش دائمی (تا بی‌نهایت) بودند را نداشت، یعنی نمی‌توانست به وسیله‌ی نمادها و ابزار ریاضی نشان دهد که مجموع مسافت‌های

۱ــ Zeno’s paradox

پیموده شده توسط دونده، بالاخره او را به انتهای مسیر می‌رساند! از طرف دیگر، در دنیای واقعی می‌دید که دونده بالاخره مسیر را تمام و کمال طی می‌کند و این‌جا بود که زنون این داستان را «باطل‌نما» نامید و جامعه‌ی ریاضی مدت‌ها دچار بحرانی بود که این باطل‌نما به‌وجود آورده بود.

با توجه به نتایجی که به‌دست آورده‌ایم، مجموع جمله‌های دنباله‌ی هندسی فوق را دوباره بررسی می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲}\ ,\ \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\ ,\ (\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})\times\frac{۱}{۲}\ ,\ (\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})\times\frac{۱}{۲}\ ,\ \ldots$$

دنباله‌ی فوق را به دو طریق زیر بازنویسی می‌کنیم

الف) $\frac{۱}{۲}\ ,\ (\frac{۱}{۲})^{۲}\ ,\ (\frac{۱}{۲})^{۳}\ ,\ (\frac{۱}{۲})^{۴}\ ,\ \ldots$

ب) $\frac{۱}{۲}\ ,\ \frac{۱}{۲^{۲}}\ ,\ \frac{۱}{۲^{۳}}\ ,\ \frac{۱}{۲^{۴}}\ ,\ \ldots$

تمرین ۱۸: با توجّه به رابطه‌ی (۶) مجموع n جمله‌ی اوّل یک دنباله‌ی هندسی یعنی S_n را در قسمت (ب) حساب کنید.

تمرین ۱۹: با توجّه به نتیجه‌ی تمرین ۱۶، بررسی کنید که با افزایش تعداد nها تا بی‌نهایت، وضعیّت $(\frac{۱}{۲})^n$ چگونه می‌شود؟ مقدار S_n چه‌قدر می‌شود؟ نتیجه‌ی کار را یادداشت کنید.

نتیجه‌گیری‌های شما را می‌توان به صورت حد مجموع این دنباله نوشت

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = ۱}$$

در حالت کلی، حد مجموع یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $۰ < r < ۱$ و جمله‌ی اوّل a، با توجّه به نتایج به دست آمده چنین است:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(۱-r^n)}{۱-r}$$

یا

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{۱-r}}$$

مسائل

۱ــ کدام‌یک از دنباله‌های زیر هندسی هستند؟ قدر نسبت را برای دنباله‌های هندسی پیدا کنید :

الف) ۱ ۴ ۹ ۱۶ ۲۵ ...

ب) ۷ ۱۴ ۲۱ ۲۸ ۳۵ ...

پ) ۶۰ ۳۰ ۱۵ ۷/۵ ۳/۷۵ ...

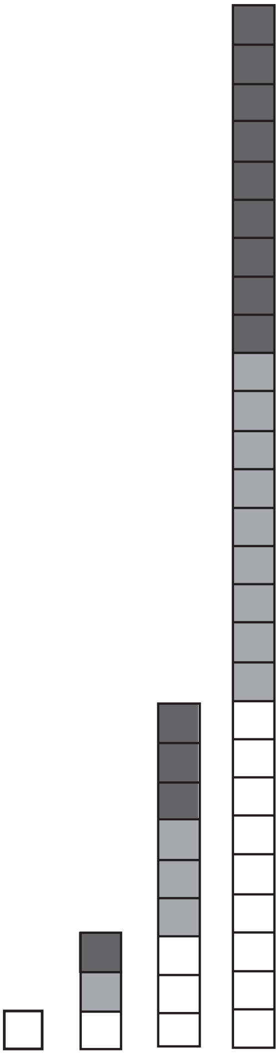
۲ــ نمودار سمت چپ، چهار جمله‌ی اوّل یک دنباله‌ی هندسی را نشان می‌دهد

الف) جمله‌ها را مشخص کنید ؛

ب) قدر نسبت را پیدا کنید ؛

پ) سه جمله‌ی بعدی را به‌دست آورید ؛

ت) مجموع ۱۲ جمله‌ی اول آن را محاسبه کنید.



۳ــ جاهای خالی را در دنباله‌های هندسی زیر پرکنید :

الف) ۴ , ۲۰ , □ , ۵۰۰ , □

ب) □ , □ , ۶۳ , ۱۸۹

پ) ۱ , □ , ۱۰۰۰۰۰۰

ت) ۱ , □ , □ , ۱۰۰۰۰۰۰

ث) ۱ , □ , ۶۴

ج) ۱ , □ , □ , ۶۴

چ) ۱ , □ , ۶۴۰۰۰۰۰۰

ح) ۱ , □ , □ , ۶۴۰۰۰۰۰۰

۴ــ اگر هر جمله‌ی دنباله‌ی هندسی

۱, ۳, ۹, ۲۷, ...

۴ واحد بیشتر شود، دنباله‌ی به‌وجود آمده چنین خواهد بود :

۵, ۷, ۱۳, ۳۱, ...

الف) آیا دنباله‌ی به‌دست آمده نیز یک دنباله‌ی هندسی است؟

ب) اگر هر جمله‌ی یک دنباله‌ی هندسی افزایش یکسانی داشته باشد، آیا دنباله‌ی جدید می‌تواند یک دنباله‌ی هندسی باشد؟

۵ ــ اگر هر جمله‌ی دنباله‌ی هندسی

۱, ۳, ۹, ۲۷, ...

در عدد ۴ ضرب شود، حاصل چنین خواهد بود :

۴, ۱۲, ۳۶, ۱۰۸, ...

الف) آیا دنباله‌ی به‌دست‌آمده یک دنباله‌ی هندسی است؟

ب) اگر هر جمله‌ی یک دنباله‌ی هندسی در عدد ثابتی ضرب شود، آیا دنباله‌ی به‌دست‌آمده همیشه یک دنباله‌ی هندسی است؟

۶ــ یک دنباله‌ی هندسی دارای چهار جمله است : مجموع جمله‌های اول و دوم۴ و مجموع دو جمله‌ی آخر۳۶ است. جمله‌های این دنباله را بیابید.

۲ ــ ۵ ــ دنباله‌ی مربعی

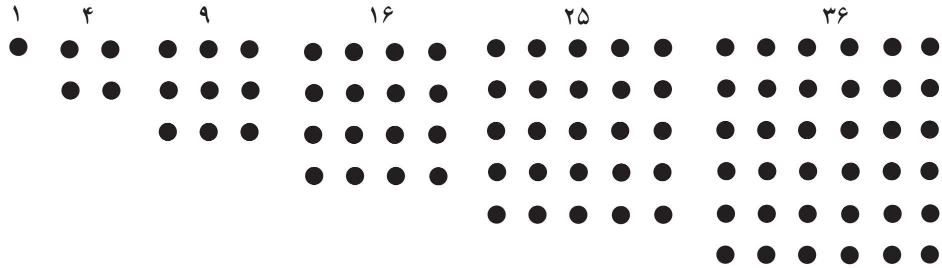
در میان لوحه‌های گِلی و سفالی که به‌وسیله‌ی بابِلیان در ۲۰۰۰ سال قبل از میلاد مسیح ساخته شده‌اند، دنباله‌های اعداد دیده می‌شوند. اضافه بر لوحه‌هایی که شامل دنباله‌های حسابی و هندسی هستند، یک لوحه یافت شده است که ۶۰ جمله‌ی اوّل دنباله‌ی زیر را نشان می‌دهد

۱,   ۴,   ۹,   ۱۶,   ۲۵,   ۳۶,   ۴۹,

همان‌طور که می‌بینید، جمله‌های دنباله‌ی فوق از ضرب هر عدد طبیعی متوالی در خودش به‌وجود آمده است و به همین دلیل به آن **دنباله‌ی مربعی** می‌گویند. دنباله‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر هم بازنویسی کرد

$۱^۲$, $۲^۲$, $۳^۲$, $۴^۲$, $۵^۲$, $۶^۲$, $۷^۲$,   ...

در حدود ۶۰۰ سال قبل از میلاد مسیح، ریاضیدان‌های یونانی غالباً از نقطه‌ها برای نمایش هندسی اعداد استفاده می‌کردند :



در واقع، شکل‌های بالا دلیل نام‌گذاری اعداد مربعی هستند.

> اعداد مربعی اعدادی هستند که می‌توان آن‌ها را در یک آرایه‌ی[1] مربعی شکل نمایش داد.

اگر به شکل‌ها دقّت کنید، می‌بینید که طول ضلع‌های مربع‌هایی که به ترتیب از ۴، ۹، ۱۶، ۲۵و ۳۶ نقطه تشکیل شده‌اند به ترتیب ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، یعنی ریشه‌ی[2] مربع‌های فوق هستند. دنباله‌ی مربع‌ها رابطه‌ی جالبی با دنباله‌ی حسابی اعداد فرد دارد. در واقع، مجموع اعداد فرد متوالی که از یک شروع می‌شوند، اعداد مربعی هستند

$۱ = ۱ = ۱^۲$

۱ــ array   ۲ــ root

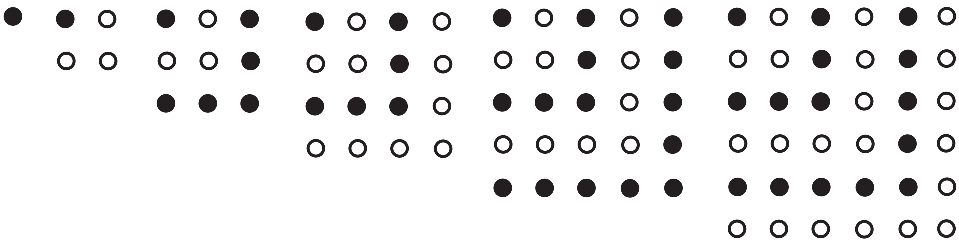
$$۱+۳=۴=۲^{۲}$$

$$۱+۳+۵=۹=۳^{۲}$$

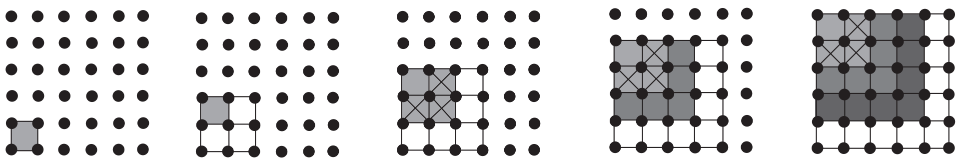
$$۱+۳+۵+۷=۱۶=۴^{۲}$$

$$۱+۳+۵+۷+۹=۲۵=۵^{۲}$$

اساس این رابطه در شکل‌های زیر دیده می‌شود :



آرایه‌ی این الگوها به دو صورت عددی و هندسی، به بهتر دیدن روابط موجود در الگوها کمک می‌کند. به شکل دیگری از آرایه فوق توجّه کنید :



فعالیت ۲ـــ۹

مربع‌هایی با ضلع‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را درنظر بگیرید. آنگاه محیط‌ها و مساحت‌های آن‌ها را به ترتیب و جداگانه یادداشت کنید. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، محیط‌ها و مساحت‌ها، هریک تشکیل یک دنباله‌ی عددی می‌دهند :

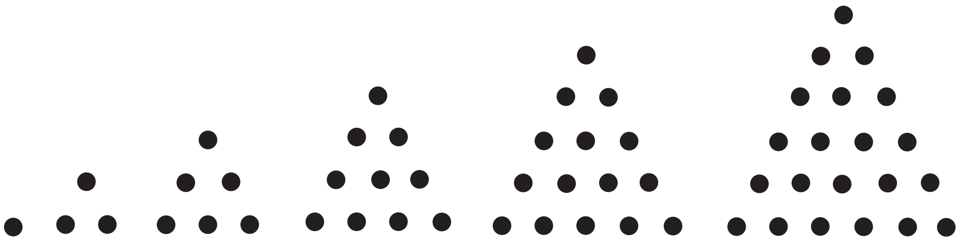
الف) نوع دنباله‌ها را مشخص کنید ؛

ب) اگر طول ضلع مربعی دوبرابر شود، محیط آن چه تغییری می‌کند؟

پ) اگر طول ضلع مربعی دوبرابر شود، مساحت آن چه تغییری می‌کند؟

۲ــ۶ ــ دنباله‌ی مثلثی

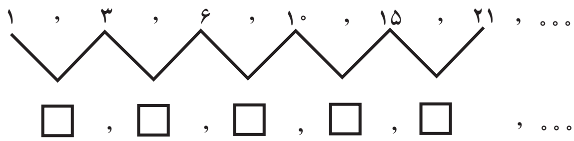
اعداد دنباله‌ی ...,۱,۳,۶,۱۰,۱۵ **مثلثی** نامیده شوند زیرا آن‌ها نماینده‌ی تعداد نقطه‌ها در یک آرایه‌ی مثلثی هستند :



فعالیت۲ــ۱۰

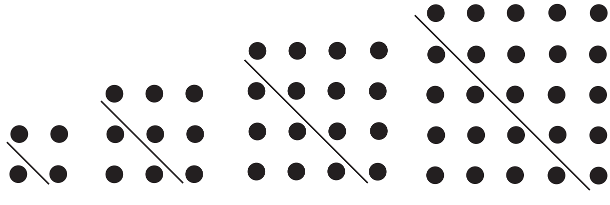
الف) شش جمله‌ی دنباله‌ی مثلثی بالا را عیناً یادداشت کنید. سپس پنج جمله‌ی بعدی این دنباله را با نقطه‌ها نشان دهید ؛

ب) هر جفت از جمله‌های متوالی این دنباله را باهم جمع کنید تا یک دنباله‌ی جدید ساخته شود. به نمونه‌ی زیر توجه کنید :



ویژگی دنباله‌ی نتیجه شده چیست؟

شکل زیر جواب شما را به تصویر می‌کشد :

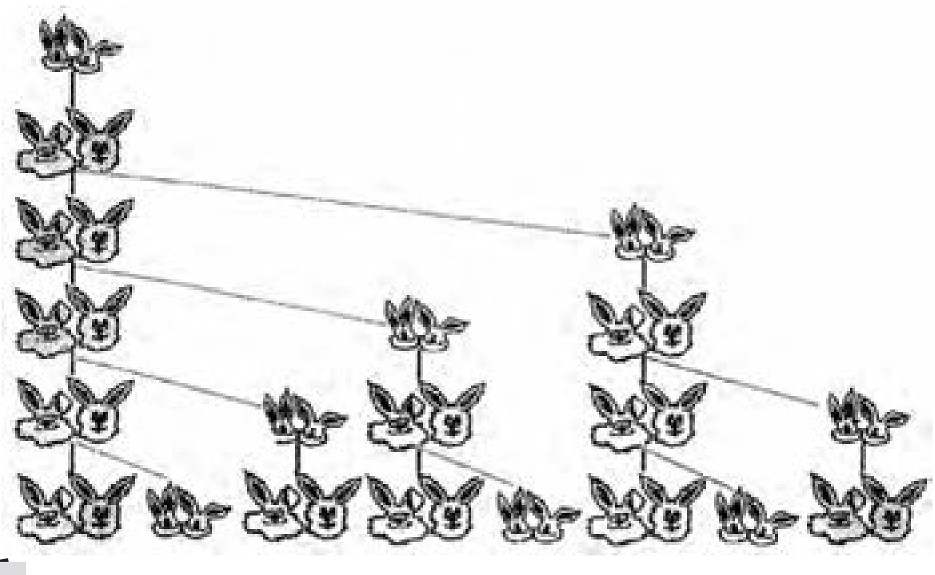


تمرین ۲۰: توان‌های ۳، ۴، الی آخرِ اعداد طبیعی، هریک تشکیل یک دنباله‌ی عددی می‌دهند که همگی در نوع خود جالب هستند. شما به عنوان تمرین دنباله‌ی عددی اعداد طبیعی مکعبی را بنویسید. آنگاه آن را با دنباله‌ی مساحت‌ها و محیط‌های مربع‌هایی با اضلاع متفاوت مقایسه کنید و نتیجه را یادداشت نمایید.

۲ــ۷ــ دنباله‌ی فیبوناتچی

یک جفت خرگوش نر و ماده‌ی یک ماهه، برای تولید مثل بسیار جوان هستند. اما فرض کنید که این جفت خرگوش در ماه دوم تولد خود و ماه‌های پس از آن، هر ماه یک جفت خرگوش نر و ماده به دنیا بیاورند. اگر هر جفت خرگوش متولد شده به همین روال تولید مثل کند و اگر هیچ‌کدام از خرگوش‌ها نمیرند، در شروع هر ماه چند جفت خرگوش وجود خواهد داشت؟ شکل زیر تعداد جفت خرگوش‌ها را در شش ماهه‌ی اول نشان می‌دهد:

فیبوناتچی



فعالیت ۲ــ۱۱

الف) جدول زیر با توجه به شکل تنظیم شده است. باقی جدول را کامل کنید ؛

ماه	جفت خرگوش‌های نوزاد	جفت خرگوش‌های بزرگ	مجموع جفت خرگوش‌ها
اول	۱	۰	۱
دوم	۰	۱	۱
سوم	☐	☐	☐
چهارم	☐	☐	☐
پنجم	☐	☐	☐
ششم	☐	☐	☐

ب) رابطه‌ی بین مجموع جفت خرگوش‌ها و جفت خرگوش‌های بزرگ و نوزاد را بنویسید.

پ) چه رابطه‌ای بین تعداد جفت خرگوش‌های بزرگ در یک ماه و تعداد کل جفت خرگوش‌ها درماه قبلی وجود دارد؟

همان‌طور که مشاهده کردید، تعداد جفت خرگوش‌ها طی شش ماه، دنباله‌ی زیر را تشکیل می‌دهند :

۱ , ۱ , ۲ , ۳ , ۵ , ۸

با کمی دقت می‌بینیم که جمله‌ی سوم مجموع دو جمله‌ی اول و دوم، جمله چهارم مجموع جمله‌ی دوم و سوم و الی آخر است. دنباله‌ی بالا را ادامه می‌دهیم :

۱ , ۱ , ۲ , ۳ , ۵ , ۸ ,۱۳, ۲۱, ۳۴, ...

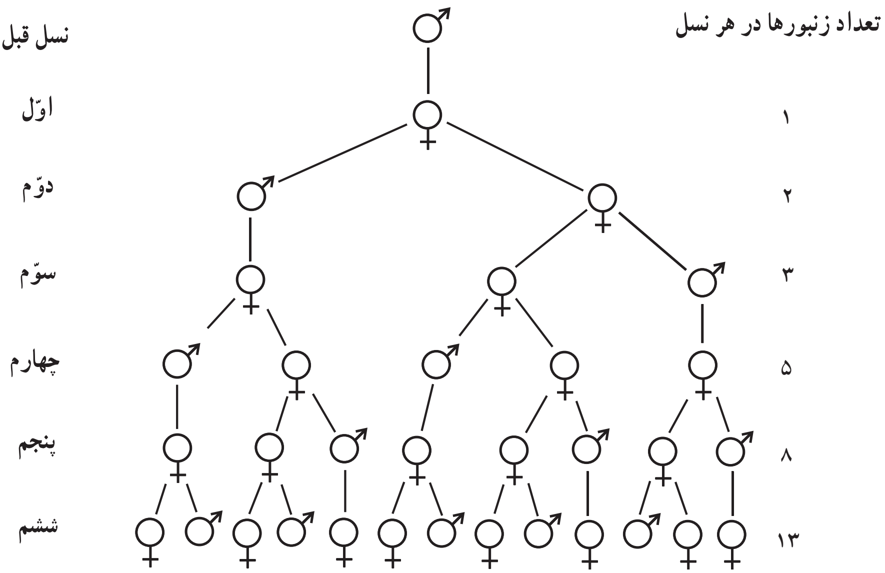
این دنباله منسوب به فیبوناتچی[۱] ریاضیدان معروف ایتالیایی قرن سیزدهم میلادی است.

دنباله‌ی فیبوناتچی یک دنباله عددی است که دو جمله‌ی اول آن ۱ و هر جمله‌ی پس از آن‌ها مجموع دو جمله‌ی قبل است. به زبان نمادین، برای n های بزرگ‌تر یا مساوی دو

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

۱ــ Fibonacci

دنباله‌ی فیبوناتچی به طور اعجاب‌آوری در پدیده‌های طبیعی و مصنوعی ظاهر می‌شود. چگونگی تکثیر خرگوش‌ها در طبیعت مثال جالبی از دنباله‌های فیبوناتچی است. چگونگی زاد وولد زنبور عسل نر هم برطبق قانون‌مندی این دنباله است. همان‌طور که می‌دانید، زنبور عسل نر تنها یک والد (مادر) دارد در حالی که زنبور عسل ماده، هم پدر و هم مادر دارد. در نتیجه شجره‌ی زنبور عسل نر الگوی عجیبی دارد. با این حال، تعداد زنبورها در نسل‌های متوالی تشکیل یک دنباله‌ی فیبوناتچی می‌دهند.[1]



تمرین ۲۱: جمله‌های دنباله‌ی فیبوناتچی دو در میان بر دو بخش‌پذیر است :

۱ ,۱ ,۲ ,۳,۵ ,۸ ,۱۳,۲۱ ,۳۴ ,۵۵ ,۸۹ ,۱۴۴ ,۲۳۳ ,۳۷۷,

۶۱۰ ,۹۸۷ ,۱۵۹۷ ,۲۵۸۴,۴۱۸۱ ,۶۷۶۵,۱۰۹۴۶,

کدامین جمله‌ها بر اعداد زیر بخش‌پذیرند؟

الف) سه ؛

ب) پنج ؛

پ) هشت ؛

ت) سیزده ؛

ث) به نظر شما، کدامین جمله‌ها بر پنجاه و پنج بخش‌پذیر هستند؟

۱ــ ♂ علامت زنبور عسل نر و ♀ علامت زنبور عسل ماده است.

دنباله‌ی فیبوناتچی خواصّ جالبی دارد. به مجموع متوالی هشت جمله‌ی اول این دنباله توجّه کنید:

(جدول ۱۱)

مجموع جمله‌ها	حاصل‌جمع
۱+۱	=۲
۱+۱+۲	=۴
۱+۱+۲+۳	=۷
۱+۱+۲+۳+۵	=۱۲
۱+۱+۲+۳+۵+۸	=۲۰
۱+۱+۲+۳+۵+۸+۱۳	=۳۳
۱+۱+۲+۳+۵+۸+۱۳+۲۱	=۵۴

برای پیدا کردن الگو به بررسی دقیق جدول می‌پردازیم تا ما را در پیدا کردن مجموع n جمله، بدون نیاز به محاسبه‌ی تکراری بالا، یاری کند. به همین منظور، جدول فوق را بازنویسی می‌کنیم و توسعه می‌دهیم تا شاید الگوی مناسب را پیدا کنیم (جدول ۱۲).

(جدول ۱۲)

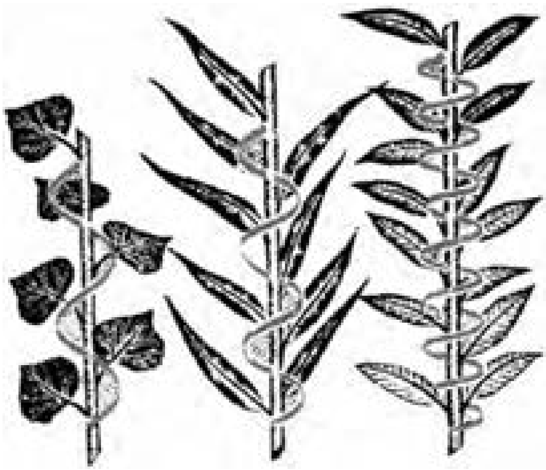
مجموع جمله‌ها	حاصل‌جمع	الگوی پیشنهادی
۱+۱	۲	۲×۱+(۱−۱)
۱+۱+۲	۴	۲×۲+(۱−۱)
۱+۱+۲+۳	۷	۲×۳+(۲−۱)
۱+۱+۲+۳+۵	۱۲	۲×۵+(۳−۱)
۱+۱+۲+۳+۵+۸	۲۰	۲×۸+(۵−۱)
۱+۱+۲+۳+۵+۸+۱۳	۳۳	۲×۱۳+(۸−۱)
۱+۱+۲+۳+۵+۸+۱۳+۲۱	۵۴	۲×۲۱+(۱۳−۱)

با توجّه به الگوی بالا و بدون محاسبه، مجموع ۱۲ جمله‌ی اول دنباله‌ی فیبوناتچی را حدس بزنید. سپس حدس خود را با محاسبه‌ی مجموع جمله‌ها به آزمایش بگذارید. آیا الگوی پیشنهادی تعمیم‌پذیر است؟

با توجه به الگوی فوق، مجموع n جملهٔ اوّل دنبالهٔ فیبوناتچی را برای ۱ . n حدس می‌زنیم :

مجموع n جملهٔ اوّل دنبالهٔ فیبوناتچی = ۲ × (جملهٔ n اُم) + [جملهٔ (۱ − n) اُم] − ۱

در این بخش، با جلوه‌هایی از نظم طبیعت در رابطه با رشد پدیده‌های طبیعی آشنا شدیم. دنبالهٔ فیبوناتچی ابزاری برای بیشتر شناختن قانونمندی بعضی از الگوهای رشد در طبیعت به ما می‌دهد. به عنوان مثال، ترتیب قرار گرفتن برگ‌های بسیاری از درختان بر روی ساقه‌هایشان به طرز جالبی با دنبالهٔ فیبوناتچی در رابطه هستند.



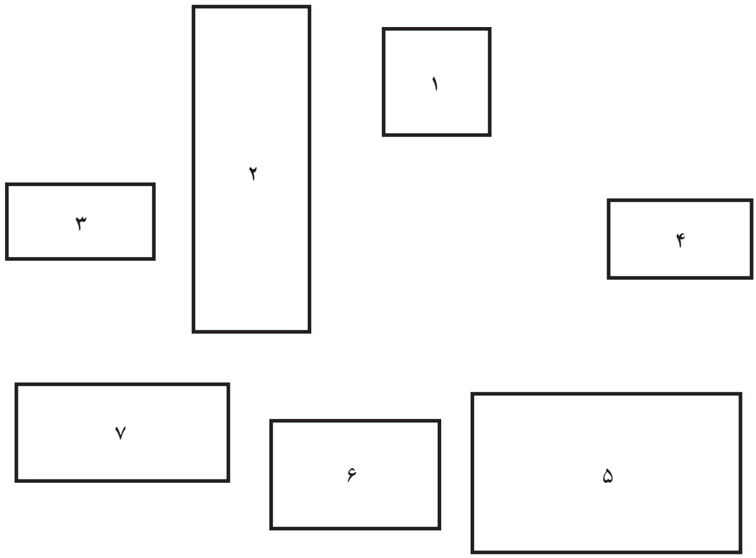
۲ــ ۸ ــ نسبت طلایی

فعالیت ۲ــ۱۲

الف) به مستطیل‌های موجود نگاه کنید :

۵	۴	۳	۲	۱

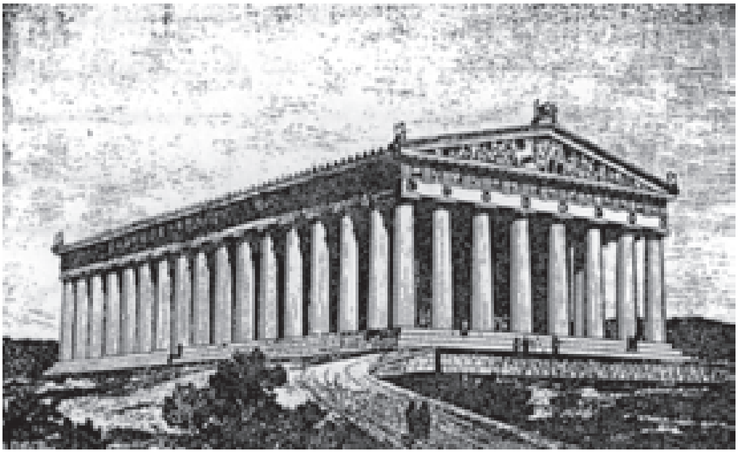
کدام‌یک به چشم شما خوشایندتر می‌آید؟
ب) حال به مستطیل‌های زیر نگاه کنید :



کدام‌یک به نظر متناسب‌تر می‌آید؟
پ) ابعاد تمام مستطیل‌ها را در قسمت‌های (الف) و (ب) تا نزدیک‌ترین میلی‌متر ممکن اندازه بگیرید.
ت) نسبت طول به عرض هریک از مستطیل‌ها را پیدا کنید و نتیجه را یادداشت کنید.
ث) چه رابطه‌ای بین خوشایندترین مستطیل‌ها در قسمت‌های قبل و نسبت به دست آمده می‌بینید؟

همان‌طور که در فعالیت ۲ــ۱۲ دیدید، نسبت طول به عرض مستطیل ۳ در قسمت (الف) و مستطیل ۵ در قسمت (ب) مساوی و تقریباً برابر با ۱/۶۱۸ است. هنرمندان یونان قدیم احساس می‌کردند که مستطیل‌هایی با این نسبت ابعاد، به چشم خوشایندتر هستند و به همین دلیل، در خلق آثار هنری معروفی از جمله ساختمان پارتنون[۱] در آتن و مجسمه معروف آپولو[۲] در بلودِیر[۳]، از این نسبت استفاده شده است. به این نسبت، **نسبت طلایی**[۴] می‌گویند.

۱ــ Parthenon
۲ــ Apollo
۳ــ Belvedere
۴ــ Golden ratio



فعالیت ۲ــ۱۳

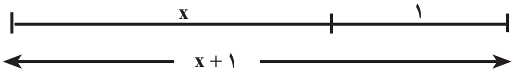
دنباله‌ی فیبوناتچی را تا ۲۰ جمله‌ی اول آن بنویسید و به کمک ماشین حساب نسبت بین هر دو جمله را در جدولی یادداشت کنید. آیا نظمی در نسبت‌های به‌دست آمده مشاهده کردید؟ نتیجه‌ی مشاهدات خود را توضیح دهید.

هم‌چنان که در فعالیت ۲ــ۱۳ دیدید، هرچه مرتبه‌ی جمله‌های دنباله‌ی فیبوناتچی بالاتر می‌رود، نسبت بین دو جمله‌ی دنباله به عدد ۱/۶۱۸ نزدیک و نزدیکتر می‌شود که این همان نسبت طلایی است. در حالت کلی، اگر جمله‌ی nاُم دنباله‌ی فیبوناتچی را با F_n نمایش دهیم، مشاهده می‌کنیم که با افزایش n، نسبت هر دو جمله‌ی متوالی دنباله‌ی فیبوناتچی یعنی

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}$$

به نسبت طلایی یعنی ۱/۶۱۸، نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. اقلیدس در کتاب پنجم اصول به این نسبت اشاره کرده است.

نسبت طلایی را از تقسیم یک پاره‌خط به دو قسمت به روش دیگری به‌دست می‌آوریم به‌طوری که نسبت طول تمام خط به قسمت بلندتر برابر با نسبت قسمت بلندتر به قسمت کوتاه‌تر می‌شود.



تساوی فوق را می‌توانیم به صورت جبری نیز نمایش دهیم :

$$\frac{\text{طول قسمت بلندتر}}{\text{طول قسمت کوتاه‌تر}} = \frac{\text{طول تمام پاره‌خط}}{\text{طول قسمت بلندتر}}$$

با توجّه به نمودار ۱، مقادیر نسبت‌های فوق را جایگزین می‌کنیم

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1},$$

رابطه‌ی فوق را برای x حل می‌کنیم

$$x^2 = x+1,$$

یا

$$x^2 - x - 1 = 0$$

ریشه‌ی مثبت معادله برابر است با

$$\boxed{x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

مقدار تقریبی این عدد گنگ، همان نسبت طلایی است که تقریباً برابر با ۱/۶۱۸است.

یکی دیگر از نمایش‌های جالب توجّه نسبت طلایی، کسری است که برای همیشه تکرار می‌شود :

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}$$

هنرمندان ایرانی نیز از نسبت طلایی در هنرهای سنّتی از جمله خط نستعلیق و خط شکسته نستعلیق[1] استفاده کرده‌اند. شما نیز در آفرینش کارهای هنری خود، این نسبت را فراموش نکنید!

مسائل

۱ـ به الگوی زیر توجّه کنید :

$$1^2 + 1^2 = 2 = 1\times 2$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = 2\times 3$$

۱ـ «جوهره و ساختار هندسی خط نستعلیق»، نوشته‌ی جواد بختیاری

$$۱^۲+۱^۲+۲^۲+۳^۲=۱۵=۳\times۵$$
$$۱^۲+۱^۲+۲^۲+۳^۲+۵^۲=۴۰=۵\times۸$$

الف) دو سطر بعدی الگوی بالا را بنویسید ؛

ب) با استفاده از الگوی فوق، مجموع مربع‌های ده جمله‌ی اوّل دنباله‌ی فیبوناتچی را بدون محاسبه حدس بزنید.

۲ــ الگوی زیر را درنظر بگیرید :

$$۱^۳+۲^۳-۱^۳=۸$$
$$۲^۳+۳^۳-۱^۳=۳۴$$
$$۳^۳+۵^۳-۲^۳=\boxed{}$$
$$۵^۳+۸^۳-۳^۳=\boxed{}$$

الف) جاهای خالی را در الگوی بالا پُر کنید ؛

ب) دوسطر بعدی الگو را بنویسید ؛

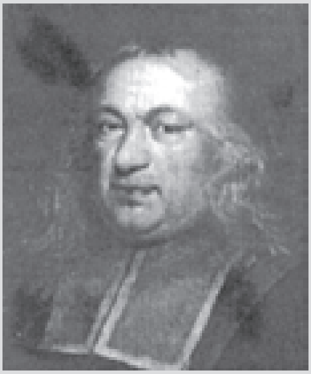
پ) متوجّه چه نظمی شدید؟ توضیح دهید.

مجله‌ی ریاضی

یکی از مشهورترین مسائل حل نشده‌ی ریاضی، آخرین قضیه‌ی فرما[1] بوده است. این قضیه درباره‌ی معادله‌ای به شکل $x^n + y^n = z^n$ است که در آن x ، y ، z و n اعداد طبیعی با فرض $o \neq xyz$ هستند. مثال‌های زیر نمونه‌هایی از چنین معادله‌ای هستند :

$$۳^۲ + ۴^۲ = ۵^۲ \quad , \quad ۵^۲ + ۱۲^۲ = ۱۳^۲ \quad , \quad ۲۰^۲ + ۲۱^۲ = ۲۹^۲$$

پی‌یرفرما، ریاضیدان معروف فرانسوی در قرن هفدهم میلادی، در حاشیه‌ی یکی از کتاب‌هایش یادداشتی نوشت حاکی از این که معادله‌هایی به این شکل فقط برای $n = ۱$ و ۲ دارای جواب هستند. فرما در یادداشت‌هایش یادآور شد که برای این قضیه اثباتی کشف کرده است امّا حاشیه‌ی کتاب باریک است و جای نوشتن اثبات را ندارد! طی سالیان متمادی، ریاضیدان‌های برجسته‌ای برای اثبات این قضیه تلاش کرده‌اند. هرچندوقت یک بار، جامعه‌ی ریاضی امیدوار از حل این مسأله، نتایجی را اعلام می‌کرد ولی پس از مدت کوتاهی، متوجّه نارسا بودن اثبات می‌شد. بالاخره، در سال ۱۹۹۴، آندره‌وایلز[2] استاد ریاضی دانشگاه پرینستون آمریکا موفق به ارائه‌ی اثبات درست و کامل این قضیه شد و این تلاش ۳۰۰ ساله به نتیجه رسید.



۱ـ Fermat’s last theorem

۲ـ Andrew Wiles

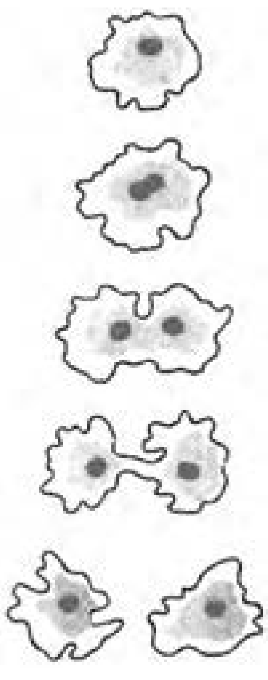
فصل ۳

لگاریتم

اختراع لگاریتم در دنیا، یک شگفتی کامل بود. هیچ‌یک از کارهای قبلی به اختراع آن کمک نکرده بود و هیچ‌یک از آن‌ها ورودش را پیش بینی نکرده بودند. لگاریتم به‌تنهایی افکار انسان را ناگهان متوجه خود کرد بدون آن‌که از کارهای دیگر اندیشمندان بهره بگیرد و یا آن که مسیرهای شناخته شده‌ی تفکر ریاضی را دنبال کند.

لورد مولتون[۱]، ۱۹۱۵

۳ــ۱ــ پیدایش



روش تکثیر آمیب‌ها بسیار جالب است. زمانی که یک سلول آمیب به اندازه‌ی مشخصی می‌رسد، به دو نیم تقسیم می‌شود، سپس حدوداً یک روز طول می‌کشد تا دو آمیب به‌وجود آمده به اندازه‌ای رشد کنند که باز تقسیم شوند و تبدیل به چهار آمیب گردند و به همین ترتیب تعداد آن‌ها مرتّب افزایش می‌یابد.

این نحوه‌ی افزایش از این جهت جالب است که آمیب‌ها با نصف شدن تکثیر می‌شوند! تعداد آمیب‌ها در پایان هفته از جدول (۱) به‌دست می‌آید که بستگی به زمان دارد. با دقت در این جدول می‌بینیم که سطر دوم (تعداد آمیب‌ها) یک دنباله‌ی توانی است، یعنی یک دنباله‌ی هندسی که هر جمله‌ی آن دو برابر جمله‌ی قبلی است. با این حال، سطر اوّل (زمان) یک دنباله‌ی حسابی است که در آن هر جمله یکی بیشتر از جمله‌ی قبلی است. نکته‌ی جالبی به‌وسیله‌ی جان‌نپِر ریاضیدان اسکاتلندی در اوایل قرن هفدهم در

۱ــ Lord Moulton

جدول (۱)

روز زمان	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...
تعداد آمیب‌ها	۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	...

مورد این دو دنباله مطرح شد. اگر دو عدد ۴ و ۱۶ از سطر پایین را درنظر بگیریم، حاصل‌ضرب آن‌ها جمله‌ی دیگری از دنباله‌ی هندسی سطر دوّم خواهد بود، یعنی

۴ . ۱۶ = ۶۴

که جمله‌های متناظر این اعداد در دنباله‌ی حسابی سطر اوّل به ترتیب ۲، ۴ و ۶ هستند و این همان نکته‌ی جالب است.

جدول (۲)

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	...
۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲	۱۰۲۴	...

یعنی حاصل‌ضرب اعداد دنباله‌ی هندسی با حاصل‌جمع اعداد دنباله‌ی حسابی متناظر است.
حال حاصل‌ضرب چند عدد دیگر را درنظر می‌گیریم و نتیجه را مشاهده می‌کنیم.

مثال ۱: برای پیدا کردن حاصل‌ضرب ۱۲۸ . ۸، اعداد متناظر ۸ و ۱۲۸ را در سطر اوّل پیدا می‌کنیم. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، ۳ متناظر با ۸ و ۷ متناظر با ۱۲۸ است و

۸ . ۱۲۸ = ۱۰۲۴

که ۱۰۲۴ با عدد ۱۰ در دنباله‌ی اوّلی متناظر است. دقّت کنید که ۱۰ همان ۷+۳ است. حال نتایج به‌دست آمده را کلّی‌تر بیان می‌کنیم.

ضرب در دنباله‌ی دوّم با جمع در دنباله‌ی اوّل متناظر است.

با توجه به آنچه گذشت، می‌بینیم که اگر نخواهیم **ضرب** کنیم، می‌توانیم به جای آن با استفاده از دنباله‌ی سطر اوّل **جمع** کنیم. اعداد دنباله‌ی حسابی ردیف اوّل، **لگاریتم** اعداد نظیرشان در دنباله‌ی ردیف دوم هستند.

جدول (۳)

لگاریتم: x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	...
اعداد: y	۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲	۱۰۲۴	...

اعداد دنباله‌ی هندسی را می‌توانیم به صورت توان‌هایی از ۲ بنویسیم :

لگاریتم: x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	...
اعداد : y	$۲^{۰}$	$۲^{۱}$	$۲^{۲}$	$۲^{۳}$	$۲^{۴}$	$۲^{۵}$	$۲^{۶}$	$۲^{۷}$	$۲^{۸}$	$۲^{۹}$	$۲^{۱۰}$	

در واقع اعداد دنباله‌ی هندسی بالا، برابر با ۲ به توان‌های اعداد دنباله‌ی حسابی فوق هستند، یعنی

$$\boxed{y = ۲^{x} \;.\quad x = \log_{۲} y}$$

و یا به بیانی دیگر، جمله‌های دنباله‌ی حسابی، **لگاریتم** جمله‌های متناظر خود در دنباله‌ی توان‌های دو (هندسی) هستند. یعنی y نماینده‌ی عدد در دنباله‌ی هندسی و x معرف لگاریتم آن در مبنای ۲ است.

مثال ۲ :

اعداد	۱۶	×	۳۲	=	۵۱۲
	۲×۲×۲×۲	×	۲×۲×۲×۲×۲	=	۲×۲×۲×۲×۲×۲×۲×۲×۲
لگاریتم	۴	+	۵	=	۹

فعالیت ۳ــ۱

با استفاده از ماشین حساب، جدول لگاریتم در مبنای ۲ را تا $۲^{۲۶}$ ادامه دهید. سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید :

حاصل‌ضرب‌های زیر را با مراجعه به جدول پیدا کنید. یک **رابطه‌ی جمع** نشان دهید که حاصل را بدون ضرب کردن به‌دست دهد.

الف) ۱۲۸×۲۵۶ ؛

ب) ۱۰۲۴×۲۰۴۸ ؛

پ) ۳۲×۱۳۱۰۷۲ ؛

ت) $۱۶ \times ۵۱۲ \times ۴۰۹۶$ ؛

از لگاریتم‌ها می‌توان برای به توان رساندن اعداد نیز استفاده کرد.

مثال ۳: باز هم دنباله‌ی توان‌های ۲ را درنظر بگیرید و به نمونه زیر توجّه کنید :

اعداد : $۳۲ \times ۳۲ \times ۳۲ \times ۳۲ = (۳۲)^{۴} = ۱۰۴۸۵۷۶$

. . . . . .

لگاریتم : $۵ + ۵ + ۵ + ۵ = ۴ \times ۵ = ۲۰$

تمرین ۱: با استفاده از روش فوق و جدولی که خود تهیه کرده‌اید، حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید :

الف) $(۲۵۶)^{۳}$ ؛

ب) $(۶۴)^{۵}$ ؛

پ) (۱۰۲۴) ؛

لگاریتم y در پایه‌ی ۲ عددی است که باید ۲ را به آن توان برسانیم تا y حاصل شود.
یعنی تساوی یا معادله‌ی توانی را می‌توان به کمک لگاریتم تغییر شکل داد.

مثال ۴ : اگر $۳۲ = ۲^{x}$، مقدار x را با توجه به تعریف لگاریتم پیدا کنید.

حل: با توجه به تعریف لگاریتم،

$$۲^{x} = ۳۲ \quad x = \log_{۲} ۳۲$$

با مراجعه به جدول (۳)، مقدار x برابر با ۵ است. در واقع،

$$۲^{x} = ۲^{۵}$$

و چون پایه‌ها مساوی هستند پس نماها باهم برابرند یعنی $x = ۵$.

جدول (۳) را می‌توان برای توان‌های هر عدد دیگری تهیه کرد و لگاریتم اعداد را در مبناها (پایه‌های) مختلف حساب نمود. جدول (۴) لگاریتم اعداد در مبنای ۵ را نشان می‌دهد :

جدول (۴)

x :لگاریتم	۰	۱	۲	۳	۴	۵	...
y : اعداد	۱	۵	۲۵	۱۲۵	۶۲۵	۳۱۲۵	...

اعداد دنباله‌ی هندسی را می‌توانیم به صورت توان‌هایی از ۵ بنویسیم :

x :لگاریتم	۰	۱	۲	۳	۴	۵	...
y : اعداد	$۵^{۰}$	$۵^{۱}$	$۵^{۲}$	$۵^{۳}$	$۵^{۴}$	$۵^{۵}$	...

که اعداد دنباله‌ی هندسی بالا، برابر با ۵ به توان‌های اعداد دنباله‌ی حسابی فوق هستند یعنی

$$\boxed{y = ۵^{x} \;.\quad x = \log_{۵} y}$$

مثال ۵: با توجّه به جدول (۴)، $۱۲۵ = ۵^{۳}$ که معادل است با :

$$\log_{۵} ۱۲۵ = ۳$$

به طور کلّی، لگاریتم y در پایه‌ی b ، عددی است که b باید به توان آن عدد برسد تا y حاصل شود :

$$log_{b} y = x \;.\quad b^{x} = y \quad ; \quad y > ۰ \;,\; b > ۰ \;,\; b \quad ۱$$

تمرین

۱ــ تساوی‌های نمایی (توانی) را با استفاده از تعریف لگاریتم تغییر شکل دهید.

الف) $۱۲۱ = ۱۱^{۲}$ ‏ ‏ ‏ ‏ ب) $۱۰۲۴ = ۲^{۱۰}$

پ) $۵^{x} = ۶۲۵$ ‏ ‏ ‏ ‏ ت) $۰/۵^{y} = ۰/۲۵$

ث) $۱۰^{-۳} = ۰/۰۰۱$ ‏ ‏ ‏ ‏ ج) $a^{y} = ۱۰۰۰$

چ) $p^{r} = q$ ‏ ‏ ‏ ‏ ح) $۷^{۳} = ۳۴۳$

خ) $۸^{x} = ۴۰۹۶$

۲ــ تساوی‌های زیر را به شکل نمایی (توانی) تبدیل کنید.

الف) $۳ = \log_{۶} ۲۱۶$ ‏ ‏ ‏ ‏ ب) $۰ = \log_{۹} ۱$

پ) $-۲ = \log_{۱۰} ۰/۰۱$ ‏ ‏ ‏ ‏ ت) $y = \log_{۲} ۸$

ث) $۵ = \log_{۵} ۳۱۲۵$ ج) $y = \log_b a$

۳ ــ پایه‌ی (مبنا) لگاریتم‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $\log_{\square} ۸ = ۳$ ب) $\log_{\square} ۳۶ = ۲$

پ) $\log_{\square} ۰/۱ = -۱$ ت) $\log_{\square} ۰/۲۵ = -۲$

ث) $\log_{\square} ۱۰ = ۱$ ج) $\log_{\square} ۱ = ۰$

۴ــ عددی را که لگاریتم آن داده شده است، پیدا کنید.

الف) $\log_{۱۶} \square = ۲$ ب) $\log_{۴} \square = ۴$

پ) $\log_{۳} \square = -۱$ ت) $\log_{۱۰} \square = ۹$

ث) $\log_{۱۱} \square = ۳$ ج) $\log_{۵} \square = ۴$

۵ــ تساوی نمایی معادله‌های زیر را بنویسید و سپس مقدار y را تعیین کنید.

الف) $y = \log_{۲} ۶۴$ ب) $y = \log_{۲۵} ۶۲۵$

پ) $y = \log_{۱۰} ۱۰۰۰۰$ ت) $y = \log_{۳} ۸۱$

۶ــ هریک از لگاریتم‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $\log_{۲} ۲۵۶ = \square$ ب) $\log_{۱۳} ۱۶۹ = \square$

پ) $\log_{۱۰} ۱ = \square$ ت) $\log_{۹} ۵۹۰۴۹ = \square$

ث) $\log_{۷} ۳۴۳ = \square$ ج) $\log_{۳} ۲۴۳ = \square$

۳ــ۲ــ لگاریتم اعشاری

با توجّه به این که دستگاه شمارش ما دهدهی (اعشاری) است، جدول لگاریتم در مبنای ۱۰ بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. در نتیجه تکیه این بخش بر لگاریتم اعشاری است.

لگاریتم: x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	...
اعداد: y	$۱۰^{۰}$	$۱۰^{۱}$	$۱۰^{۲}$	$۱۰^{۳}$	$۱۰^{۴}$	$۱۰^{۵}$	$۱۰^{۶}$	$۱۰^{۷}$	$۱۰^{۸}$	$۱۰^{۹}$	$۱۰^{۱۰}$	...

که رابطه‌ی $y = ۱۰^{x}$ با توجه به این دو دنباله نوشته می‌شود.

y معرّف یک عدد و x معرف لگاریتم اعشاری (لگاریتم در مبنای ۱۰) آن است. بین لگاریتم در مبنای ۱۰ و دستگاه شمارش اعشاری ارتباط صریحی وجود دارد. مثلاً لگاریتم ۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ برابر با ۹ است زیرا $۱۰^{۹} = ۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰$ در ضمن، می‌دانیم که تعداد صفرهای حاصل‌ضرب دو

عددی که به صورت توان‌های ده هستند برابر تعداد صفرهای دو عدد است و نیاز به استفاده از لگاریتم‌ها برای محاسبه‌ی چنین حاصل‌ضرب‌هایی نیست. با این حال ارزش جدول بالا وقتی بارز می‌شود که اعداد، توان‌های صحیح ده نباشند. در این صورت، باید بتوانیم فاصله‌های خالی اعداد از $۱۰^۰$ تا $۱۰^۱$ را در ردیف سوم جدول (۵) پر کنیم.

جدول (۵)

لگاریتم: x	۰	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	۱
اعداد: y	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
اعداد: y	$۱۰^۰$	$۱۰^?$	$۱۰^?$	$۱۰^?$	$۱۰^?$	$۱۰^?$	$۱۰^?$	$۱۰^?$	$۱۰^?$	$۱۰^۱$

با توجه به تعریف، لگاریتم‌های توان‌های صحیح ۱۰ همان توان‌های صحیح ۱۰ هستند. در نتیجه با توجّه به روش نوشتن اعداد به صورت نماد علمی یعنی $a\times ۱۰^n$ با شرط $۱۰ . a . ۱$، فقط به لگاریتم‌های اعداد بین ۱ و ۱۰ نیاز داریم که این اعداد، همان توان‌های کسری ۱۰ هستند.

۳ــ۲ــ ۱ــ روشی برای رسیدن به لگاریتم اعشاری: یک الگوریتم

۱ــ یک عدد کوچک مثلاً [1] را انتخاب می‌کنیم که از یک بزرگ‌تر باشد اما نه خیلی بزرگ‌تر! و لیستی از توان‌های آن تهیّه می‌کنیم:

$$^{۱}\;,\;\; ^{۲}\;,\;\; ^{۳}\;,\;\; ...\;,\;\; ^{۲۴}\;,\;\; ^{۲۵}\;,\;\; ...$$

اگر بخواهیم دو عدد a و b را درهم ضرب کنیم، هر کدام از آن‌ها را با یکی از توان‌های تقریب می‌زنیم. (. نماد تقریباً است)

مثال ۶: اگر $a . \;^{۱۷}$ و $b . \;^{۸}$، آنگاه

$$a.b . \;^{۱۷} \times . \;^{۸} = . \;^{۱۷+۸} = . \;^{۲۵},$$

که می‌توانیم برای پیدا کردن آن، به لیستی که تهیه کرده‌ایم، مراجعه کنیم.

مثال ۷ : با توجه به مقادیر a و b در مثال ۶ $\frac{a}{b}$ را پیدا می‌کنیم

$$\frac{a}{b} . \frac{^{۱۷}}{^{۸}} = . \;^{۱۷-۸} = . \;^{۹}$$

۱ــ اولین حرف الفبای یونانی که آلفا تلفظ می‌شود.

مثال ۸: با توجه به مقدار a در مثال ۶، $a^{۲۰}$ را به‌دست می‌آوریم

$a^{۲۰} . (.^{۱۷})^{۲۰} = .^{۳۴۰}$

۲ــ برای هماهنگی این ایده با نماد معمولی اعشار، . را یک توان کسری از ۱۰ انتخاب می‌کنیم.

مثال ۹: . را $۱۰^{\frac{۱}{۳۲}}$ انتخاب می‌کنیم (چرا؟). پس فقط به لیستی شامل $.,^{۲},.^{۳},...,.^{۳۱}$ نیاز داریم، زیرا $۱۰ = .^{۳۲}$ و ضرب اعداد در ۱۰ و یا تقسیم آن‌ها بر ۱۰ تنها با اضافه یا کم کردن صفر و یا حرکت دادن ممیّز اعشاری انجام می‌گیرد. به عنوان مثال، $۳۰۰۰ = ۳۰۰ \times ۱۰$، $۳۰ = ۳۰۰ . ۱۰$ و $۰/۳ = ۳۰۰ . ۱۰۰۰$.

با این کار، می‌توانیم فاصله‌ی خالی بین $۱۰^{۰}$ و $۱۰^{۱}$ را در جدول (۵) پُر کنیم.

فعالیت ۳ــ۲

$$.^{۳۲} = (۱۰^{\frac{۱}{۳۲}})^{۳۲} = ?$$

و

$$.^{۱۶} = (۱۰^{\frac{۱}{۳۲}})^{۱۶} = ?$$

۳ ــ برای به‌دست آوردن اعدادی که بین نقاط به‌دست آمده توسط خودمان قرار می‌گیرند، یا از ماشین حساب معمولی استفاده می‌کنیم و یا مقدار تقریبی آن‌ها را از روی نمودار به‌دست می‌آوریم. عدد ۱۰ را در ماشین حساب وارد می‌کنیم و سپس با پنج بار فشار دادن دکمه‌ی $\boxed{\sqrt{\ }}$ $۱۰^{\frac{۱}{۳۲}}$ را پیدا می‌کنیم زیرا

$$\sqrt{۱۰} = ۱۰^{\frac{۱}{۲}} = ۳/۱۶۲$$

$$\sqrt{\sqrt{۱۰}} = \left(۱۰^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ۱۰^{\frac{۱}{۴}}$$ یا $$\sqrt{۱۰^{\frac{۱}{۲}}} = ۱۰^{\frac{۱}{۴}} = ۱/۷۷۸$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{۱۰}}} = \left(\left(۱۰^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ?$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{۱۰}}}} = \left(\left(\left(۱۰^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ?$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{۱۰}}}}} = \left(\left(\left(\left(۱۰^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ?$$

با این اطلاعات، منحنی را رسم می‌کنیم. سپس با توجه به مقدار توان‌های کسری ۱۰، مقادیر $۱۰^{\frac{۲}{۳۲}}$, $۱۰^{\frac{۳}{۳۲}}$, ... , $۱۰^{\frac{۳۱}{۳۲}}$، یعنی توان‌های ۲ . تا ۳۲ . را به‌وسیله‌ی ماشین حساب به‌دست می‌آوریم. برای خلاصه‌نویسی، توان‌های . را n می‌نامیم و برای ۳۲ . n . ۰ جدول را تا سه رقم اعشار تکمیل می‌کنیم.

جدول (۶)

log: $\frac{n}{۳۲}$	$^{n} = ۱۰^{\frac{n}{۳۲}}$	log: $\frac{n}{۳۲}$	$^{n} = ۱۰^{\frac{n}{۳۲}}$	log: $\frac{n}{۳۲}$	$a^{n} = ۱۰^{\frac{n}{۳۲}}$
$\frac{۱}{۳۲}$ = ۰/۰۳۱۲	۱/۰۷۴	$\frac{۱۲}{۳۲}$ = ۰/۳۷۵	۲/۳۷۱	$\frac{۲۳}{۳۲}$ = ۰/۷۱۸	۵/۲۲۴
$\frac{۲}{۳۲}$ = ۰/۰۶۲۵	۱/۱۵۴	$\frac{۱۳}{۳۲}$ = ۰/۴۰۶	۲/۵۴۶	$\frac{۲۴}{۳۲}$ = ۰/۷۵۰	۵/۶۲۳ . ۶
$\frac{۳}{۳۲}$ = ۰/۰۹۳۷	۱/۲۴۰	$\frac{۱۴}{۳۲}$ = ۰/۴۳۷	۲/۷۳۵	$\frac{۲۵}{۳۲}$ = ۰/۷۸۱	۶/۰۳۹
$\frac{۴}{۳۲}$ = ۰/۱۲۵	۱/۳۳۳	$\frac{۱۵}{۳۲}$ = ۰/۴۶۸	۲/۹۳۷ . ۳	$\frac{۲۶}{۳۲}$ = ۰/۸۱۲	۶/۴۸۶
$\frac{۵}{۳۲}$ = ۰/۱۵۶	۱/۴۳۲	$\frac{۱۶}{۳۲}$ = ۰/۵۰۰	۳/۱۶۲	$\frac{۲۷}{۳۲}$ = ۰/۸۴۳	۶/۹۶۶ . ۷
$\frac{۶}{۳۲}$ = ۰/۱۸۷	۱/۵۳۸	$\frac{۱۷}{۳۲}$ = ۰/۵۳۱	۳/۳۹۶	$\frac{۲۸}{۳۲}$ = ۰/۸۷۵	۷/۴۹۸ . ۸
$\frac{۷}{۳۲}$ = ۰/۲۱۸	۱/۶۵۲	$\frac{۱۸}{۳۲}$ = ۰/۵۶۲	۳/۶۵۶	$\frac{۲۹}{۳۲}$ = ۰/۹۰۶	۸/۰۵۳
$\frac{۸}{۳۲}$ = ۰/۲۵۰	۱/۷۷۸	$\frac{۱۹}{۳۲}$ = ۰/۵۹۳	۳/۹۱۷ . ۴	$\frac{۳۰}{۳۲}$ = ۰/۹۳۷	۸/۶۴۹ . ۹
$\frac{۹}{۳۲}$ = ۰/۲۸۱ . ۰/۳۰۱	۱/۹۱۰ . ۲	$\frac{۲۰}{۳۲}$ = ۰/۶۲۵	۴/۲۱۷	$\frac{۳۱}{۳۲}$ = ۰/۹۶۸	۹/۲۹۰
$\frac{۱۰}{۳۲}$ = ۰/۳۱۲	۲/۰۵۱	$\frac{۲۱}{۳۲}$ = ۰/۶۵۶	۴/۵۲۹	$\frac{۳۲}{۳۲}$ = ۱	۱۰/۰۰۰
$\frac{۱۱}{۳۲}$ = ۰/۳۴۳	۲/۲۰۳	$\frac{۲۲}{۳۲}$ = ۰/۶۸۷	۴/۸۶۴ ، ۵		
		۰. n . ۳۲			

$\frac{۹۶۵}{۳۲۰۰}$. ۰/۳۰۱ .

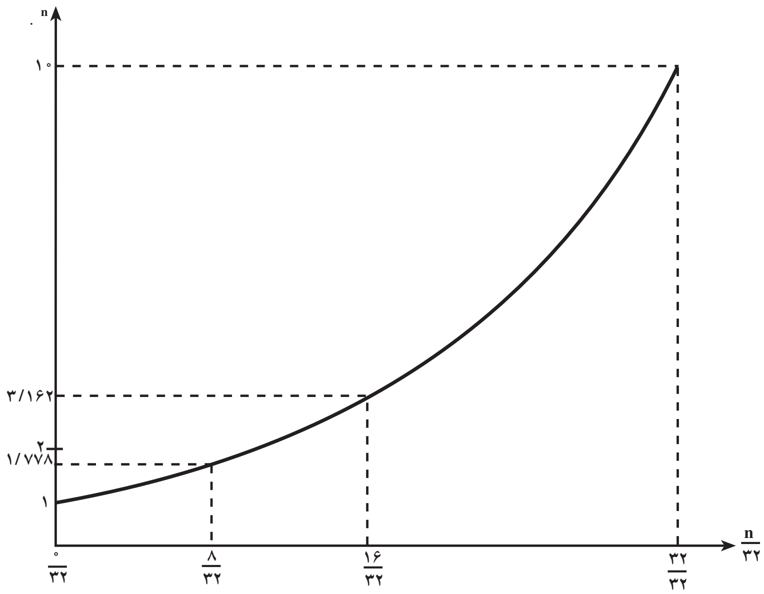
تمرین ۲: با توجه به جدول (۶)، درستی رابطه‌ی زیر را امتحان کنید :

$$\log(۲\times ۳)=\log ۲+\log ۳$$ [1]

با توجه به مقدارهای موجود در جدول (۶) نمودار زیر را رسم می‌کنیم.

$$^{n}=(۱۰^{\frac{۱}{۳۲}})^{n}=۱۰^{\frac{n}{۳۲}} \quad , \quad ۰ . \quad . \; ۳۲$$

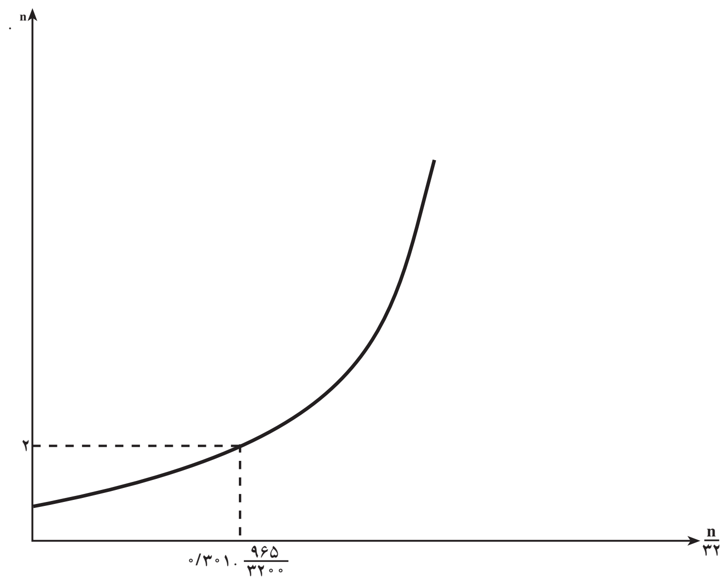
۱ــ قرارداد می‌کنیم که مبنای ۱۰ را ننویسیم.



مثال ۱۰: برای به‌دست آوردن لگاریتم۲، مقدار ۲ را روی محور y ها پیدا می‌کنیم. آنگاه خطی موازی محور افقی رسم می‌کنیم تا نمودار را قطع نماید. سپس از نقطه‌ی تلاقی خطی به موازات محور عمودی رسم می‌کنیم تا محور x ها یعنی محور لگاریتم‌ها را در نقطه‌ای قطع کند.

نقطه تلاقی با محور xها همان لگاریتم ۲ یعنی $\frac{۹۶۵}{۳۲۰۰}$ است که برابر ۰/۳۰۱ است :

$$\log ۲ = ۰/۳۰۱$$



در واقع، در مثال ۱۰ با مراجعه به جدول (۶)، مقدار $\log ۲$ را با تقریب مطلوبی به دست آوردیم. یعنی، مقدار ۲ را در ستون n . جستجو کردیم. مقدار ۲ بین ۱/۹۱۱ و ۲/۰۵۳ و لگاریتم‌های معادل آن‌ها بین $\frac{۹}{۳۲}$ و $\frac{۱۰}{۳۲}$ بود. با این حال، چون ۲ نزدیک‌تر به ۲/۰۵۳ بود، در نتیجه مقدار لگاریتم آن نیز به $\frac{۱۰}{۳۲}$ نزدیک‌تر بود. با چند بار آزمایش کردن، تقریب خوبی برای لگاریتم ۲ که همان ۰/۳۰۱ است به دست آوردیم. به همین ترتیب لگاریتم‌های ۳ الی ۹ را نیز به دست می‌آوریم، یعنی اعداد ۲ تا ۹ را برحسب توان‌های کسری ۱۰ می‌نویسیم :

اعداد: y	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
اعداد: y	$۱۰^{۰}$	$۱۰^{۰/۳۰۱}$	$۱۰^{۰/۴۷۷}$	$۱۰^{۰/۶۰۲}$	$۱۰^{۰/۶۹۸}$	$۱۰^{۰/۷۷۸}$	$۱۰^{۰/۸۴۵}$	$۱۰^{۰/۹۰۳}$	$۱۰^{۰/۹۵۴}$
لگاریتم: x	۰	۰/۳۰۱	۰/۴۷۷	۰/۶۰۲	۰/۶۹۸	۰/۷۷۸	۰/۸۴۵	۰/۹۰۳	۰/۹۵۴

۳ــ۳ــ لگاریتم و نماد علمی

برتری لگاریتم اعشاری نسبت به لگاریتم در مبناهای مختلف ارتباط نزدیک آن با شیوه‌ی نوشتن اعداد به شکل نماد علمی است. جدول زیر با توجه به این ارتباط تهیّه شده است که در آن ۲ به صورت توان کسری ۱۰ یعنی $۱۰^{۰/۳۰۱}$ نوشته شده است.

جدول (۷)

لگاریتم تقریبی اعداد	اعداد به صورت توان‌های کسری ۱۰		اعداد به شکل نماد علمی	اعداد به شکل اعشاری
۱/۳۰۱	$۱۰^{۱/۳۰۱}$	$۱۰^{۰/۳۰۱} \times ۱۰^{۱}$	۲×۱۰^{۱}	۲۰
۲/۳۰۱	$۱۰^{۲/۳۰۱}$	$۱۰^{۰/۳۰۱} \times ۱۰^{۲}$	۲×۱۰^{۲}	۲۰۰
۳/۳۰۱	$۱۰^{۳/۳۰۱}$	$۱۰^{۰/۳۰۱} \times ۱۰^{۳}$	۲×۱۰^{۳}	۲۰۰۰
۴/۳۰۱	$۱۰^{۴/۳۰۱}$	$۱۰^{۰/۳۰۱} \times ۱۰^{۴}$	۲×۱۰^{۴}	۲۰۰۰۰

در صورت استفاده از ماشین حساب به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

نمایش‌دهنده		ترتیب عملیات
۴/۳۰۱	log	۲۰۰۰۰

فعالیت ۳ــ۳

الف ــ با توجّه به صفحه‌قبل، لگاریتم‌های زیر را به‌دست آورید.

۱ــ ۲,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰

۲ــ ۲×۱۰^{۱۷}

جدول (۸)

لگاریتم اعداد	اعداد به صورت توان‌های کسری ۱۰		اعداد به شکل نماد علمی	اعداد به شکل اعشاری
۴/۶۹۹	$۱۰^{۴/۶۹۹}$	$۱۰^{۰/۶۹۹}\times۱۰^{۴}$	۵×۱۰^{۴}	۵۰,۰۰۰
۵/۶۹۹	$۱۰^{۵/۶۹۹}$	$۱۰^{۰/۶۹۹}\times۱۰^{۵}$	۵×۱۰^{۵}	۵۰۰,۰۰۰
☐	☐	☐	☐	۵,۰۰۰,۰۰۰
☐	☐	☐	☐	۵۰,۰۰۰,۰۰۰

ب ــ با توجه به جدول (۸) به قسمت‌های ۱، ۲ و ۳ پاسخ دهید :

۱ــ جدول (۸) را کامل کنید ؛

۲ــ چه عددی دارای لگاریتم ۱۷/۶۹۹ است؟

۳ــ چه عددی دارای لگاریتم ۲۸/۶۹۹ است؟

تمرین ۳: جدول (۹) را یا با مراجعه به جدول (۶) یا مستقیماً به وسیله‌ی ماشین‌حساب کامل کنید :

اگر لگاریتم عدد را داشته باشیم و بخواهیم خود عدد را به وسیله‌ی ماشین‌حساب پیدا کنیم، به ترتیب زیر عمل می‌نماییم :

نمایش	ترتیب عملیات
۷/۹۹۸	log INV[1] ۰/۹۰۳

۱ــ Inverse به معنای معکوس تابع است.

در بعضی ماشین‌حساب‌ها، به جای دکمه‌ی INV از دکمه‌ی $\boxed{\text{2ndF}}$ استفاده می‌کنند.

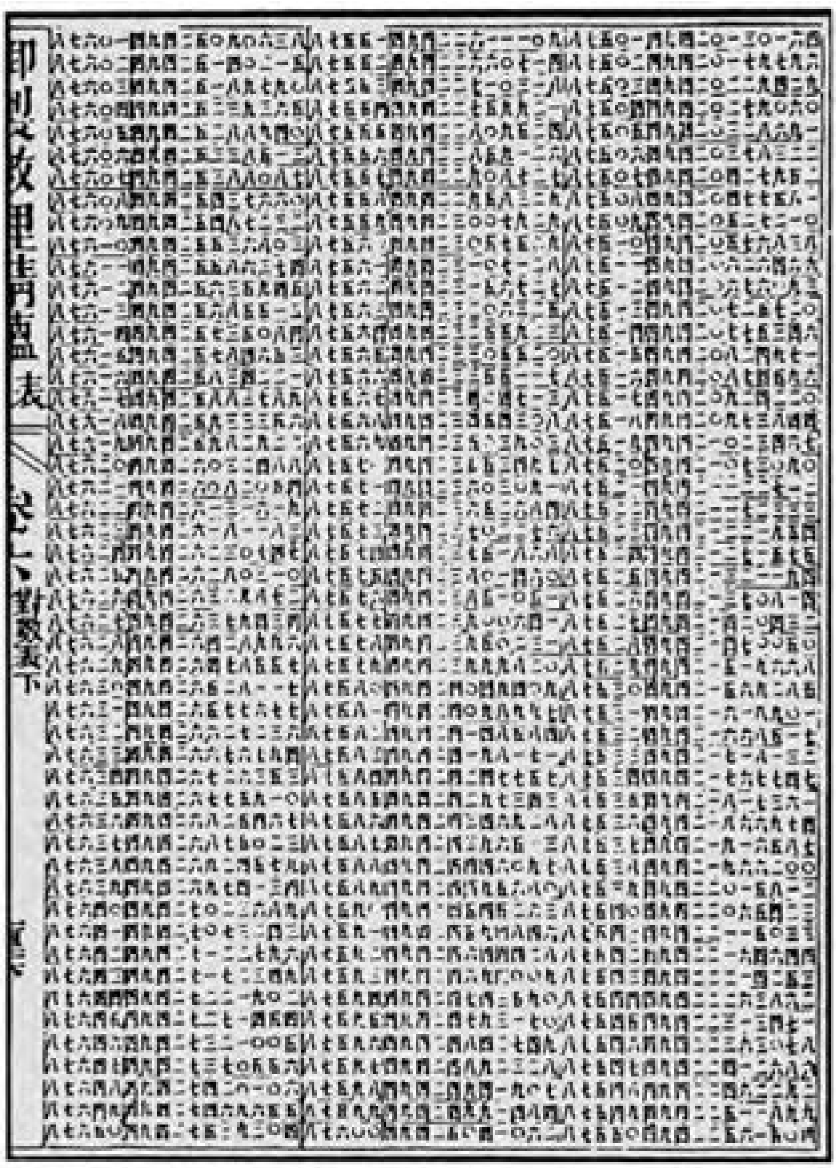
جدول (۹)

لگاریتم اعداد	اعداد به صورت توان‌های کسری ۱۰		اعداد به شکل نماد علمی	اعداد به شکل اعشاری
۵/۰۸۲	$۱۰^{۵/۰۸۲}$	$۱۰^{۰/۰۸۲} \times ۱۰^{۵}$	$۱/۲۱ \times ۱۰^{۵}$	۱۲۱,۰۰۰
□	□	□	□	۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰
۱/۵۴۴	$۱۰^{۱/۵۴۴}$	$۱۰^{۰/۵۴۴} \times ۱۰^{۱}$	$۳/۵ \times ۱۰^{۱}$	□
□	$۱۰^{۰/۶۰۲}$	$۱۰^{۰/۶۰۲} \times ۱۰^{۰}$	۴×۱۰^{۰}	□
۲/۹۰۳	□	□	□	□
۲۳/۷۷۸	$۱۰^{۲۳/۷۷۸}$	$۱۰^{۰/۷۷۸} \times ۱۰^{۲۳}$	* $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$	□

* این عدد به نام عدد آواگادرو معروف است که در شیمی استفاده‌ی زیادی دارد. عدد آواگادرو تعداد مولکول‌ها در ۱۸ گرم آب یا یک مولکول از هر ماده است.

با توجّه به مثال‌ها و تمرین‌های بالا، دیدیم که با وجود نماد علمی و با به‌دست آوردن توان‌های اعشاری ۱۰ یعنی با پرکردن فاصله‌ی بین $۱۰^{۰}$ تا $۱۰^{۱}$ جدول (۶) می‌توانیم لگاریتم تمام اعداد را به‌دست آوریم. قسمت صحیح لگاریتم، توان‌های ده اِعدادی هستند که به شکل نماد علمی نوشته شده‌اند. قسمت کسری لگاریتم را می‌توان با مراجعه به جدول (که طریق به‌دست آوردن آن را دیدیم) پیدا کنیم. در ضمن چون قسمت غیرتوانیِ نماد علمی همیشه کمتر از ۱۰ است، در نتیجه به جدول لگاریتم برای اعداد بزرگ‌تر از ۱۰ نیازی نداریم.

۳ــ۴ــ محاسبه با لگاریتم



ریاضیدان انگلیسی قرن هفدهم، هنری‌بریگز[1] مبنای اعشاری را برای لگاریتم پیشنهاد داد و اولین جدول لگاریتم اعشاری را تهیّه کرد. پس از آن، امپراطور چین در سال ۱۷۱۳ دستور داد که کتابی را بر چوب حک کرده، منتشر کنند که در آن کتاب لگاریتم اعداد از ۱ تا ۱۰۰۰۰۰ با دست حکّ شده بود.

۱ــ Henry Briggs

جدول (۱۰) ــ لگاریتم اعشاری اعداد از یک تا هزار با چهار رقم اعشار

N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	D
۱۰	۰۰۰۰	۰۰۴۳	۰۰۸۶	۰۱۲۸	۰۱۷۰	۰۲۱۲	۰۲۵۳	۰۲۹۴	۰۳۳۴	۰۳۷۴	۴۰
۱۱	۰۴۱۴	۰۴۵۳	۰۴۹۲	۰۵۳۱	۰۵۶۹	۰۶۰۷	۰۶۴۵	۰۶۸۲	۰۷۱۹	۰۷۵۵	۳۷
۱۲	۰۷۹۲	۰۸۲۸	۰۸۶۴	۰۸۹۹	۰۹۳۴	۰۹۶۹	۱۰۰۴	۱۰۳۸	۱۰۷۲	۱۱۰۶	۳۴
۱۳	۱۱۳۹	۱۱۷۳	۱۲۰۶	۱۲۳۹	۱۲۷۱	۱۳۰۳	۱۳۳۵	۱۳۶۷	۱۳۹۹	۱۴۳۰	۳۲
۱۴	۱۴۶۱	۱۴۹۲	۱۵۲۳	۱۵۵۳	۱۵۸۴	۱۶۱۴	۱۶۴۴	۱۶۷۳	۱۷۰۳	۱۷۳۲	۲۹
۱۵	۱۷۶۱	۱۷۹۰	۱۸۱۸	۱۸۴۷	۱۸۷۵	۱۹۰۳	۱۹۳۱	۱۹۵۹	۱۹۸۷	۲۰۱۴	۲۸
۱۶	۲۰۴۱	۲۰۶۸	۲۰۹۵	۲۱۲۲	۲۱۴۸	۲۱۷۵	۲۲۰۱	۲۲۲۷	۲۲۵۳	۲۲۷۹	۲۶
۱۷	۲۳۰۴	۲۳۳۰	۲۳۵۵	۲۳۸۰	۲۴۰۵	۲۴۳۰	۲۴۵۵	۲۴۸۰	۲۵۰۴	۲۵۲۹	۲۵
۱۸	۲۵۵۳	۲۵۷۷	۲۶۰۱	۲۶۲۵	۲۶۴۸	۲۶۷۲	۲۶۹۵	۲۷۱۸	۲۷۴۲	۲۷۶۵	۲۳
۱۹	۲۷۸۸	۲۸۱۰	۲۸۳۳	۲۸۵۶	۲۸۷۸	۲۹۰۰	۲۹۲۳	۲۹۴۵	۲۹۶۷	۲۹۸۹	۲۲
۲۰	۳۰۱۰	۳۰۳۲	۳۰۵۴	۳۰۷۵	۳۰۹۶	۳۱۱۸	۳۱۳۹	۳۱۶۰	۳۱۸۱	۳۲۰۱	۲۱
۲۱	۳۲۲۲	۳۲۴۳	۳۲۶۳	۳۲۸۴	۳۳۰۴	۳۳۲۴	۳۳۴۵	۳۳۶۵	۳۳۸۵	۳۴۰۴	۲۰
۲۲	۳۴۲۴	۳۴۴۴	۳۴۶۴	۳۴۸۳	۳۵۰۲	۳۵۲۲	۳۵۴۱	۳۵۶۰	۳۵۷۹	۳۵۹۸	۱۹
۲۳	۳۶۱۷	۳۶۳۶	۳۶۵۵	۳۶۷۴	۳۶۹۲	۳۷۱۱	۳۷۲۹	۳۷۴۷	۳۷۶۶	۳۷۸۴	۱۸
۲۴	۳۸۰۲	۳۸۲۰	۳۸۳۸	۳۸۵۶	۳۸۷۴	۳۸۹۲	۳۹۰۹	۳۹۲۷	۳۹۴۵	۳۹۶۲	۱۸
۲۵	۳۹۷۹	۳۹۹۷	۴۰۱۴	۴۰۳۱	۴۰۴۸	۴۰۶۵	۴۰۸۲	۴۰۹۹	۴۱۱۶	۴۱۳۳	۱۷
۲۶	۴۱۵۰	۴۱۶۶	۴۱۸۳	۴۲۰۰	۴۲۱۶	۴۲۳۲	۴۲۴۹	۴۲۶۵	۴۲۸۱	۴۲۹۸	۱۶
۲۷	۴۳۱۴	۴۳۳۰	۴۳۴۶	۴۳۶۲	۴۳۷۸	۴۳۹۳	۴۴۰۹	۴۴۲۵	۴۴۴۰	۴۴۵۶	۱۶
۲۸	۴۴۷۲	۴۴۸۷	۴۵۰۲	۴۵۱۸	۴۵۳۳	۴۵۴۸	۴۵۶۴	۴۵۷۹	۴۵۹۴	۴۶۰۹	۱۵
۲۹	۴۶۲۴	۴۶۳۹	۴۶۵۴	۴۶۶۹	۴۶۸۳	۴۶۹۸	۴۷۱۳	۴۷۲۸	۴۷۴۲	۴۷۵۷	۱۵
۳۰	۴۷۷۱	۴۷۸۶	۴۸۰۰	۴۸۱۴	۴۸۲۹	۴۸۴۳	۴۸۵۷	۴۸۷۱	۴۸۸۶	۴۹۰۰	۱۴
۳۱	۴۹۱۴	۴۹۲۸	۴۹۴۲	۴۹۵۵	۴۹۶۹	۴۹۸۳	۴۹۹۷	۵۰۱۱	۵۰۲۴	۵۰۳۸	۱۴
۳۲	۵۰۵۱	۵۰۶۵	۵۰۷۹	۵۰۹۲	۵۱۰۵	۵۱۱۹	۵۱۳۲	۵۱۴۵	۵۱۵۹	۵۱۷۲	۱۳
۳۳	۵۱۸۵	۵۱۹۸	۵۲۱۱	۵۲۲۴	۵۲۳۷	۵۲۵۰	۵۲۶۳	۵۲۷۶	۵۲۸۹	۵۳۰۲	۱۳
۳۴	۵۳۱۵	۵۳۲۸	۵۳۴۰	۵۳۵۳	۵۳۶۶	۵۳۷۸	۵۳۹۱	۵۴۰۳	۵۴۱۶	۵۴۲۸	۱۳
۳۵	۵۴۴۱	۵۴۵۳	۵۴۶۵	۵۴۷۸	۵۴۹۰	۵۵۰۲	۵۵۱۴	۵۵۲۷	۵۵۳۹	۵۵۵۱	۱۲
۳۶	۵۵۶۳	۵۵۷۵	۵۵۸۷	۵۵۹۹	۵۶۱۱	۵۶۲۳	۵۶۳۵	۵۶۴۷	۵۶۵۸	۵۶۷۰	۱۲
۳۷	۵۶۸۲	۵۶۹۴	۵۷۰۵	۵۷۱۷	۵۷۲۹	۵۷۴۰	۵۷۵۲	۵۷۶۳	۵۷۷۵	۵۷۸۶	۱۲
۳۸	۵۷۹۸	۵۸۰۹	۵۸۲۱	۵۸۳۲	۵۸۴۳	۵۸۵۵	۵۸۶۶	۵۸۷۷	۵۸۸۸	۵۸۹۹	۱۱
۳۹	۵۹۱۱	۵۹۲۲	۵۹۳۳	۵۹۴۴	۵۹۵۵	۵۹۶۶	۵۹۷۷	۵۹۸۸	۵۹۹۹	۶۰۱۰	۱۱
۴۰	۶۰۲۱	۶۰۳۱	۶۰۴۲	۶۰۵۳	۶۰۶۴	۶۰۷۵	۶۰۸۵	۶۰۹۶	۶۱۰۷	۶۱۱۷	۱۱
۴۱	۶۱۲۸	۶۱۳۸	۶۱۴۹	۶۱۶۰	۶۱۷۰	۶۱۸۰	۶۱۹۱	۶۲۰۱	۶۲۱۲	۶۲۲۲	۱۰
۴۲	۶۲۳۲	۶۲۴۳	۶۲۵۳	۶۲۶۳	۶۲۷۴	۶۲۸۴	۶۲۹۴	۶۳۰۴	۶۳۱۴	۶۳۲۵	۱۰
۴۳	۶۳۳۵	۶۳۴۵	۶۳۵۵	۶۳۶۵	۶۳۷۵	۶۳۸۵	۶۳۹۵	۶۴۰۵	۶۴۱۵	۶۴۲۵	۱۰
۴۴	۶۴۳۵	۶۴۴۴	۶۴۵۴	۶۴۶۴	۶۴۷۴	۶۴۸۴	۶۴۹۳	۶۵۰۳	۶۵۱۳	۶۵۲۲	۱۰
۴۵	۶۵۳۲	۶۵۴۲	۶۵۵۱	۶۵۶۱	۶۵۷۱	۶۵۸۰	۶۵۹۰	۶۵۹۹	۶۶۰۹	۶۶۱۸	۱۰
۴۶	۶۶۲۸	۶۶۳۷	۶۶۴۶	۶۶۵۶	۶۶۶۵	۶۶۷۵	۶۶۸۴	۶۶۹۳	۶۷۰۲	۶۷۱۲	۹
۴۷	۶۷۲۱	۶۷۳۰	۶۷۳۹	۶۷۴۹	۶۷۵۸	۶۷۶۷	۶۷۷۶	۶۷۸۵	۶۷۹۴	۶۸۰۳	۹
۴۸	۶۸۱۲	۶۸۲۱	۶۸۳۰	۶۸۳۹	۶۸۴۸	۶۸۵۷	۶۸۶۶	۶۸۷۵	۶۸۸۴	۶۸۹۳	۹
۴۹	۶۹۰۲	۶۹۱۱	۶۹۲۰	۶۹۲۸	۶۹۳۷	۶۹۴۶	۶۹۵۵	۶۹۶۴	۶۹۷۲	۶۹۸۱	۹
۵۰	۶۹۹۰	۶۹۹۸	۷۰۰۷	۷۰۱۶	۷۰۲۴	۷۰۳۳	۷۰۴۲	۷۰۵۰	۷۰۵۹	۷۰۶۷	۹
۵۱	۷۰۷۶	۷۰۸۴	۷۰۹۳	۷۱۰۱	۷۱۱۰	۷۱۱۸	۷۱۲۶	۷۱۳۵	۷۱۴۳	۷۱۵۲	۸
۵۲	۷۱۶۰	۷۱۶۸	۷۱۷۷	۷۱۸۵	۷۱۹۳	۷۲۰۲	۷۲۱۰	۷۲۱۸	۷۲۲۶	۷۲۳۵	۸
۵۳	۷۲۴۳	۷۲۵۱	۷۲۵۹	۷۲۶۷	۷۲۷۵	۷۲۸۴	۷۲۹۲	۷۳۰۰	۷۳۰۸	۷۳۱۶	۸
۵۴	۷۳۲۴	۷۳۳۲	۷۳۴۰	۷۳۴۸	۷۳۵۶	۷۳۶۴	۷۳۷۲	۷۳۸۰	۷۳۸۸	۷۳۹۶	۸

N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	D
۵۵	۷۴۰۴	۷۴۱۲	۷۴۱۹	۷۴۲۷	۷۴۳۵	۷۴۴۳	۷۴۵۱	۷۴۵۹	۷۴۶۶	۷۴۷۴	۸
۵۶	۷۴۸۲	۷۴۹۰	۷۴۹۷	۷۵۰۵	۷۵۱۳	۷۵۲۰	۷۵۲۸	۷۵۳۶	۷۵۴۳	۷۵۵۱	۸
۵۷	۷۵۵۹	۷۵۶۶	۷۵۷۴	۷۵۸۲	۷۵۸۹	۷۵۹۷	۷۶۰۴	۷۶۱۲	۷۶۱۹	۷۶۲۷	۸
۵۸	۷۶۳۴	۷۶۴۲	۷۶۴۹	۷۶۵۷	۷۶۶۴	۷۶۷۲	۷۶۷۹	۷۶۸۶	۷۶۹۴	۷۷۰۱	۷
۵۹	۷۷۰۹	۷۷۱۶	۷۷۲۳	۷۷۳۱	۷۷۳۸	۷۷۴۵	۷۷۵۲	۷۷۶۰	۷۷۶۷	۷۷۷۴	۷
۶۰	۷۷۸۲	۷۷۸۹	۷۷۹۶	۷۸۰۳	۷۸۱۰	۷۸۱۸	۷۸۲۵	۷۸۳۲	۷۸۳۹	۷۸۴۶	۷
۶۱	۷۸۵۳	۷۸۶۰	۷۸۶۸	۷۸۷۵	۷۸۸۲	۷۸۸۹	۷۸۹۶	۷۹۰۳	۷۹۱۰	۷۹۱۷	۷
۶۲	۷۹۲۴	۷۹۳۱	۷۹۳۸	۷۹۴۵	۷۹۵۲	۷۹۵۹	۷۹۶۶	۷۹۷۳	۷۹۸۰	۷۹۸۷	۷
۶۳	۷۹۹۳	۸۰۰۰	۸۰۰۷	۸۰۱۴	۸۰۲۱	۸۰۲۸	۸۰۳۵	۸۰۴۱	۸۰۴۸	۸۰۵۵	۷
۶۴	۸۰۶۲	۸۰۶۹	۸۰۷۵	۸۰۸۲	۸۰۸۹	۸۰۹۶	۸۱۰۲	۸۱۰۹	۸۱۱۶	۸۱۲۲	۷
۶۵	۸۱۲۹	۸۱۳۶	۸۱۴۲	۸۱۴۹	۸۱۵۶	۸۱۶۲	۸۱۶۹	۸۱۷۶	۸۱۸۲	۸۱۸۹	۷
۶۶	۸۱۹۵	۸۲۰۲	۸۲۰۹	۸۲۱۵	۸۲۲۲	۸۲۲۸	۸۲۳۵	۸۲۴۱	۸۲۴۸	۸۲۵۴	۷
۶۷	۸۲۶۱	۸۲۶۷	۸۲۷۴	۸۲۸۰	۸۲۸۷	۸۲۹۳	۸۲۹۹	۸۳۰۶	۸۳۱۲	۸۳۱۹	۶
۶۸	۸۳۲۵	۸۳۳۱	۸۳۳۸	۸۳۴۴	۸۳۵۱	۸۳۵۷	۸۳۶۳	۸۳۷۰	۸۳۷۶	۸۳۸۲	۶
۶۹	۸۳۸۸	۸۳۹۵	۸۴۰۱	۸۴۰۷	۸۴۱۴	۸۴۲۰	۸۴۲۶	۸۴۳۲	۸۴۳۹	۸۴۴۵	۶
۷۰	۸۴۵۱	۸۴۵۷	۸۴۶۳	۸۴۷۰	۸۴۷۶	۸۴۸۲	۸۴۸۸	۸۴۹۴	۸۵۰۰	۸۵۰۶	۶
۷۱	۸۵۱۳	۸۵۱۹	۸۵۲۵	۸۵۳۱	۸۵۳۷	۸۵۴۳	۸۵۴۹	۸۵۵۵	۸۵۶۱	۸۵۶۷	۶
۷۲	۸۵۷۳	۸۵۷۹	۸۵۸۵	۸۵۹۱	۸۵۹۷	۸۶۰۳	۸۶۰۹	۸۶۱۵	۸۶۲۱	۸۶۲۷	۶
۷۳	۸۶۳۳	۸۶۳۹	۸۶۴۵	۸۶۵۱	۸۶۵۷	۸۶۶۳	۸۶۶۹	۸۶۷۵	۸۶۸۱	۸۶۸۶	۶
۷۴	۸۶۹۲	۸۶۹۸	۸۷۰۴	۸۷۱۰	۸۷۱۶	۸۷۲۲	۸۷۲۷	۸۷۳۳	۸۷۳۹	۸۷۴۵	۶
۷۵	۸۷۵۱	۸۷۵۶	۸۷۶۲	۸۷۶۸	۸۷۷۴	۸۷۷۹	۸۷۸۵	۸۷۹۱	۸۷۹۷	۸۸۰۲	۶
۷۶	۸۸۰۸	۸۸۱۴	۸۸۲۰	۸۸۲۵	۸۸۳۱	۸۸۳۷	۸۸۴۲	۸۸۴۸	۸۸۵۴	۸۸۵۹	۶
۷۷	۸۸۶۵	۸۸۷۱	۸۸۷۶	۸۸۸۲	۸۸۸۷	۸۸۹۳	۸۸۹۹	۸۹۰۴	۸۹۱۰	۸۹۱۵	۶
۷۸	۸۹۲۱	۸۹۲۷	۸۹۳۲	۸۹۳۸	۸۹۴۳	۸۹۴۹	۸۹۵۴	۸۹۶۰	۸۹۶۵	۸۹۷۱	۶
۷۹	۸۹۷۶	۸۹۸۲	۸۹۸۷	۸۹۹۳	۸۹۹۸	۹۰۰۴	۹۰۰۹	۹۰۱۵	۹۰۲۰	۹۰۲۵	۶
۸۰	۹۰۳۱	۹۰۳۶	۹۰۴۲	۹۰۴۷	۹۰۵۳	۹۰۵۸	۹۰۶۳	۹۰۶۹	۹۰۷۴	۹۰۷۹	۵
۸۱	۹۰۸۵	۹۰۹۰	۹۰۹۶	۹۱۰۱	۹۱۰۶	۹۱۱۲	۹۱۱۷	۹۱۲۲	۹۱۲۸	۹۱۳۳	۵
۸۲	۹۱۳۸	۹۱۴۳	۹۱۴۹	۹۱۵۴	۹۱۵۹	۹۱۶۵	۹۱۷۰	۹۱۷۵	۹۱۸۰	۹۱۸۶	۵
۸۳	۹۱۹۱	۹۱۹۶	۹۲۰۱	۹۲۰۶	۹۲۱۲	۹۲۱۷	۹۲۲۲	۹۲۲۷	۹۲۳۲	۹۲۳۸	۵
۸۴	۹۲۴۳	۹۲۴۸	۹۲۵۳	۹۲۵۸	۹۲۶۳	۹۲۶۹	۹۲۷۴	۹۲۷۹	۹۲۸۴	۹۲۸۹	۵
۸۵	۹۲۹۴	۹۲۹۹	۹۳۰۴	۹۳۰۹	۹۳۱۵	۹۳۲۰	۹۳۲۵	۹۳۳۰	۹۳۳۵	۹۳۴۰	۵
۸۶	۹۳۴۵	۹۳۵۰	۹۳۵۵	۹۳۶۰	۹۳۶۵	۹۳۷۰	۹۳۷۵	۹۳۸۰	۹۳۸۵	۹۳۹۰	۵
۸۷	۹۳۹۵	۹۴۰۰	۹۴۰۵	۹۴۱۰	۹۴۱۵	۹۴۲۰	۹۴۲۵	۹۴۳۰	۹۴۳۵	۹۴۴۰	۵
۸۸	۹۴۴۵	۹۴۵۰	۹۴۵۵	۹۴۶۰	۹۴۶۵	۹۴۶۹	۹۴۷۴	۹۴۷۹	۹۴۸۴	۹۴۸۹	۵
۸۹	۹۴۹۴	۹۴۹۹	۹۵۰۴	۹۵۰۹	۹۵۱۳	۹۵۱۸	۹۵۲۳	۹۵۲۸	۹۵۳۳	۹۵۳۸	۵
۹۰	۹۵۴۲	۹۵۴۷	۹۵۵۲	۹۵۵۷	۹۵۶۲	۹۵۶۶	۹۵۷۱	۹۵۷۶	۹۵۸۱	۹۵۸۶	۵
۹۱	۹۵۹۰	۹۵۹۵	۹۶۰۰	۹۶۰۵	۹۶۰۹	۹۶۱۴	۹۶۱۹	۹۶۲۴	۹۶۲۸	۹۶۳۳	۵
۹۲	۹۶۳۸	۹۶۴۳	۹۶۴۷	۹۶۵۲	۹۶۵۷	۹۶۶۱	۹۶۶۶	۹۶۷۱	۹۶۷۵	۹۶۸۰	۵
۹۳	۹۶۸۵	۹۶۸۹	۹۶۹۴	۹۶۹۹	۹۷۰۳	۹۷۰۸	۹۷۱۳	۹۷۱۷	۹۷۲۲	۹۷۲۷	۵
۹۴	۹۷۳۱	۹۷۳۶	۹۷۴۱	۹۷۴۵	۹۷۵۰	۹۷۵۴	۹۷۵۹	۹۷۶۳	۹۷۶۸	۹۷۷۳	۵
۹۵	۹۷۷۷	۹۷۸۲	۹۷۸۶	۹۷۹۱	۹۷۹۵	۹۸۰۰	۹۸۰۵	۹۸۰۹	۹۸۱۴	۹۸۱۸	۵
۹۶	۹۸۲۳	۹۸۲۷	۹۸۳۲	۹۸۳۶	۹۸۴۱	۹۸۴۵	۹۸۵۰	۹۸۵۴	۹۸۵۹	۹۸۶۳	۵
۹۷	۹۸۶۸	۹۸۷۲	۹۸۷۷	۹۸۸۱	۹۸۸۶	۹۸۹۰	۹۸۹۴	۹۸۹۹	۹۹۰۳	۹۹۰۸	۴
۹۸	۹۹۱۲	۹۹۱۷	۹۹۲۱	۹۹۲۶	۹۹۳۰	۹۹۳۴	۹۹۳۹	۹۹۴۳	۹۹۴۸	۹۹۵۲	۴
۹۹	۹۹۵۶	۹۹۶۱	۹۹۶۵	۹۹۶۹	۹۹۷۴	۹۹۷۸	۹۹۸۳	۹۹۸۷	۹۹۹۱	۹۹۹۶	۴

۳ــ۵ــ اثبات روابط لگاریتمی

بنابر تعریف لگاریتم

$$10^{x} = y \;.\quad x = \log_{10} y$$

اثبات قضیه‌ی حاصل‌ضرب را قبلاً به‌طور تجربی در تمرین ۲ و در جدول‌های (۸) و (۹) دیدیم. حال با استفاده از تعریف لگاریتم که درستی آن را پذیرفته‌ایم، به‌وسیله‌ی استدلال استنتاجی، قضیه‌ی حاصل‌ضرب را به طور دقیق اثبات می‌کنیم.

قضیه‌ی ۱: برای هر دو عدد حقیقی و مثبت a و b،

$$\log_{10} ab = \log_{10} a + \log_{10} b$$

اثبات: اگر $\log_{10} a = x_1$ و $\log_{10} b = x_2$ آنگاه :

$$a = 10^{x_1} \ (1) \quad \text{و} \quad b = 10^{x_2} \ (2)$$

از ضرب دو رابطه‌ی (۱) و (۲) به دست می‌آوریم :

$$ab = 10^{x_1} \times 10^{x_2} = 10^{x_1 + x_2}$$

با توجه به تعریف لگاریتم

$$\log_{10} ab = x_1 + x_2$$

از رابطه‌ی (۱) و (۲) مقادیر x_1 و x_2 را جایگزین می‌کنیم

$$\boxed{\log ab = \log a + \log b}$$

و حکم ثابت می‌شود.

قضیه‌ی ۲[1]**:** نشان دهید که برای $a \,.\, 0$ ، $\log a^n = n \log a$.

اثبات: این قضیه در واقع تعمیم قضیه‌ی ۱ است زیرا :

$$\log a^n = \log \underbrace{a.a.a.\dots.a}_{n\ \text{بار}} = \underbrace{\log a + \log a + \dots + \log a}_{n\ \text{بار}}$$

در نتیجه

$$\boxed{\log a^n = n \log a}$$

تمرین ۴: با استفاده از استقرای ریاضی، قضیه‌ی ۲ را اثبات کنید.

تمرین ۵: ثابت کنید برای هردو عدد حقیقی و مثبت a و b،

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

۱ــ این قضیه برای هر توان حقیقی برقرار است اما در این‌جا اثبات محدود به توان‌های صحیح مثبت است.

مثال ۱۰: با استفاده از قضیه‌ی ۱، مقدار $\log ۵ + \log ۲۰$ را محاسبه می‌کنیم.

حل: $\log a + \log b = \log ab$

پس $\log ۵ + \log ۲۰ = \log ۵ \times ۲۰ = \log ۱۰۰ = ۲$

تمرین ۶ : به طور کلی، قضیه‌های ۱و ۲ برای لگاریتم در هر مبنایی درست است. دلیل درستی را بررسی کنید.

سه قضیه‌ی زیر، محاسبات با لگاریتم را آسان می‌کنند.

قضیه‌ی ۳: $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$

قضیه‌ی ۴: $\log_c a^n = n \log_c a$

قضیه‌ی ۵: $\log_c(\frac{a}{b}) = \log_c a - \log_c b$

مثال ۱۱: با استفاده از سه قضیه‌ی فوق، رابطه‌ی $\log(\frac{x^۲ y}{z})$ را تبدیل کنید.

حل:

طبق قضیه‌ی ۳ داریم

(۱) $\log(\frac{x^۲ y}{z}) = \log(x^۲ y) - \log z$

طبق قضیه‌ی ۱

(۲) $\log(x^۲ y) = \log x^۲ + \log y$

طبق قضیه‌ی ۲

(۳) $\log x^۲ = ۲ \log x$

با جایگزینی (۳) و (۲) در (۱) نتیجه می‌شود که

$$\log(\frac{x^۲ y}{z}) = ۲ \log x + \log y - \log z$$

مثال ۱۲: عبارت $\log(\sqrt[۳]{a}\sqrt{b})$ را تبدیل کنید.

حل: $\log(\sqrt[۳]{a}\sqrt{b}) = \log(a^{\frac{۱}{۳}} b^{\frac{۱}{۲}})$

طبق قضیه‌ی ۱ : $= \log a^{\frac{۱}{۳}} + \log b^{\frac{۱}{۲}}$

طبق قضیه‌ی ۲ : $= \frac{۱}{۳} \log a + \frac{۱}{۲} \log b$

مثال ۱۳: لگاریتم‌های زیر را به یک لگاریتم تبدیل کنید :

$$A = \log\sqrt{P} - \log\sqrt{۴P} + \log(\frac{۱}{۲}P^{۲}) + \log ۴$$

حل: طبق قضیه‌ی ۳ :

$$A = \log(\frac{\sqrt{P}.\frac{۱}{۲}P^{۲}.۴}{\sqrt{۴P}})$$

$$A = \log(\frac{P^{\frac{۱}{۲}}.\frac{۱}{۲}P^{۲}.۴}{۲P^{\frac{۱}{۲}}})$$

$$A = \log(\frac{۱}{۴}P^{۲}.۴)$$

$$\boxed{A = \log P^{۲}}$$

مثال ۱۴: معادله‌ی زیر را با شرط $q>۰$ و p برای x حل کنید :

$$\log x - \frac{۱}{۲}\log(pq) = -\frac{۱}{۲}\log(p/q)$$

حل:

$$\log x - \frac{۱}{۲}\log p - \frac{۱}{۲}\log q = -\frac{۱}{۲}\log p + \frac{۱}{۲}\log q$$

$$\log x = \frac{۱}{۲}\log q + \frac{۱}{۲}\log q = \log q$$

در نتیجه

$$\boxed{x = q}$$

به دلیل راحت‌تر بودن محاسبات با لگاریتم اعشاری (دهدهی) می‌توانیم لگاریتم در مبناهای دیگر را تبدیل به لگاریتم اعشاری (لگاریتم در مبنای ۱۰) بکنیم.

قضیه‌ی ۶: اگر $x>۰$ آنگاه $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$.

اثبات: $\log_a x$ را مساوی y قرار می‌دهیم

$$\log_a x = y \qquad (۴)$$

$a^{y} = x$

طبق تعریف لگاریتم اگر $a = b$ آنگاه $\log a = \log b$ در نتیجه

$\log(a^{y}) = \log x$

$y \log a = \log x$ (۵)

چون به دنبال $y = \log_{a} x$ هستیم، پس (۵) را برحسب y می‌نویسیم

$$y = \frac{\log x}{\log a}$$

و از (۴) مقدار y را جایگزین می‌کنیم

$$\boxed{\log_{a} x = \frac{\log x}{\log a}}$$

و اثبات کامل می‌شود.

مثال ۱۵: $\log_{۳} ۱۷ = \frac{\log ۱۷}{\log ۳}$. با استفاده از ماشین حساب، این مقدار را محاسبه می‌کنیم :

ترتیب عملیات	نمایش
۱۷ [log] [÷] ۳ [log] [=]	۲/۵۷۸

مسائل

۱ــ با استفاده از سه قضیه‌ی ۳، ۴و ۵، عبارات زیر را تبدیل کنید :

الف) $\log(a^{۳}b^{۵})$

ب) $\log[(a+b)(a-b)]$

پ) $\log(mr^{-۲})$

ت) $\log(\frac{۱}{a^{۲}b^{۳}c^{۴}})$

ث) $\log \sqrt[۳]{\frac{a^{۲}b}{c^{۲}}}$

ج) $\log(\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{b}\sqrt[4]{5})$

چ) $\log(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{b}\sqrt[4]{a^4}})$

ح) $\log(\frac{a^2}{b^2 c})$

۲ــ به یک لگاریتم تبدیل کنید :

الف) $5\log a - 2\log b + 3\log c$

ب) $\frac{1}{4}\log(ab) - \frac{3}{5}\log(a^2 b)$

پ) $2\log(x+y) - 3\log(x-y)$

ت) $\log pq - \log 2q$

۳ــ معادلات لگاریتمی زیر را برای متغیّر x حل کنید :

الف) $\log 27 = 3\log x$

ب) $\log x + 2\log 4 = 2\log 12$

پ) $\log(p-q) = \log(p^2 - q^2) - \frac{1}{2}\log x$

۳ــ۶ ــ کاربردهای لگاریتم: مقیاس سنجش زلزله و صدا

در سال ۱۳۶۹، زلزله‌ی شدیدی در شهر رودبار ایران به وقوع پیوست که متأسفانه باعث تلفات جانی بسیاری شد. مرکز زلزله شناسی دانشگاه تهران، شدّت زلزله را بین ۷/۲ تا ۷/۶ ریشتر[1] اعلام کرد.

اصولاً وقتی که رسانه‌ها خبر وقوع زلزله‌هایی با قدرت بیش از ۵ ریشتر را گزارش می‌کنند،

۱ــ Richter

مردم هراسان شده، نگران تلفات احتمالی آن می‌گردند. این در حالی است که اخبار وقوع زلزله‌هایی با قدرت ۳/۵ الی ۴ ریشتر خیلی نگران کننده نیستند، زیرا قدرت تخریبی آن‌ها پایین است. **چرا؟** چگونه اختلاف بین ۳/۵ تا ۷/۲ باعث بالا بردن قدرت تخریب تا این اندازه می‌شود؟ به طور طبیعی، این سؤال پیش می‌آید که واحد سنجش شدت زلزله چه ماهیتی دارد که افزایش چند واحد آن این‌گونه قدرت تخریب را بالا می‌برد؟

جالب است بدانید که مقیاس ریشتر که برای تعیین شدّت زلزله به کار برده می‌شود، بیانگر این است که با افزایش هر واحد ریشتر، قدرت تخریب ده برابر می‌شود. به عنوان مثال، زلزله‌ای با قدرت ۶ ریشتر ده بار شدیدتر از زلزله‌ای با قدرت ۵ ریشتر و ۱۰۰ بار شدیدتر از زلزله‌ای با قدرت ۴ ریشتر است.

فعالیت ۳ــ۴

الف ــ اگر برای زلزله‌ای با شدت ۴ ریشتر، شدت نسبی یک واحد را در نظر بگیریم، جدول زیر را کامل کنید :

شدت نسبی	۱	۱۰	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
واحد ریشتر	۴	۵	۶	۷	۸	۹

۱ــ چگونه شدت نسبی و واحد ریشتر از لحاظ شدت قابل مقایسه هستند؟

۲ــ چگونه زلزله‌ای با قدرت ۹ ریشتر با زلزله‌ای با قدرت ۷ ریشتر قابل مقایسه است؟

حتماً متوجه شدید که اعداد مقیاس ریشتر لگاریتمی هستند!

ب ــ با دانستن اینکه اعداد مقیاس ریشتر لگاریتمی هستند، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید :

۱ــ لگاریتم چه عددی صفر است؟

۲ــ بعید است که زلزله‌ای با قدرت ۲ ریشتر احساس شود. لگاریتم چه عددی ۲ است؟

۳ــ زلزله‌ای با قدرت ۷/۲۵ ریشتر اگر در نزدیکی محل پرجمعیتی اتفاق بیفتد فاجعه‌آمیز است. لگاریتم چه عددی ۷/۲۵ است؟

به نکته‌ای که در مجله‌ی دانستنی‌ها شماره‌ی ۱۰ سال شانزدهم ــ اردیبهشت ۱۳۷۴ نوشته

شده است دقّت کنید :

زرادخانه‌ی نیروهای طبیعی...
زمین لرزه = ۵۰۰۰۰ بمب اتمی

زمین‌لرزه‌ای به قدرت ۱۰ درجه در مقیاس ریشتر، معادل ۱۰ میلیارد تن انفجار تی.ان. تی انرژی آزاد می‌کند. بمب هیروشیما معادل ۲۰۰۰۰ تن تی.ان.تی بود. به ناحق زمین لرزه‌ها را تخریب کننده‌ترینِ پدیده‌های طبیعی به شمار می‌آورند. آمار نشان می‌دهند که گردبادها و طوفان‌ها و سیل‌ها، خسارات مالی و جانی سنگین‌تری به بار می‌آورند.

تمرین

۱ــ[1]اولین فیلم انیمیشن در تاریخ سینما، فیلم **سفیدبرفی و هفت کوتوله** بود. مدت زمان فیلم۸۲ دقیقه بود و همچنان که در مورد فیلم‌های انیمیشن مدرن صحّت دارد، در هر ثانیه، ۲۴ تصویر و مجموع تعداد تصویرهایی که بر پرده ظاهر شد، ۲۴ . ۶۰ . ۸۲ بود.

با استفاده از لگاریتم، تعداد تقریبی تصویرهایی را که در فیلم سفیدبرفی و هفت کوتوله به‌کار برده شده بود پیدا کنید.

۲ــ [2]در یک سال، تقریباً $۴/۲ \cdot ۱۰^{۵}$ کیلوگرم گیاه در زیر هر کیلومترمربع از سطح اقیانوس می‌روید. همچنان‌که حدود $۳/۶ \cdot ۱۰^{۸}$ کیلومترمربع زمین نیز به‌وسیله‌ی اقیانوس پوشیده شده است.

با استفاده از لگاریتم، وزن تقریبی گیاه‌هایی را که در اقیانوس‌های سطح کره‌ی زمین در یک‌سال می‌رویند مشخّص کنید و مراحل کار خود را یادداشت کنید.

۳ــ۶ــ۱ــ مقیاس ریشتر: مقدار انرژی آزاد شده برحسب ژول که توسط مهیب‌ترین زلزله‌های دنیا تا به حال ثبت شده است، حدود ۱۰۰ میلیارد برابر انرژی آزاد شده توسط زلزله‌ی خفیفی است که به سختی قابل احساس است. در طی ۱۵۰ سال گذشته، افراد از کشورهای

۱و ۲ــ این دو مسأله از کتاب ژاکوب، ۱۹۸۲ صفحه ۲۱۶ گرفته شده است.

مختلف، مقیاس‌های متفاوتی برای اندازه‌گیری و مقایسه‌ی قدرت زلزله تهیّه کرده‌اند. در سال **۱۹۳۵**، چارلز ریشتر، زلزله‌شناس آمریکایی، یک مقیاس لگاریتمی برای سنجش قدرت زلزله تهیّه کرد که هنوز مورد استفاده است و به دلیل اهمیت، به نام خود او معروف گشته است.

زلزله‌ای با قدرت کمتر از ۴/۴۰ ریشتر قابل احساس نیست. انرژی آزاد شده توسط زلزله‌ای با قدرت بسیار کم به عنوان مبنای استاندارد مقایسه برای سنجش قدرت زلزله‌ها درنظر گرفته شده است که برابر است با

$$^{۱}E_{\circ} = ۱۰^{۴/۴۰} \text{ ژول}$$

آنگاه قدرت زلزله از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید :

$$^{۲}M = \frac{۲}{۳}\log\frac{E}{E_{\circ}}.$$

جدول (۱۱)

قدرت زلزله در مقیاس ریشتر	قدرت تخریب
M . ۴/۵	ضعیف
۴/۵ . M . ۵/۵	متوسط
۵/۵ . M . ۶/۵	زیاد
۶/۵ . M . ۷/۵	بسیار زیاد
M . ۷/۵	بزرگ‌ترین

که در آن E انرژی آزاد شده به وسیله‌ی زلزله، برحسب ژول است. جدول (۱۱) قدرت تخریب زلزله‌های مختلف را در مقیاس ریشتر نشان می‌دهد :

مثال ۱۶: زلزله‌ی سال ۱۹۰۶ سانفرانسیسکو در حدود $۵/۹۶ \times ۱۰^{۱۶}$ ژول انرژی آزاد کرد. زلزله آن‌چنان شدید بود که حتی خیابان‌های شهر را نابود کرد، طوری که عملاً، شهر سانفرانسیسکو از نو ساخته شد. قدرت زلزله در مقیاس ریشتر چقدر بود؟

حل: از رابطه‌ی $M = \frac{۲}{۳}\log\frac{E}{E_{\circ}}$ استفاده می‌کنیم و M را حساب می‌کنیم

$$M = \frac{۲}{۳}\log\frac{۵/۹۶ \times ۱۰^{۱۶}}{۱۰^{۴/۴۰}}$$

۱ــ Energy ۲ــ Magnitude

$$=\frac{۲}{۳}\log(۵/۹۶\times ۱۰^{۱۱/۶})$$

$$=\frac{۲}{۳}(\log ۵/۹۶+\log ۱۰^{۱۱/۶})$$

$$=\frac{۲}{۳}(۰/۷۷۵+۱۱/۶)$$

$$\boxed{M=۸/۲۵}$$

مثال ۱۷: شدت زلزله‌ی سال ۱۳۶۹ رودبار ۷/۲ الی ۷/۶ ریشتر گزارش شد. مقدار تقریبی انرژی آزاد شده برحسب ژول را پیدا کنید.

حل:

$$M=\frac{۲}{۳}\log\frac{E}{E_۰}$$

که در آن $M=۷/۲$ ، $E_۰=۱۰^{۴/۴۰}$ و E مجهول است. بنابراین

$$۷/۲=\frac{۲}{۳}\log\frac{E}{۱۰^{۴/۴۰}}$$

$$=\frac{۲}{۳}(\log E-\log ۱۰^{۴/۴۰})$$

$$=\frac{۲}{۳}(\log E-۴/۴۰)$$

$$=\frac{۲}{۳}\log E-\frac{۲}{۳}\times ۴/۴۰$$

و $$۷/۲=\frac{۲}{۳}\log E-۲/۹۳۳$$

یا

$$\frac{۲}{۳}\log E=۷/۲+۲/۹۳۳=۱۰/۱۳,$$

و در نتیجه

$$\log E=\frac{۱۰/۱۳}{\frac{۲}{۳}}=۱۵/۲,$$

برای محاسبه‌ی E یا از دکمه‌ی y^x ماشین حساب استفاده کنید که چون

$$E=۱۰^{۱۵/۲}$$

در نتیجه

$$E=۱/۵۸۴\times ۱۰^{۱۵}$$

یا از تابع عکس لگاریتم استفاده کنید :

ترتیب عملیات	نشان‌دهنده
$\boxed{۱۵/۲}$ [1] $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\log}$	$۱/۵۸۴\times ۱۰^{۱۵}$

مقدار E را می‌توانیم با مراجعه به جدول لگاریتم به دست آوریم

$$E=۱۰^{۱۵/۲}=۱۰^{۱۵}\times ۱۰^{۰/۲}$$

و در جدول به‌دنبال عددی می‌گردیم که لگاریتم آن ۰/۲ است که مقدار تقریبی آن عدد **۱/۵۸۴** است، یعنی

$$E=۱/۵۸۴\times ۱۰^{۱۵}$$

تمرین ۷: همین مثال را با فرض اینکه شدت زلزله‌ی رودبار ۷/۶ ریشتر باشد، انجام دهید.

۳ــ۶ــ۲ــ شدّت صدا: گوش انسان قادر به شنیدن صداهایی با شدّت‌های غیرقابل تصور است. بلندترین صدایی که گوش یک انسان سالم (بدون صدمه رسیدن به پرده‌ی گوش) قادر به شنیدن آن است، شدّتی معادل یک تریلیون ($۱۰^{۱۲}$) برابرِ شدّتِ کوتاه‌ترین صدایی که همان انسان می‌تواند بشنود دارد. مقیاس دسی‌بل[2] نیز یک مقیاس لگاریتمی برای سنجش شدّت صدا است که به احترام الکساندر گراهام‌بل، مخترع تلفن (۱۹۲۲ــ ۱۸۴۷)، به نام او نامگذاری شده است. مقیاس دسی‌بل چنین تعریف می‌شود

$$D=۱۰\log\frac{I}{I_{۰}}$$

که در آن D برابر **سطح دسی‌بل صدا**، I نشان‌دهنده‌ی شدّت صدا برحسب وات در هر مترمربع $(\frac{W}{m^{۲}})$ و $I_{۰}$ شدّت کمترین صدای قابل شنیدن توسط یک انسان نسبتاً سالم و جوان است. مقدار استاندارد شده‌ی $I_{۰}$ برابر $۱۰^{-۱۲}$ وات در هر مترمربع است. جدول (۱۲) شدّت بعضی از صداهای آشنا را نشان می‌دهد.

۱ــ در بعضی ماشین حساب‌ها به‌جای دکمه‌ی INV از دکمه‌ی 2ndF استفاده می‌شود.

۲ــ Decibel

جدول (۱۲)

منبع صدا	شدت صدا $\frac{W}{m^{۲}}$
در آستانه‌ی شنیدن	$۱/۰\times۱۰^{-۱۲}$
نجوا	$۵/۲\times۱۰^{-۱۰}$
مکالمه‌ی معمولی	$۳/۲\times۱۰^{-۶}$
ترافیک سنگین	$۸/۵\times۱۰^{-۴}$
مته‌ی سوراخ کردن سنگ	$۳/۲\times۱۰^{-۳}$
در آستانه‌ی درد	۱۰×۱۰^{۰}
هواپیمای جت با موتور سوخت	$۸/۳\times۱۰^{۲}$

مثال ۱۸: تعداد واحدهای دسی‌بل را که از صدای نجوا مانندی با شدت $۵/۲\times۱۰^{-۱۰}$ وات در هر مترمربع ایجاد می‌شود پیدا کنید.

حل: D را از فرمول $D=۱۰\log\frac{I}{I_۰}$ حساب می‌کنیم :

$$D=۱۰\log\frac{۵/۲\times۱۰^{-۱۰}}{۱۰^{-۱۲}}$$

$$=۱۰\log(۵/۲\times۱۰^{۲})$$

$$=۱۰(\log۵/۲+\log۱۰^{۲})$$

$$=۱۰(۰/۷۱۶+۲)$$

$D=۲۷/۱۶$ دسی بل

مقیاس لگاریتمی

چون لگاریتم هر عدد در مبنای به غیر از یک ــ افزایشی بسیار کندتر از خود آن عدد دارد، از لگاریتم‌ها برای ایجاد مقیاس‌های راحت‌تری برای مقایسه استفاده می‌شود.

فصل ۴

مُدل‌سازی ریاضی

مدل به معنی نمونه و الگویی است که براساس آن واقعیتی را مجسّم می‌کنیم. اسباب‌بازی‌ها، نمونه‌های آشنا از مدل‌هایی هستند که کودکان از طریق آن‌ها می‌توانند دنیای واقعی را تجسّم و درک کنند و به تصوّرات خود عینیت بخشند. درحقیقت، انسان‌ها در مراحل مختلف زندگی برای درک واقعیت‌ها ناگزیر از مُدل‌سازی هستند. یک نمونه‌ی جالب مدل‌سازی کره‌ی جغرافیایی است که در تشریح و توضیح مختصّات جغرافیایی زمین مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در شروع آموزش ریاضیات برای درک بهتر بسیاری از مفاهیم از مدل‌سازی استفاده می‌شود. مثلاً برای تدریس مفهوم عدد، نمایش اعداد حقیقی روی محور و نمایش نقطه در دستگاه مختصات دکارتی از مدل‌سازی بهره می‌گیریم. و این روند تا مراحل بالاتر آموزش هم‌چنان ادامه دارد.

مدل‌های فیزیک نیوتنی و فیزیک نسبیت اینشتین نیز نمونه‌هایی از مدل‌سازی قوانین طبیعت هستند. فیزیک نیوتنی مدلی از جهان ارائه می‌کند که اگرچه کامل و بی‌نقص نیست امّا در تبیین بسیاری از پدیده‌های طبیعی مفید است. با این حال، این مدل در مورد حرکت ذراتی که سرعتی نزدیک به سرعت نور دارند پاسخگو نیست و مدل ریاضی نسبیت اینشتین در این زمینه رهگشا است. هدف این فصل، ارایه‌ی مدل‌سازی ریاضی چند مسأله از زندگی واقعی و حلّ آن‌ها است.

۴ــ۱ــ مسائل رشد[1]

فعالیّت ۴ــ۱

مریم و دوستانش به حفظ محیط زیست اهمیت زیادی می‌دهند و اخبار مربوط به تحوّلات کره‌ی مَسکون را با دقّت دنبال می‌کنند. در روز اوّل مِهر، مریم ادّعا کرد که در خبر آمده است «لایه‌ی

۱ــ Growth

اُزُن زمین به‌سرعت در حال از بین رفتن است و خطرِ جدّی، زندگی ساکنان کره‌ی زمین را در ده سال آینده تهدید می‌کند!» مریم تلفنی این خبر را به دو نفر از دوستانش گفت و از هریک از آن‌ها خواست که خبر را تا روز بعد، به دو نفر دیگر اطّلاع دهند. روز دوّم، هریک از این دو نفر، خبر را به دو نفر دیگر رساند یعنی در روز دوّم مهر، چهارنفر دیگر خبر را شنیدند و در روز سوّم هشت نفر دیگر به آن‌ها که خبر را شنیده بودند، اضافه شدند. اگر خبر به همین ترتیب پخش شود، در روز دهم مهر چند نفر خبر را می‌شنوند؟ تا روز دهم، مجموعاً چند نفر خبر را خواهند شنید؟ برای یافتن پاسخ، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم :

با توجّه به جدول (۱)، می‌بینیم که سرعت پخش یا رشد خبر چقدر بوده است!

جدول (۱)

روز: n	تعداد افرادی که خبر را در روز nاُم می‌شنوند.	تعداد کل افرادی که تا روز nاُم خبر را شنیده‌اند ــ مریم هم جزءِ این عده است.
قبل از شروع به بخش خبر، تنها مریم آن را شنیده است.	۱	۱
۱	۲	۳
۲	۴	۷
۳	۸	۱۵
۴	۱۶	۳۱
۵	۳۲	۶۳
۶	۶۴	۱۲۷
۷	۱۲۸	۲۵۵
۸	۲۵۶	۵۱۱
۹	۵۱۲	۱۰۲۳
۱۰	۱۰۲۴	۲۰۴۷

تمرین ۱ : اگر مریم از دوستانش خواسته بود که هر پنج دقیقه یک بار خبر را به اطلاع دو نفر دیگر برسانند، چند دقیقه طول می‌کشید تا ۲۰۴۷ نفر خبر را بشنوند؟

اگر تعداد افرادی که در پایان روز بیستم، بیست و هشتم یا هر روز دیگر از خبر آگاهی پیدا می‌کنند مورد نظر باشد، قطعاً باید به‌دنبال راه میان‌بری بگردیم وگرنه محاسبات، طولانی، وقت‌گیر و کسل کننده می‌شوند. به همین منظور، جدول (۱) را برحسب توان‌های ۲ بازنویسی می‌کنیم. شما هم جای علامت سؤال‌ها را با استفاده از ماشین حساب، پر کنید :

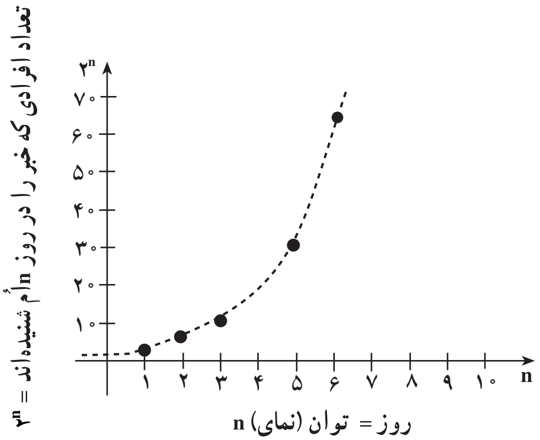
جدول (۲)

روز: n	تعداد افرادی که در روز nاُم خبر را شنیده‌اند.	تعداد کل افرادی که تا روز nاُم خبر را شنیده‌اند ــ مریم هم جزءِ این عده است.
قبل از شروع به پخش خبر، تنها مریم آن را شنیده است.	$۱ = ۲^{۰}$	$۱ = ۲^{۰+۱} - ۱$
۱	$۲ = ۲^{۱}$	$۳ = ۲^{۱+۱} - ۱$
۲	$۴ = ۲^{۲}$	$۷ = ۲^{۲+۱} - ۱$
۳	$۸ = ۲^{۳}$	$۱۵ = ۲^{۳+۱} - ۱$
۱۰	$۱۰۲۴ = ۲^{۱۰}$	$۲۰۴۷ = ۲^{۱۰+۱} - ۱$
۱۱	$۲۰۴۸ = ۲^{۱۱}$	$۴۰۹۵ = ۲^{۱۱+۱} - ۱$
؟	۶۵۵۳۶	؟
؟	؟	۵۲۴۲۸۷
۲۰	$۲^{۲۰}$	$۲^{۲۰+.۱} - ۱$
۲۸	$۲^{۲۸}$	$۲^{۲۸+.۱} - ۱$
n	۲^{n}	$۲^{n+.۱} - ۱$

با دقّت در جدول، مشاهده می‌کنیم که با گذشت یک روز، تعداد شنوندگان خبر در آن روز دوبرابر روز قبل می‌شوند و تعداد کل افراد (ستون سوم) تقریباً دوبرابر تعداد شنوندگان خبر در آن روز می‌شوند. این مشاهده، رابطه‌ی بین دو کمیّت یا دو متغیر را به ما نشان می‌دهد یعنی تعداد شنوندگان

خبر در هر روز، تابعی از آن روز است. رابطه‌ی بین تعداد روزها و تعداد شنوندگان خبر در آن روز، یک **تابع نمایی** است، زیرا رشد تعداد افراد شنونده‌ی خبر، به‌صورت توان‌ها یا نماهای ۲ است.

۴ــ۱ــ۱ــ نمودار رُشد نمایی: الگویی را که در ستون دومّ جدول مشاهده کردیم به‌صورت نمودار نمایش می‌دهیم :



شکل ۱ــ تعداد افرادی که در روز nاُم خبر را شنیده‌اند.

نمودار توان‌های دو، نمونه‌ای از یک تابع نمایی است و تصویر فوق رابطه‌ی بین n و ۲^{n} را نشان می‌دهد. این رابطه را می توانیم به‌صورت b = ۲^{n} نیز نمایش دهیم. درواقع، روابطی از نوع b = a^{n} که‌در آن a بزرگ‌تر از یک است (۱ . a) شکلی مشابه با این نمودار دارند. حرف a معرّف **پایه** و حرف n معرف **نما** یا **توان** است.

مثال ۱: با توجّه به نمودار فوق، می‌توانیم نماهای کسری ۲ را تقریب بزنیم. مثلاً برای به‌دست آوردن مقدار b = ۲$^{\frac{۷}{۲}}$ ، چون $\frac{۷}{۲}$ یعنی ۳/۵ بین ۳ و ۴ است، درنتیجه مقدار ۲$^{\frac{۷}{۲}}$ نیز بین ۲^{۳} و ۲^{۴} یا بین ۸ و ۱۶ است. پس مقدار تقریبی ۲$^{\frac{۷}{۲}}$ برابر ۱۲ است.

مثال ۲: اگر بخواهیم بدانیم که چه توانی از ۲ مساوی ۷۵ است، به نمودار مراجعه کرده، جواب تقریبی ۶/۲ را به‌دست می‌آوریم زیرا ۷۵ بین ۶۴ و ۱۲۸ یعنی ۲^{۶} و ۲^{۷} است :

۲^{۶} . ۲^{n} . ۲^{۷}

۶۴ . ۷۵ . ۱۲۸

یعنی n بین ۶ و ۷ است و چون ۷۵ به ۶۴ نزدیک‌تر است، پس n به شش نزدیک‌تر است. (این دو مثال را مقایسه کنید.)

تمرین ۲: با استفاده از نمودار :

الف) مقدار تقریبی n را در رابطه $۲^{n} = ۵۶$ پیدا کنید.

ب) مقدار تقریبی $۲^{\frac{۱۷}{۳}}$ را به‌دست آورید.

تمرین ۳: قسمت‌های(الف) و (ب) از تمرین ۲ چه رابطه‌ای با لگاریتم دارند؟ توضیح دهید.

فعالیت ۴ــ۲

فرض کنیم که هزینه‌ی تحصیل عمومی از سال ۱۳۷۰ خورشیدی با آهنگ[۱] سالانه‌ی ۱۰ درصد[۲] رو به افزایش بوده است و این روند تقریباً به همین ترتیب ادامه پیدا می‌کند. اگر در سال ۱۳۷۰ که میلاد به کلاس اوّل رفت، هزینه‌ی تحصیل[۳] او ۱۸۰۰۰ تومان بوده باشد، این هزینه در دوره‌ی پیش‌دانشگاهی (پس از ۱۲ سال) یعنی در سال ۱۳۸۲ چه‌قدر خواهد بود؟ برای پاسخ به این سؤال، دو مسیر مختلف را در نظر می‌گیریم :

مسیر ۱: هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان یک سال چنین است :

a = هزینه‌ی اوّلیه + ٪۱۰ (هزینه‌ی اولیه)

اگر هزینه‌ی اوّلیه را یک تومان فرض کنیم آن‌گاه :

$$a = ۱ + \frac{۱۰}{۱۰۰} \times ۱$$

$$a = ۱ + ۰/۱$$

هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال ۱۳۷۰ $\boxed{a = ۱/۱}$

در پایان سال ۱۳۷۱، هزینه‌ی تحصیل میلاد ۱/۱ هزینه‌ی تحصیل سال قبل او، یعنی $۱/۱ \times ۱/۱$ است زیرا $(۱/۱)(۱/۱) = (۱/۱)(۰/۱) + (۱/۱)$. در سال سوم، هزینه‌ی تحصیل میلاد ۱/۱ هزینه‌ی سال قبل او یعنی

$$(۱/۱ \times ۱/۱) \times ۱/۱$$

۱ــ Rate (نرخ)

۲ــ آهنگ رشد سالانه ۱۰ درصد یک حالت فرضی است. برای محاسبه‌ی هزینه واقعی از اطلاعات بانک مرکزی استفاده نمایید.

۳ــ هزینه‌ی تحصیل شامل لوازم تحریر، کتاب و هزینه‌ی رفت و آمد مدرسه است.

است. اگر هزینه‌های تحصیل میلاد را در پایان هر سال به‌طور منظم بنویسیم، می‌توانیم هزینه‌ی تحصیل او را در پایان سال دوازدهم حدس بزنیم و سپس محاسبه کنیم

هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال اوّل $= ۱/۱ = (۱/۱)^{۱}$

هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال دوم $= (۱/۱) \times (۱/۱) = (۱/۱)^{۲}$

هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال سوم $= (۱/۱ \times ۱/۱) \times (۱/۱) = (۱/۱)^{۳}$

هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال چهارم $= (۱/۱ \times ۱/۱ \times ۱/۱) \times (۱/۱) = (۱/۱)^{۴}$

هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال پنجم $= (۱/۱ \times ۱/۱ \times ۱/۱ \times ۱/۱) \times (۱/۱) = (۱/۱)^{5}$

هزینه‌ی تحصیل میلاد درپایان سال دوازدهم $= \underbrace{(۱/۱ \times ۱/۱ \times \ldots \times ۱/۱)}_{\text{۱۱ بار}} \times (۱/۱) = (۱/۱)^{۱۲}$

اگر هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان یک سال، یعنی ۱/۱ را **a** بنامیم، هزینه‌ی تحصیل او پس از $t = ۱۲$ به $(۱/۱)^{۱۲}$ می‌رسد. این مقدار را **b** می‌نامیم که نشان‌دهنده‌ی رشد هزینه‌ی تحصیلی میلاد پس از گذشت $t = ۱۲$ دوره‌ی زمانی است. با توجّه به آن‌چه که در این فعّالیت انجام دادیم، روابط زیر را به‌دست آوردیم

$$(۱/۱)^{۱۲} = \mathbf{b}$$

یا

$$\boxed{\mathbf{a}^{t} = \mathbf{b}}$$

a= یک به اضافه‌ی درصد افزایش **(فاکتور رشد در یک واحد زمانی)**؛

t = دوره‌ی زمانی ؛

b = فاکتوری که مقدار اولیّه در آن ضرب می‌شود تا هزینه را در t دوره‌ی زمانی به دست دهد **(فاکتور رشد در t دوره‌ی زمانی)**.

رابطه‌ی فوق را با این فرض که هزینه‌ی اولیّه یک تومان بود به دست آوردیم. چون هزینه‌ی اولیّه، ۱۸۰۰۰ تومان است، هزینه‌ی تحصیل میلاد در سال دوازدهم با ضرب هزینه‌ی اولیّه (۱۸۰۰۰ تومان) در فاکتور رشد در ۱۲ دوره‌ی زمانی، یعنی $\mathbf{b} = (۱/۱)^{۱۲}$ به دست می‌آید

هزینه‌ی تحصیل میلاد در سال دوازدهم = هزینه‌ی اولیّه $\times (۱/۱)^{۱۲}$

$$= ۱۸۰۰۰ \times (۱/۱)^{۱۲}$$

برای محاسبه‌ی عبارت فوق یا از طرفین لگاریتم می‌گیریم و یا با استفاده از تابع نمایی y^{x} در ماشین حساب علمی، مقدار $(۱/۱)^{۱۲}$ را به دست می‌آوریم و سپس در ۱۸۰۰۰ ضرب می‌کنیم درنتیجه

هزینه‌ی تحصیل در سال دوازدهم =۵۶۴۹۱/۷۱۰۷۸=۳/۱۳۸×۱۸۰۰۰

تمرین ۴ــ با استفاده از لگاریتم، هزینه‌ی تحصیل میلاد در سال دوازدهم را به دست آورید.

مسیر ۲ــ به کمک ماشین حساب، هزینه‌ی تحصیل میلاد را در هر سال با استفاده‌ی متوالی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم:

هزینه‌ی تحصیل در پایان هر سال = هزینه در شروع سال + هزینه در شروع سال ۰/۱

(۱) هزینه‌ی تحصیل در پایان اوّلین سال : ۱۳۷۰ =۱۸۰۰۰+۰/۱(۱۸۰۰۰)=۱۹۸۰۰

(۲) هزینه‌ی تحصیل در پایان دومین سال : ۱۳۷۱ =۱۹۸۰۰+۰/۱(۱۹۸۰۰)=۲۱۷۸۰

(۳) هزینه‌ی تحصیل در پایان سومین سال : ۱۳۷۲ =۲۱۷۸۰+۰/۱(۲۱۷۸۰)=۲۳۹۵۸

(۴) هزینه‌ی تحصیل در پایان دوازدهمین سال : ۱۳۸۱ =۵۱۳۵۶+۰/۱(۵۱۳۵۶)=۵۶۴۹۱/۷۰

با دقّت در چگونگی رشد هزینه در محاسبات فوق، می‌توانیم مراحل بالا را به صورت دیگری بازنویسی کنیم

(۱ــ۱) هزینه‌ی تحصیل در پایان اولین سال تحصیلی $=۱۹۸۰۰=۱۸۰۰۰(۱+۰/۱)=۱۸۰۰۰(۱/۱)^{۱}$

(۲ــ۲) هزینه‌ی تحصیل در پایان دومین سال تحصیلی $=۱۹۸۰۰(۱+۰/۱)=۱۹۸۰۰(۱/۱)^{۱}$،

از رابطه‌ی ۱ــ۱، مقدار ۱۹۸۰۰ را در رابطه‌ی ۲ــ۲ جایگزین می‌کنیم.

هزینه‌ی تحصیل در پایان دومین سال $=۱۸۰۰۰(۱/۱)^{۱}(۱/۱)^{۱}=۱۸۰۰۰(۱/۱)^{۲}$,

رابطه‌ی (۳) را نیز بازنویسی می‌کنیم

هزینه‌ی تحصیل در پایان سومین سال $=۲۱۷۸۰(۱+۰/۱)$

$=۱۸۰۰۰(۱/۱)^{۲}(۱/۱)$

$=۱۸۰۰۰(۱/۱)^{۳}$,

با همین استدلال، هزینه‌ی تحصیل میلاد در سال دوازدهم را حدس می‌زنیم

هزینه‌ی تحصیل در پایان دوازدهمین سال $=۱۸۰۰۰(۱/۱)^{۱۲}$,

می‌توانیم به جای هزینه‌ی اولیه یعنی ۱۸۰۰۰ تومان، $A_۰$ را قرار دهیم و مراحل فوق را از نو بنویسیم

$A_۰=۱۸۰۰۰$

$A_۱=۱۸۰۰۰+۱۸۰۰۰(۰/۱)=۱۸۰۰۰(۱/۱)$

یا

$$A_1 = A_0 + A_0(0/1)$$

$$A_1 = A_0(1/1) \qquad (۵)$$

به طور مشابه

$$A_2 = A_1 + A_1(0/1) = A_1(1/1) \qquad (۶)$$

$$A_3 = A_2 + A_2(0/1) = A_2(1/1) \qquad (۷)$$

با همین استدلال،

$$A_{12} = A_{11}(1/1)$$

مقدارهای A_1 و A_2 را از (۵) و (۶) به‌دست آورده و در (۷) جایگزین می‌کنیم

$$A_1 = A_0(1/1)$$

$$A_2 = A_1(1/1) = A_0(1/1)(1/1) = A_0(1/1)^2$$

$$A_3 = A_2(1/1) = A_0(1/1)^2(1/1) = A_0(1/1)^3$$

به همین ترتیب A_{12} را به‌دست می‌آوریم

$$A_{12} = A_0(1/1)^{12}$$

و در حالت کلّی

$$A_t = A_0(1/1)^t$$

که در آن t تعداد سال‌هاست.

اگر در حالت کلّی، آهنگ رشد هزینه را r در نظر بگیریم، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$\boxed{\mathbf{A_t = A_0(1+r)^t}}$$

که در آن :

$\underline{A_0}$ = هزینه‌ی اوّلیه ؛

$\underline{r}$ = آهنگ رشد سالانه‌ی هزینه ؛

$\underline{t}$ = تعداد سال‌ها ؛

$\underline{A_t}$ = هزینه‌ی انباشته شده بعد از t سال ؛

اختلاف این روش با روش مسیر ۱ در آن است که در این‌جا هزینه‌ی انباشته شده بعد از t سال یعنی A_t را مستقیماً به دست آوردیم در حالی که در مسیر ۱ ابتدا **b** یعنی **فاکتور رشد** در t را

محاسبه کردیم و سپس با ضرب هزینه‌ی اولیّه یعنی A_0 در آن، A_t را حساب کردیم که در آن

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}^t = (۱+\mathbf{r})^t$$

a = آهنگ یا فاکتور رشد در یک سال (رشد سالانه) ؛

b = آهنگ یا فاکتور رشد در t سال ؛

t = تعداد سال‌ها ؛

مثال ۳: متخصصّان بر این باورهستند که زمین قابل کشت و زرع کره‌ی مسکون حداکثر می‌تواند ۴۰ میلیارد نفر را غذا دهد[1]. در شروع سال ۱۹۹۰ میلادی، جمعیّت تقریبی کره‌ی زمین ۵/۲ میلیارد نفر بوده است. اگر جمعیّت به‌طور نمایی و با ضریب ثابت ۲٪ در سال رشد کند، چه زمانی جمعیّت به ۴۰ میلیارد نفر خواهد رسید.

حل: این مسأله را از هر دو مسیر پیشنهادی در فعالیت قبل حل می‌کنیم.

مسیر۱ : با توجّه به این‌که جمعیّت به طور نمایی رشد می‌کند، پس با استفاده از رابطه‌ی $\mathbf{a}^t = \mathbf{b}$ ، زمان خواسته شده را حساب می‌کنیم :

$$\mathbf{a} = ۱ + \frac{۲}{۱۰۰}$$

یا $\boxed{\mathbf{a} = ۱/۰۲}$

فاکتور رشد در t سال یعنی **b** برابر است با جمعیت در t سال آینده تقسیم بر جمعیت در سال ۱۹۹۰ (زمان شروع)

$$b = \frac{۴۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰}{۵/۲ \times ۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰} = \frac{۴۰ \times ۱۰^۹}{۵/۲ \times ۱۰^۹} = ۷/۶۹۲$$

با دانستن **a** و**b** ، تنها مجهول رابطه‌ی $\mathbf{a}^t = \mathbf{b}$ یعنی زمان t را محاسبه می‌کنیم :

$$(۱/۰۲)^t = ۷/۶۹۲$$

$$\log(۱/۰۲)^t = \log ۷/۶۹۲$$

$$t(\log ۱/۰۲) = \log ۷/۶۹۲$$

با مراجعه به جدول لگاریتم و یا به کمک ماشین حساب، مقدارهای فوق را پیدا می‌کنیم :

$$t(۰/۰۰۸۶) = ۰/۸۸۶$$

$$t = \frac{۰/۸۸۶}{۰/۰۰۸۶} = ۱۰۳/۰۲$$

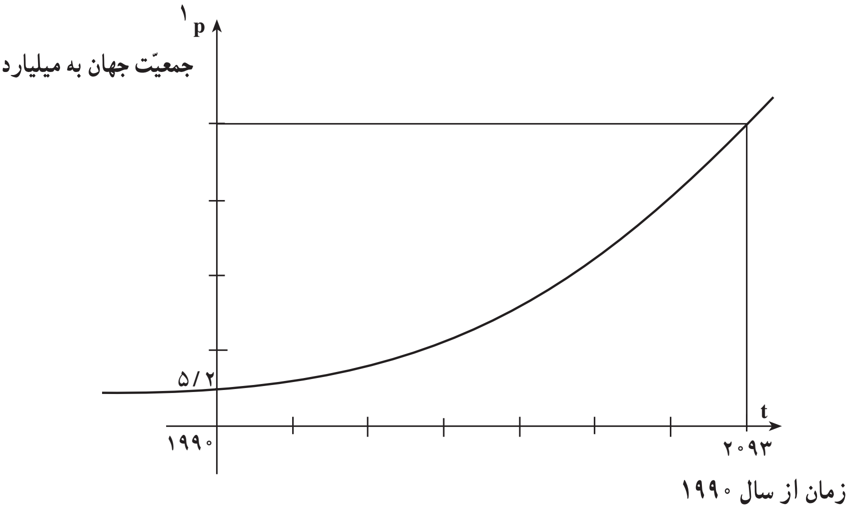
۱ــ مطمئناً با پیشرفت صنعت و تکنولوژی، راه‌های گوناگون دیگری برای تهیه‌ی غذا در کره‌ی زمین پیدا خواهد شد.

یعنی جمعیت کره‌ی زمین به طور تقریبی در سال

۱۹۹۰. ۱۰۳. ۲۰۹۳

به ۴۰ میلیارد نفر خواهد رسید.

در این مسأله یک **تابع نمایی** با پایه‌ی ۱/۰۲ وجود دارد که نشان دهنده‌ی آهنگ رشد جمعیّت در هر سال است. این تابع به این دلیل **نمایی** نامیده می‌شود که متغیّر t در **نما یا توان** قرار دارد.



شکل ۲ــ جمعیت تقریبی جهان: رشد نمایی

مسیر۲: داده‌های مسأله یعنی

$A_t \,.\, ۴۰\times ۱۰^{۹}$

$A_۰ \,.\, ۵/۲\times ۱۰^{۹}$

$r \,.\, ۲\% \,.\, \frac{۲}{۱۰۰} \,.\, ۰/۰۲$

را در رابطه‌ی $A_t \,.\, A_۰(۱ \,.\, r)^t$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$۴۰\times ۱۰^{۹} \,.\, ۵/۲\times ۱۰^{۹}(۱ \,.\, ۰/۰۲)^t$

یا

$۴۰ \,.\, ۵/۲(۱/۰۲)^t$

از طرفین لگاریتم می‌گیریم

۱ــ Population جمعیّت

$$\log ۴۰ = \log ۵/۲(۱/۰۲)^t$$

[۱] $$\log(۴\times ۱۰) = \log ۵/۲ + \log(۱/۰۲)^t$$

$$\log ۴ + \log ۱۰ = \log ۵/۲ + t\log ۱/۰۲ \qquad (۸)$$

با مراجعه به جدول لگاریتم، یا با استفاده از ماشین حساب، مقدار لگاریتم‌های فوق را به دست می‌آوریم

$$\log ۴ = ۰/۶۰۲ \quad \text{و} \quad \log ۵/۲ = ۰/۷۱۶ \quad \text{و} \quad \log ۱/۰۲ = ۰/۰۰۸۶$$

سپس با جای‌گذاری آن‌ها در رابطه‌ی (۸)، مقدار t را پیدا می‌کنیم

$$۰/۶۰۲ + ۱ = ۰/۷۱۶ + t\times ۰/۰۰۸۶$$

$$۱/۶۰۲ - ۰/۷۱۶ = ۰/۰۰۸۶t$$

$$t = \frac{۱/۶۰۲ - ۰/۷۱۶}{۰/۰۰۸۶} = \frac{۰/۸۸۶}{۰/۰۰۸۶} = ۱۰۳/۰۲۰$$

در شکل ۲، مشاهده می‌شود که هر چه زمان به جلو می‌رود، جمعیّت سریع‌تر و سریع‌تر رشد می‌کند و این ویژگیِ یک تابع نمایی است. این نمودار نشان می‌دهد که حتّی اگر در ابتدا، یک تابع نمایی آهسته آهسته رشد کند، با گذشت زمان، این رشد سریع‌تر و سریع‌تر خواهد شد. شاید آگاهی از این موضوع به ما کمک کند تا بهتر با مشکلات ازدیاد جمعیّت آشنا شویم!

در فعالیّت قبلی، اگر رشد جمعیّت کره‌ی زمین را از سال ۱۹۹۰ به‌بعد با آهنگ‌رشد[۲] ۱/۰۲ و در سال‌های مختلف حساب کنیم به نتایج جالبی می‌رسیم. به محاسبات زیر توجه کنید.

جمعیت کره‌ی زمین پس از گذشت ۳۰، ۳۵، ۵۰، ۶۶، ۷۰ و ۱۰۵ سال را از سال ۱۹۹۰ به بعد و با آهنگ رشد سالانه‌ی ۲ درصد حساب می‌کنیم

[۳] $$P_t = P_۰(۱+r)^t \qquad (۹)$$

$P_۰ = ۵/۲$ جمعیّت اولیه ــ شروع سال ۱۹۹۰ میلیارد ۵/۲ $\qquad$ (۱۰)

$P_{۳۰} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۳۰} = ۹/۴۱۹$ میلیارد $\qquad$ (۱۱)

$P_{۳۵} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۳۵} = ۱۰/۳۹۹ \; ! \; ۵/۲\times ۲$ میلیارد $\qquad$ (۱۲)

$P_{۵۰} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۵۰} = ۱۳/۹۹۶$ میلیارد $\qquad$ (۱۳)

۱ــ با تبدیل log۴۰ به log۴ + log۱۰، ارتباط بین لگاریتم‌گیری با نماد علمی بهتر دیده می‌شود.

۲ــ Growth rate

۳ــ در این رابطه به جای $A_۱$ و $A_۰$، از نمادهای $P_۱$ و $P_۰$ که معرّف جمعیت (Population) هستند، استفاده می‌کنیم.

$P_{۶۶} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۶۶} = ۱۹/۲۱۳$ میلیارد (۱۴)

$P_{۷۰} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۷۰} = ۲۰/۷۹۷ \; ! \; ۵/۲ \times ۴$ میلیارد (۱۵)

$P_{۱۰۵} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۱۰۵} = ۴۱/۵۹۳ \; . \; ۵/۲ \times ۸$ میلیارد (۱۶)

در محاسبات فوق، مشاهده می‌کنیم که رابطه‌های (۱۲)، (۱۵) و (۱۶) از ویژگی خاصّی برخوردار هستند. رابطه‌ی (۱۲) نشان می‌دهد که پس از گذشت **۳۵ سال**، جمعیّت کره‌ی زمین به دو برابر جمعیّت اوّلیه آن (شروع سال ۱۹۹۰) می رسد. رابطه‌ی (۱۵) نشان‌دهنده‌ی چهاربرابرشدن جمعیّت کره‌ی زمین پس از گذشت **۷۰ سال** یعنی **۳۵×۲** سال است. رابطه‌ی (۱۶) حاکی از هشت برابرشدن جمعیت کره‌ی زمین پس از گذشت **۱۰۵ سال** یعنی **۳۵×۳** سال است. این یافته‌ها را در جدولی منظم می‌کنیم تا رابطه‌ی بین آن‌ها را بهتر ببینیم :

جدول (۳)

تعداد سال‌ها = t	تعداد دوره‌ی زمانی = T	جمعیّت کره‌ی زمین	
۳۵	۱	۵/۲×۲=۵/۲×۲	$۵/۲×۲^{۱}$
۷۰	۲	(۵/۲×۲)×۲=۵/۲×۴	$۵/۲×۲^{۲}$
۱۰۵	۳	(۵/۲×۲×۲)×۲=۵/۲×۸	$۵/۲×۲^{۳}$

جمعیّت کره‌ی زمین در هر **دوره‌ی زمانی**[۱]، یعنی هر ۳۵ سال یک‌بار، به دو برابر می‌رسد. این دوره‌ی زمانی (۳۵ سال) را **زمان دوبرابرشدن**[۲] جمعیّت کره‌ی زمین می‌نامیم.

> ***زمان دوبرابر شدن*** *یک تابع نمایی رشد، زمانی است که مقدار اوّلیه دو برابر شود. هر تابع نمایی رشد دارای یک زمان دو برابرشدن ثابت است.*

می‌توانیم به جای آهنگ رشد سالانه‌ی جمعیّت، آهنگ رشد ماهانه و حتی آهنگ رشد روزانه را به‌دست آوریم که به واقعیّت نیز نزدیک‌تر است. مسأله‌ی قبلی را با توجّه به آهنگ رشد ماهانه بررسی می‌کنیم. چون در رابطه‌ی

$$P_t = P_۰(۱+r)^t$$

۱ـ Time period

۲ـ Doubling time

r آهنگ رشد سالانه است. درنتیجه آهنگ رشد ماهانه $\frac{r}{۱۲}$ خواهد بود. به‌عنوان مثال، جمعیّت کره‌ی زمین در ۳۵ سال آینده با توجّه به جمعیّت اوّلیه ۵/۲ میلیارد نفری در سال ۱۹۹۰ و قراردادن زمان برحسب ماه عبارت است از :

$$P_{۳۵} = ۵/۲(۱+\frac{۰/۰۲}{۱۲})^{۱۲\times۳۵} = ۱۰/۴۶۵ \text{ میلیارد}$$

درحالی که اگر آهنگ رشد سالانه را در نظر بگیریم، در ۳۵ سال آینده، جمعیت کره زمین تقریباً دو برابر یعنی $P_{۳۵} = ۱۰/۳۹۹$ میلیارد می‌شود که کم‌تر از تخمین جمعیّت با آهنگ رشد ماهانه است.

بهتر است برای مقایسه‌ی دقیق‌تر، جمعیّت دنیا را با درنظرگرفتن آهنگ رشد روزانه نیز بررسی کنیم. در چنین وضعی، به جای $r = ۰/۰۲$ ، $\frac{r}{۳۶۵}$ و یا $\frac{۰/۰۲}{۳۶۵}$ را قرار می‌دهیم، در این صورت :

$$P_{۳۵} = ۵/۲(۱+\frac{۰/۰۲}{۳۶۵})^{۳۶۵\times۳۵} = ۱۰/۴۷۱$$

مشاهده می‌کنیم که آهنگ رشد روزانه‌ی جمعیّت دقیق‌تر از آهنگ رشد ماهانه و باز هم دقیق‌تر از آهنگ رشد سالانه است. به‌طورکلی، اگر تقسیم‌بندی باز هم کوچک‌تری از سال را در نظر بگیریم، دقّت ما بالاتر می‌رود. اگر سال را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم، رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت.

$$\boxed{P_t = P_{\circ}(۱+\frac{r}{n})^{nt}}$$

۴ــ۲ــ مسائل زوال[۱]

فعالیت ۴ــ۳

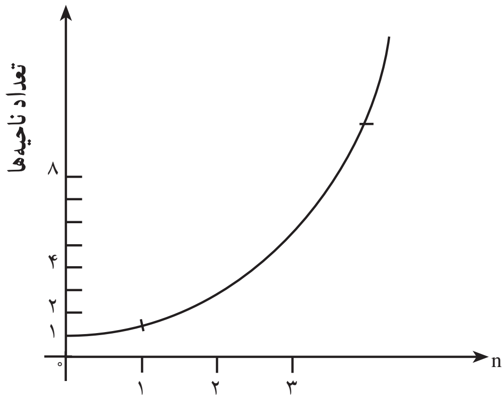
یک صفحه کاغذ سفید را در دست بگیرید و آن را تا بزنید. دوباره کاغذ تاخورده را تای جدید بزنید و این تازدن‌ها را تا آن‌جایی که می‌توانید ادامه دهید. بعد از اولین تا زدن، دو ناحیه به‌وجود می‌آید که مساحت هر یک نصف مساحت اولیه است. در دومین تا زدن، چهار ناحیه ایجاد می‌شود که مساحت هر کدام از آن‌ها نصف مساحت قبلی یعنی $\frac{۱}{۴}$ مساحت اولیه است. جدول (۴) چگونگی تغییر تعداد ناحیه‌هایی که بر اثر تازدن‌های متوالی ایجاد می‌شوند و چگونگی تغییر مساحت‌های آن ناحیه‌ها را بررسی می کند :

۱ــ Decay

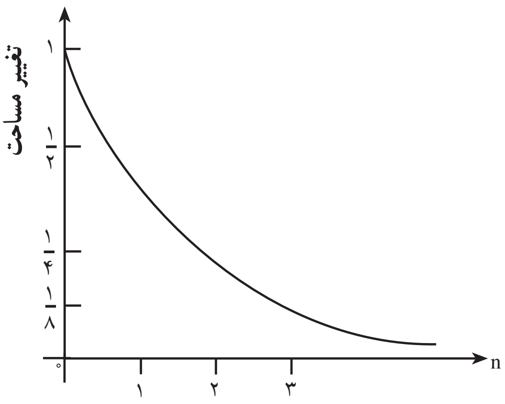
جدول (۴)

تعداد تازدن‌ها n	تعداد ناحیه‌ها	چگونگی تغییر مساحت ناحیه‌ها
۰	$۱ = ۲^{۰}$	$۱ = \frac{۱}{۲^{۰}} = (\frac{۱}{۲})^{۰}$
۱	$۲ = ۲^{۱}$	$\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲^{۱}} = (\frac{۱}{۲})^{۱}$
۲	$۴ = ۲^{۲}$	$\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲^{۲}} = (\frac{۱}{۲})^{۲}$
۳	$۸ = ۲^{۳}$	$\frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۲^{۳}} = (\frac{۱}{۲})^{۳}$
n	۲^{n}	$\frac{۱}{۲^{n}} = (\frac{۱}{۲})^{n}$

با توجه به داده‌های جدول بالا، دو نمودار زیر را رسم می‌کنیم:



شکل ۳ــ رشد



شکل ۴ــ زوال

همان‌طورکه در دو نمودار دیده می‌شود، هم‌چنان که تعداد ناحیه‌ها بر اثر تاکردن‌های متوالی بیشتر و بیشتر می‌شود، مساحت ناحیه‌ها کمتر و کمتر می‌شود! در واقع، تعداد ناحیه‌ها به طور نمایی رشد می‌کند، مساحت ناحیه‌ها به طور نمایی رو به زوال می‌رود. با بررسی عمیق‌تر نمودار (۴) مشاهده می‌کنیم که فاکتور زوال $a = \frac{۱}{۲}$ است که از یک کوچک‌تر است در حالی که در نمودار (۳) فاکتور رشد $a = ۲$ است که از یک بزرگ‌تر است.

۴ــ۲ــ۱ــ چگونگی تعیین قدمت سنگواره (زوال کربن)

فعالیت ۴ــ۴

کربن به‌وسیله‌ی موجودات زنده جذب می‌شود. نسبت ایزوتوپ‌های[۱] C^{12} ، C^{13} و C^{14} در موجودات زنده ثابت است. با این حال، به محض این‌که موجودات زنده بمیرند، جذب ایزوتوپ C^{14} به وسیله‌ی آن‌ها متوقف می‌شود و C^{14} موجود در آن‌ها شروع به زوال می‌کند. دانستن این‌که با چه سرعتی C^{14} روبه زوال می‌رود، به ما فرصت می‌دهد تا قدمت موجودات را پیدا کنیم و این فن (تکنیک) وسیله‌ی قدرتمندی برای باستان‌شناسان است که به آن آزمایش C^{14} گفته می‌شود. لازم است گفته شود که ۵۷۰۰ سال طول می‌کشد تا مقدار ایزوتوپ C^{14} به نصف مقدار اوّلیه‌ی خود برسد.

مثال۴: کربن یک استخوان فسیل شده شامل تنها ۲۰ درصد مقدار معمولی C^{14} است. می‌خواهیم قدمت استخوان را تخمین بزنیم.

حل: می‌دانیم که ۵۷۰۰ سال طول می‌کشد تا مقدار ایزوتوپ C^{14} کربن به نصف کاهش یابد. این زمان، **نیم‌عمر** و ۵۷۰۰ سال، یک **دوره‌ی زمانی** برای زوال C^{14} در کربن نامیده می‌شود. در واقع، ما به دنبال پیدا کردن دوره‌ی زمانی مشخصی هستیم که با گذشت آن، مقدار ایزوتوپ C^{14} کربن به ٪۲۰ می‌رسد. الگوی زیر می‌تواند راهنمای ما باشد :

جدول (۵)

دوره‌ی زمانی	تعداد سال‌ها	مقدار C^{14} باقی‌مانده	درصد مقدار باقی‌مانده
۱	۵۷۰۰	$\frac{1}{2}$	٪۵۰
۲	۱۱۴۰۰=۲×۵۷۰۰	$(\frac{1}{2})\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$	٪۲۵
۳	۱۷۱۰۰=۳×۵۷۰۰	$(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$	٪۱۲/۵

با مشاهده‌ی جدول درمی‌یابیم که در مدتی بیشتر از دو دوره‌ی زمانی و کم‌تر از سه دوره‌ی زمانی، مقدار C^{14} به ۲۰ درصد مقدار اولیه‌ی خود می‌رسد. اکنون که زمان تقریبی را پیدا کردیم، با دانستن این‌که میزان C^{14} در کربن **به صورت نمایی روبه زوال می‌رود** و با استفاده از

۱ــ ایزوتوپ‌های کربن دارای تعداد پروتون‌ها و الکترون‌های مساوی (۶) هستند ولی تعداد نوترون‌های آن‌ها متفاوت است. این تعداد در C^{12} ، C^{13} و C^{14} به‌ترتیب برابر ۶، ۷ و ۸ است.

رابطه‌ی $a^T = b$، زمان دقیق را پیدا می‌کنیم

فاکتور زوال در یک دوره‌ی زمانی $a = \frac{۱}{۲}$

فاکتور زوال در T دوره‌ی زمانی $b = \frac{۲۰}{۱۰۰} = \frac{۱}{۵}$

در نتیجه

$$\boxed{(\frac{۱}{۲})^T = \frac{۱}{۵}}$$ (۱)

رابطه‌ی (۱) مدلی مناسب برای به‌دست آوردن T است. با استفاده از (۱) و به کارگیری روش‌های محاسباتی متنوع، می‌توانیم مقدار T و سپس $t = ۵۷۰۰T$ را پیدا کنیم.

روش ۱: لگاریتم گرفتن از دو طرف (۱)

$$T \log\frac{۱}{۲} = \log\frac{۱}{۵}$$

$$T(-۰/۳۰۱) = -۰/۶۹۸$$

$$T = \frac{-۰/۶۹۸}{-۰/۳۰۱}$$

$$\boxed{T = ۲/۳۲۲}$$

چون هر دوره‌ی زمانی برای زوال مقدار $C^{۱۴}$ در کربن **۵۷۰۰** سال است، در نتیجه زمان دقیق برابر است با

$$t = ۵۷۰۰ \times T = ۵۷۰۰ \times ۲/۳۲۲$$

$$\boxed{t = ۱۳۲۳۵/۴}$$

یعنی استخوان فسیلی که شامل تنها ۲۰ درصد $C^{۱۴}$ است قدمتی برابر با **۱۳۲۳۵/۴** سال دارد.

روش ۲: استفاده از نمودار توان‌های کسری ۱۰ (فصل لگاریتم)

$$(\frac{۱}{۲})^T = \frac{۱}{۵}$$ (۲)

دو طرف (۲) را به صورت معکوس می‌نویسیم (به چه دلیل؟) :

$$۲^{T}=۵ \qquad (۳)$$

با توجه به نمودار جدول مذکور، مقادیر ۲ و ۵ را برحسب توان‌های کسری ۱۰ می‌نویسیم

$$۲=۱۰^{۰/۳۰۱} \quad , \quad ۵=۱۰^{۰/۶۹۹}$$

و آن‌ها را در (۳) جایگزین می‌کنیم

$$(۱۰^{۰/۳۰۱})^{T}=۱۰^{۰/۶۹۹}$$

$$۱۰^{۰/۳۰۱T}=۱۰^{۰/۶۹۹} \qquad (۴)$$

چون پایه‌ها در (۴) با هم برابرند، درنتیجه توان‌ها نیز با هم مساویند

$$۰/۳۰۱T=۰/۶۹۹ \qquad (۵)$$

$$T=\frac{۰/۶۹۹}{۰/۳۰۱}$$

تعداد دوره‌های زمانی لازم برای رسیدن $C^{۱۴}$ به ٪ ۲۰ مقدار اولیه برابر است با

$$\boxed{T=۲/۳۲۲}$$

و مدّت زمان برحسب سال برابر است با

$$t=۵۷۰۰T=۵۷۰۰\times ۲/۳۲۲$$

$$\boxed{t=۱۳۲۳۵/۴}$$

می‌بینیم که زمان دقیق به زمان تقریبی که در جدول (۵) به‌دست آوردیم، یعنی بین ۲ و ۳ دوره‌ی زمانی بسیار نزدیک است.

فعالیت ۴ــ ۵

مسأله: برای بیهوش کردن یک سگ، ۳۰ میلی‌گرم داروی سدیم پنتوباربیتال برای هر یک کیلوگرم وزن بدن لازم است. اگر دارو به طور نمایی در بدن روبه‌زوال برود، با در نظر گرفتن نیم‌عمر دارو که ۴ ساعت است، تقریباً چه مقدار دارو برای بیهوش نگه‌داشتن این سگ ۲۰ کیلوگرمی به مدّت ۴۵ دقیقه لازم است؟

حل: کلید اصلی حل این مسأله، دانستن زوال نمایی دارو در بدن است به این معنا که بعد از هر دوره‌ی زمانی (۴ساعت) دارو به نصف مقدار اولیه‌ی خود در بدن می‌رسد و ادامه‌ی نصف شدن‌ها همان زوال نمایی است.

در ضمن، باید بدانیم ۴۵ دقیقه چه نسبتی از یک دوره‌ی زمانی ۴ ساعتی است :

$$\text{۴۵ دقیقه} = \frac{\frac{۳}{۴}}{۴} = \frac{۳}{۱۶}$$

یا

$$\text{دوره‌ی زمانی}\ \frac{۴۵}{۴\times۶۰} = \frac{۹}{۴\times۱۲} = \frac{۳}{۴\times۴} = \frac{۳}{۱۶}$$

با توجه به‌داده‌های مسأله، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم :

جدول (۶)

دوره‌ی زمانی	تعداد ساعت‌ها	مقدار داروی باقی‌مانده برحسب توان‌های $\frac{۱}{۲}$
$\frac{۳}{۱۶}$	$\frac{۳}{۱۶}\times۴$	$(\frac{۱}{۲})^{\frac{۳}{۱۶}}$
۱	۱×۴	$(\frac{۱}{۲})^{۱}$
۲	۲×۴	$(\frac{۱}{۲})^{۲}$

داده‌های مسأله یعنی

فاکتور زوال در یک واحد زمانی= $\frac{۱}{۲}$

فاکتور زوال در $\frac{۳}{۱۶}$ واحد زمانی= b

دوره‌ی زمانی مورد نظر= $t = \frac{۳}{۱۶} = ۰/۱۸۷۵$

را در رابطه‌ی $a^t = b$ قرار می‌دهیم. آنگاه

$$(۰/۵)^{۰/۱۸۷۵} = b$$

یا

$$(\frac{۱}{۲})^{\frac{۳}{۱۶}} = b. \qquad (۶)$$

رابطه‌ی (۶) مدل مناسبی را برای پیدا کردن فاکتور زوال در $\frac{۳}{۱۶}$ واحد زمانی به دست می‌دهد. برای انجام محاسبات، راحت‌ترین کار استفاده از ماشین حساب علمی است : با توجه به وزن بدن سگ که ۲۰ کیلوگرم است، مقدار دارویی که در هر لحظه تا پایان عمل باید در بدن سگ وجود داشته باشد تا او را بیهوش نگه دارد، برابر $۶۰۰ = ۳۰ \times ۲۰$ میلی‌گرم است. در واقع، مقدار داروی بیهوشی لازم برای مدت عمل باید بیش از ۶۰۰ میلی‌گرم تا پایان عمل در بدن باشد. با محاسبات فوق، مقدار فاکتور زوال در ۴۵ دقیقه که همان $\frac{۳}{۱۶}$ دوره‌ی زمانی است را نیز پیدا کرده‌ایم

$$b = ۰/۸۷۸$$

تنها مجهول مسأله، مقدار داروی لازم در حین عمل است ؛ یعنی چه مقدار سدیم پنتوباربیتال باید به بدن سگ تزریق شود تا با توجه به فاکتور زوال $b = ۰/۸۷۸$ ، هم‌چنان ۶۰۰ میلی‌گرم دارو در بدن باقی بماند.

$$\text{مقدار داروی مورد نیاز برای تزریق} \times ۰/۸۷۸ = ۶۰۰$$

$$\text{مقدار داروی مورد نیاز برای تزریق} = \frac{۶۰۰}{۰/۸۷۸}$$

$$\boxed{\text{مقدار داروی مورد نیاز برای تزریق} = ۶۸۳/۳۷}$$

تمرین ۵: با روش‌های دیگر، ازجمله مراجعه به جدول لگاریتم، محاسبات فوق را انجام دهید.

مسائل

۱ــ اگر آهنگ رشد جمعیت در کشوری ۱/۰۲ در سال باشد، چند سال طول می‌کشد تا جمعیت دو برابر شود؟ (جواب را با تقریب یک رقم اعشار بنویسید)

۲ــ از یکی از آرامگاه‌های سومریان، یک ظرف سفالی با قدمت ۴۵ قرن یافت شده است. این قدمت با توجه به شواهد تاریخی است. برای تأیید آن، یک آزمایش C^{14} روی آن انجام شد. انتظار دارید چند درصد از کربن C^{14} اولیه، باقی مانده باشد؟

۳ــ ایزوتوپ هیدروژن H_1^3 که نیمه عمر آن ۱۲/۳ سال است در طبقات بالایی جو تشکیل می‌شود و همراه باران به زمین می‌آید. اگر میزان این ایزوتوپ در چوب یک کشتی قدیمی ٪۱۰ همان

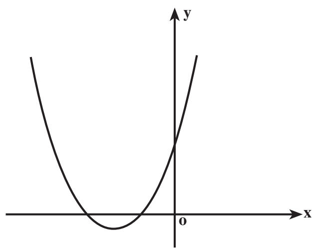
ایزوتوپ در چوب یک کشتی جدید مشابه باشد، سن آن را تقریب بزنید.

۴ــ معلوم شده است که میزان کربن C^{14} موجود در درختانی که توسط یخچال‌های متحرک عصر چهارم یخبندان نابود شده‌اند، ٪۲۷ میزان کربن C^{14} در درختان زنده است. درباره‌ی تاریخ شروع این عصر یخبندان چه می‌توانید بگویید؟

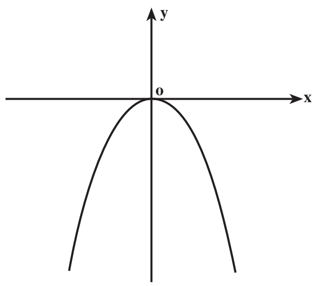
۴ــ۳ــ بهینه‌سازی

دامنه‌ی مسائل بهینه‌سازی سیار وسیع است، با این حال، در این کتاب، مسائلی از بهینه‌سازی را مطرح می‌کنیم که با دانستن رفتار و خصوصیات توابع درجه‌ی دوم قابل بررسی باشند.

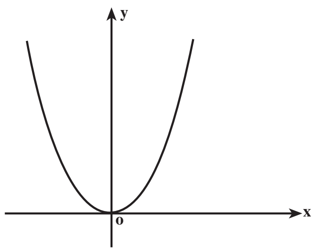
فعالیت ۴ــ۶



شکل ۵



شکل۶



شکل ۷

۱ــ از منحنی‌های بالا کدام‌یک ماکزیمم و کدام‌یک می‌نیمم دارند؟

۲ــ توابع $y = x^2 + 1$ و $y = -x^2 + 3$ را رسم کنید و وجود ماکزیمم و می‌نیمم را بررسی کنید.

۳ــ توابع $y = 2x^2 + 2x + 1$ و $y = -x^2 + 2x + 1$ را رسم کنید و وجود ماکزیمم و می‌نیمم را بررسی کنید.

۴ــ از سؤال‌های ۱ تا ۳ چه نتیجه‌ای درباره‌ی ماکزیمم و می‌نیمم تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ برای دو حالت $a \,.\, 0$ و $a \,.\, 0$ می‌گیرید؟

۵ــ اگر a . ۰ ، سهمی رو به بالا است یا رو به پایین؟ تابع ماکزیمم دارد یا می‌نیمم؟ اگر a . ۰ ، سهمی رو به بالا است یا رو به پایین؟ تابع ماکزیمم دارد یا می‌نیمم؟

۶ــ اگر $a = ۰$ ، در مورد ماکزیمم و می‌نیمم تابع چه می‌توان گفت؟

۷ــ طول نقطه‌ای را که در آن تابع ماکزیمم یا می‌نیمم دارد تعیین کنید.

۸ــ مقدار ماکزیمم یا می‌نیمم تابع f را تعیین کنید و سپس مختصات نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم آن را بنویسید.

۹ــ آیا جواب سؤال‌های ۵ تا ۸ برای هر تابع درجه‌ی دوم درست است؟ چرا؟

۱۰ــ آیا می‌توانید بدون قلم و کاغذ، نمودار و نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم هر تابع درجه‌ی دوم را تصور کنید؟ جواب خود را توجیه کنید.

۱۱ــ بدون استفاده از قلم و کاغذ نقاط ماکزیمم یا می‌نیمم توابع زیر را پیدا کنید :

الف) $f(x) = ۴x^۲ - ۳x$ ؛

ب) $g(x) = x^۲ - ۲x + ۱$

۱۲ــ آیا تابع درجه‌ی دومی وجود دارند که هم ماکزیمم و هم می‌نیمم داشته باشند؟ توضیح دهید.

فعالیت ۴ــ۷

۴ــ۴ــ بازاریابی

بخش تحقیقات و بازاریابی یک شرکت، پس از تحقیق و بررسی وضعیت بازار در مورد یک کالای جدید که توسط شرکت تولید می‌شود، معادله‌ی تقاضا را با توجه به این‌که بر اثر افزایش قیمت، تقاضا کم می‌شود، مدل‌سازی ریاضی کرده به مدیریت ارائه می‌کند :

معادله‌ی تقاضا : $x = ۶۰۰۰ - ۳۰p$ (۱)

که در آن x تعداد واحد کالایی است که مصرف کنندگان در یک ماه خرید می‌کنند و p[1] (برحسب تومان) قیمت هر واحد کالا است. همچنین بخش مالی شرکت، هزینه‌ی تمام شده‌ی تولید کالای جدید را با معادله‌ی زیر به مدیریت شرکت ارائه کرده است.

معادله‌ی هزینه : C[2] $= ۷۲۰۰۰ + ۶۰x$ (۲)

۱ــ Price ۲ــ Cost

که در آن ۷۲۰۰۰ تومان **هزینه‌ی ثابت تولید** مربوط به دستگاه‌ها، استهلاک و هزینه‌های مشابه است و ۶۰ تومان **هزینه‌ی متغیر تولید** هر واحد کالا مربوط به دستمزد کارگر، مواد اولیه، انبارداری و حمل و نقل است. با توجّه به قیمت کالا، یعنی p و تعداد واحد کالای تولید شده، x ، معادله‌ی درآمد از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید :

(قیمت هر واحد کالا) × (تعداد واحد کالا) = درآمد

$$R = x \times p$$ [1] : معادله‌ی درآمد (۳)

رابطه‌ی (۲)، هزینه‌ی C را به عنوان تابعی از x بیان می‌کند و رابطه‌ی (۱)، تقاضای x را بعنوان تابعی از p مشخص می‌نماید.

مدیر شرکت درصدد پیدا کردن مقدار تولیدی بود که بیشترین سود را عاید شرکت نماید. به‌همین منظور، بخش تحقیقات مشغول مطالعه گردید تا راهی پیدا کند که شرکت به سود ماکزیمم برسد. اولین حدس آن‌ها این بود که سود ماکزیمم وقتی عاید می‌شود که درآمد شرکت ماکزیمم گردد. اکنون به بررسی این حدس می‌پردازیم و سطح تولیدی را می‌یابیم که درآمد را ماکزیمم کند.

۴ــ۴ــ۱ــ ماکزیمم کردن درآمد: برای اینکار لازم است تابع درآمد را برحسب x بسازیم. معادله (۱) را بصورت

$$۳۰p = ۶۰۰۰ - x$$

می‌نویسیم و p را برحسب x محاسبه می‌کنیم :

$$p = \frac{۶۰۰۰ - x}{۳۰}$$

یا

$$p = ۲۰۰ - \frac{۱}{۳۰}x$$

p را در (۳) جایگزین می‌کنیم :

$$R(x) = x(۲۰۰ - \frac{۱}{۳۰}x)$$

۱ــ Revenew

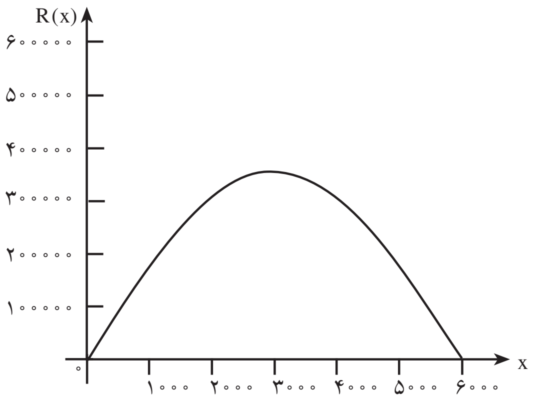
بنابراین مدل ریاضی به‌صورت زیر تبدیل می‌گردد :

پیدا کردن ماکزیمم تابع $R(x)=200x-\frac{1}{30}x^2$

با قرار دادن $R(x)=0$ محل تلاقی نمودار تابع $R(x)$ را با محور x ها محاسبه می‌کنیم که مقادیر زیر به‌دست می‌آید

$$x=0 \quad , \quad x=6000$$

نمودار تابع درجه‌ی دوم $R(x)$ به‌صورت زیر است :



شکل ۸ــ نمودار تابع R(X)

از طرف دیگر طول نقطه رأس سهمی برابر است با :

$$\text{طول رأس سهمی}: \; x=\frac{-b}{2a}=\frac{-200}{2\times(\frac{-1}{30})}=3000$$

طول این نقطه از روی نمودار نیز محاسبه می‌شود. نمودار محور x ها را در دو نقطه $O=(0\ ,\ 0)$ و $A=(6000\ ,\ 0)$ قطع می‌کند. طول رأس سهمی وسط این دو نقطه است. بنابراین :

$$x=\frac{0+6000}{2}=3000$$

و ماکزیمم درآمد برحسب تومان برابر است با

$$R(۳۰۰۰)=۲۰۰(۳۰۰۰)-\frac{۱}{۳۰}(۳۰۰۰)^{۲}$$
$$=۶۰۰۰۰۰-۳۰۰۰۰۰$$
$$=۳۰۰۰۰۰$$

بیشترین درآمد برحسب تومان	$R(۳۰۰۰)=۳۰۰۰۰۰$

امّا آیا این مقدار درآمد، سود را ماکزیمم خواهد کرد؟ به بررسی این سؤال می‌پردازیم.

۴ــ۴ــ۲ــ ماکزیمم کردن سود: با توجه به هدف شرکت ماکزیمم کردن تابع سود

هزینه ــ درآمد = سود

$P(x)=R(x)-C(x)$ [1]

مورد نظر است. برای این کار، با استفاده از رابطه‌ی (۲) می‌توان نوشت :

$$P(x)=(۲۰۰x-\frac{x^{۲}}{۳۰})-(۷۲۰۰۰+۶۰x)$$

$$=\frac{-x^{۲}}{۳۰}+۱۴۰x-۷۲۰۰۰$$

که تابعی درجه دوم است. در نتیجه، با توجه به علامت ضریب $x^{۲}$، تابع دارای ماکزیممی است که همواره در رأس سهمی اتفاق می‌افتد بنابراین :

طول رأس سهمی : $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(۱۴۰)}{۲(-\frac{۱}{۳۰})}=\frac{۷۰}{\frac{۱}{۳۰}}$

$$\boxed{x=۲۱۰۰}$$

ماکزیمم P $\quad P(۲۱۰۰)=\frac{-(۲۱۰۰)^{۲}}{۳۰}+۱۴۰(۲۱۰۰)-۷۲۰۰۰$

$$=\frac{-۴۴۱۰۰۰۰}{۳۰}+۲۹۴۰۰۰-۷۲۰۰۰$$
$$=-۱۴۷۰۰۰+۲۲۲۰۰۰=۷۵۰۰$$

۱ــ Profit

بیشترین سود برحسب تومان	ماکزیمم $P(x) = ۷۵۰۰۰$

هم‌چنین، شرکت باید قیمت فروش هر واحد کالا را به گونه‌ای تعیین کند تا سود ماکزیمم گردد. با استفاده از معادله‌ی (۴) می‌توان قیمت هر واحد کالا را به‌دست آورد :

$$P(۲۱۰۰) = ۲۰۰ - \frac{۱}{۳۰}(۲۱۰۰)$$

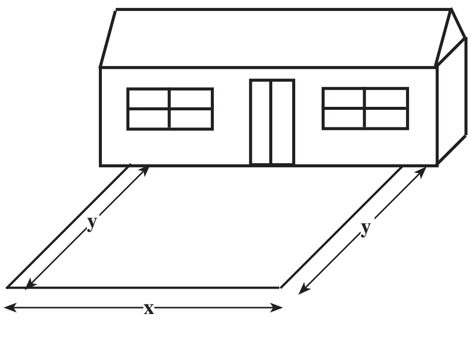
$$= ۲۰۰ - ۷۰$$

قیمت هر واحد کالا برحسب تومان $=۱۳۰$

تمرین: در حالت اول که درآمد ماکزیمم بود، سود را محاسبه کنید وآن را با سود ماکزیمم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

فعالیت ۴ــ۸

جنگلبانی می‌خواهد محوطه‌ی مستطیل شکلی جلوی محل سکونت خود بسازد. برای این منظور، مقدار ۱۰۰ مترمربع سیم توری به ارتفاع یک متر برای حصارکشی سه طرف محوطه در اختیار دارد. طول و عرض محوطه‌ی مستطیل شکل را چگونه انتخاب کند تا مساحت محصور شده ماکزیمم شود؟ برای حل این مسأله، می‌توان از شکل فرضی زیر کمک گرفت :



شکل ۹ــ مسأله جنگلبان

کمیّت‌های متغیر، طول و عرض و مساحت محوطه هستند. که آن‌ها را به ترتیب x ، y و A نامگذاری می‌کنیم. سپس رابطه‌ی بین متغیرها را بررسی می‌کنیم. چون جنگلبان فقط ۱۰۰ مترمربع سیم توری دارد، پس محیط محوطه مورد نظر او ۱۰۰ متر است :

محیط محوطه $=100=y+x+y$

یا

$100=x+2y$ (۱)

رابطه‌ی دیگری که بین متغیرها وجود دارد مربوط به مساحت محوطه است. چون محوطه مستطیل شکل است پس :

$A=x.y$ (۲)

از رابطه‌ی (۱)، x را بر حسب متغیر y به‌دست آورده و در رابطه‌ی (۲) جایگزین می‌کنیم

$x=100-2y$

و اگر رابطه‌ی اخیر را در (۲) جایگزین کنیم داریم

$A=(100-2y)y$

$=100y-2y^2$

بنابراین

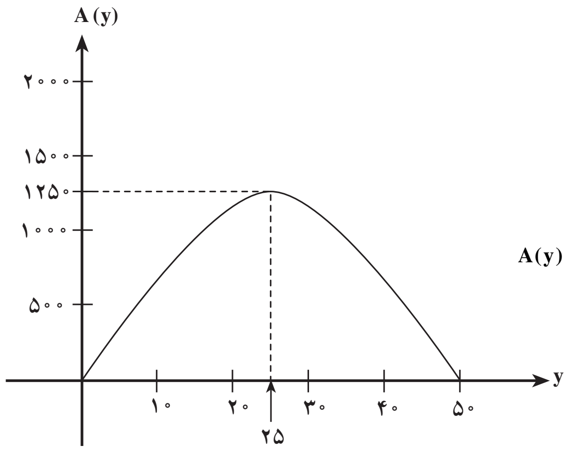
$A(y)=100y-2y^2$

چون هدف پیدا کردن طول و عرض محوطه به طریقی است که مساحت ماکزیمم شود، در نتیجه باید ماکزیمم تابع

$A(y)=100y-2y^2$

را به‌دست آورد.

تابع $A(y)$ در $y=50$ و $y=0$ مساوی صفر می‌شود (این مقادیر را خودتان به‌دست آورید)



شکل ۱۰ـــ نمودار تابع $A(y)=100y-2y^2$

رأس سهمی نقطه‌ی ماکزیمم تابع است. چون

$$y=\frac{-b}{2a}=\frac{-100}{2(-2)}=25$$: طول رأس سهمی

پس مقدار ماکزیمم تابع برابر است با :

$$\begin{aligned}A(25)&=100(25)-2(25)^2\\&=2500-1250\\&=1250 \text{ مترمربع}\end{aligned}$$

مسائل

۱ــ هرگاه در یک جریب زمین($4047m^2$) ، ۲۰، درخت گردو با فاصله‌ی مساوی از هم کاشته شوند، پس از رشد کافی در یک سال از هر درخت ۶۰ کیلوگرم گردو برداشت خواهد شد. برای هر درخت اضافی که کاشته شود، ۲ کیلوگرم از میانگین سالانه محصول درختان کم می‌گردد. برای به‌دست آوردن بیشترین محصول گردو در هر جریب چند درخت اضافه باید کاشته شود؟ در این صورت چه‌قدر محصول گردو برداشت می‌شود؟

۲ــ یک شرکت x واحد کالا در هفته تولید کرده و به فروش می‌رساند. تابع هزینه و تابع تقاضای هفتگی با معادلات زیر داده شده است :

$C(x)=5000+2x$: تابع هزینه

$x=1000-10P$: تابع تقاضا

الف) چند واحد کالا تولید کند و با چه قیمتی بفروشد تا بیشترین درآمد به‌دست آید؟

ب) چند واحد کالا تولید کند و با چه قیمتی بفروشد تا بیشترین سود به‌دست آید؟

پ) آیا بیشترین سود زمانی رُخ می‌دهد که درآمد هم ماکزیمم گردد؟

۳ــ یک ویژگی از اعداد حقیقی: بعضی از اعداد کوچک‌تر از مربع خودشان هستند مثلاً ۲ کوچک‌تر از $4=2^2$ است و بعضی از اعداد بزرگ‌تر از مربع خودشان هستند مانند $\frac{1}{9}$ ، $\frac{1}{3}$ و اعداد صفر و یک برابر مربع خودشان می‌باشند. ولی هر عدد حقیقی بین صفر و یک همواره از مربع خودش کوچک‌تر است. عددی بین ۰ و ۱ بیابید که اختلافش با مربع آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

۴ــ جعبه‌ی درباز: یک کارخانه ساخت وسایل بسته‌بندی می‌خواهد جعبه‌های درباز بسازد. ورقه‌هایی که در اختیار کارخانه است ۱۸×۱۸ می‌باشد. می‌خواهیم ابعاد جعبه‌ها را طوری تعیین

کنیم که بیشترین حجم را داشته باشند. برای این کار چند برگ کاغذ شطرنجی ۱۸×۱۸ تهیه کنید و هر بار یک مربع به ضلع ۱، ۲ و ... واحد از چهار گوشه‌ی کاغذ بردارید و کناره‌ها را تا کنید سپس حجم را با شمارش تعداد مکعب‌هایی که در آن جا می‌گیرد و یا با روش محاسبه‌ی حجم مکعب، محاسبه کنید و در جدول زیر بنویسید.

الف) حجم ماکزیمم چه‌قدر است؟ ابعاد مربوط به حجم ماکزیمم چه‌قدر است؟

جدول (۷)

ضلع مربع بریده‌شده	۱ ۲ ۳
حجم	

ب) اگر طول ضلع مربع بریده شده را x بگیریم اندازه‌ی ابعاد جعبه چه‌قدر است؟

پ) حجم را برحسب x بیان کنید. تابع از درجه‌ی چند است؟

ت) نقاط جدول را روی یک دستگاه مختصات رسم کرده و آن‌ها را با منحنی همواری به هم وصل کنید.

فصل ۵

احتمال مقدماتی

در گفت و شنودهای روزمره، معمولاً از شانس وقوع پیشامدها سخن می‌گوییم. مثلاً از شانس برنده شدن تیم فوتبال مورد علاقه‌ی خود یا از شانس بارندگی در یکی از ماه‌های تابستان حرف می‌زنیم. گاهی به جای **شانس** از کلمه‌ی **احتمال** استفاده می‌شود.

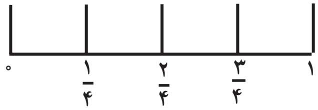
اصطلاحات **شانس** و **احتمال** در توصیف پدیده‌هایی به‌کار می‌روند که نمی‌توان نتیجه‌ی آنها را پیش از وقوع به‌طور قطع تعیین کرد زیرا نسبت به آنچه رخ خواهد داد اطمینان نداریم : نمی‌دانیم آیا تیم فوتبال مورد علاقه‌ی ما در بازی برنده خواهد شد؟ آیا در روز خاصی از تابستان بارندگی خواهیم داشت؟ در مقابل، پدیده‌هایی وجود دارند که می‌توان نتیجه‌ی آن‌ها را از پیش به‌طور قطع تعیین نمود : مطمئن هستیم که فردا خورشید دوباره طلوع خواهد کرد یا اگر به چای، شکر اضافه کنیم انفجار رخ نخواهد داد. در این‌گونه موارد به نتیجه‌ی پیشامد **مطمئن** هستیم.

احتمال به‌چه کار می‌آید؟ شاید مهمترین کاربرد احتمال کمک به تصمیم‌گیری در جریان زندگی روزمره باشد. اگر دونده‌ای بداند که شانس او در به‌دست آوردن مدال طلا اندک است، ممکن است تصمیم بگیرد با جدیّت بیشتری تمرین کند. اگر بدانید شانس اینکه یک داروی گیاهی معینی بیماری شما را برطرف سازد اندک است، ممکن است تصمیم بگیرید که از آن دارو استفاده نکنید. اگر احتمال زیادی بدهید که باران خواهد بارید و قصد بیرون رفتن از منزل را داشته باشید، با خود یک چتر یا بارانی همراه می‌برید. در انواع تصمیم‌گیری‌های صنعتی، علمی، اجتماعی و شخصی، احتمال دخالت دارد. مثلاً مدیران صنایع تولیدی به دانستن احتمال سودآوری محصول جدید یا احتمال بی‌عیب و نقص بودن قطعه‌ی ساخته شده علاقه‌مند هستند.

> پدیده‌هایی که می‌توان نتیجه‌ی آن‌ها را پیش از وقوع به‌طور قطع تعیین کرد **پدیده‌های قطعی** و پدیده‌هایی که نمی‌توان نتیجه‌ی آن‌ها را پیش از وقوع به‌طور قطع معین نمود، **پدیده‌های تصادفی** نامیده می‌شوند.

تمرین

۱ــ برای آشنایی بیشتر با پدیده‌های تصادفی، درباره‌ی هر کدام از پیشامدهای زیر فکر کنید. ببینید وقوع کدام‌یک محتمل‌تر است و شانس وقوع کدام، اندک. از مقیاس عددی زیر استفاده کنید و به هر پیشامد برحسب میزان شانس وقوعی که برای آن حدس می‌زنید، عددی بین ۰ و ۱ نسبت دهید. ۰ را به پدیده‌های غیرممکن و ۱ را به پدیده‌های قطعی نسبت دهید.



الف) طی این هفته دست کم یک روز در مدرسه غیبت خواهید داشت ؛

ب) یک روز در این هفته برای صبحانه کره و عسل خواهید خورد ؛

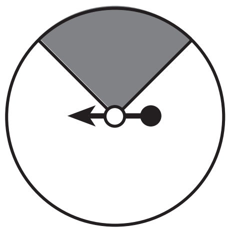
پ) در شهر شما در ماه تیر برف می‌بارد ؛

ت) خورشید فردا طلوع خواهد کرد ؛

ث) انسان می‌تواند دو ماه بدون آب زندگی کند ؛

ج) اولین بچه‌ای که بعد از این لحظه به دنیا خواهد آمد پسر است.

۲ــ مطابق شکل زیر، عقربه‌ای که در مرکز صفحه لولا شده، صفحه را به دو ناحیه‌ی **قرمز** و **سفید** تقسیم کرده است. این صفحه همراه با عقربه‌ی لولا شده به آن‌را **صفحه عقربه** می‌گوییم.



صفحه‌ی عقربه

الف) اگر عقربه را بچرخانید و سپس رها کنید آیا شانس این‌که نوک عقربه روی هر کدام از این ناحیه‌ها بایستد یکسان است؟ اگر هست چرا؟ اگر نیست بیشتر احتمال می‌دهید که روی کدام ناحیه بایستد؟ چرا؟

ب) آیا می‌توانید با اطمینان بگویید که اگر عقربه را ۱۰۰ بار بچرخانید لااقل یک‌بار نوک عقربه روی ناحیه‌ی قرمز قرار می‌گیرد؟

پ) آیا امکان دارد با ۱۰۰ بار چرخاندن باز هم نوک عقربه روی ناحیه‌ی قرمز

قرار نگیرد؟

۳ــ به بعضی از پیشامدهایی که ممکن است در زندگی شما رخ دهند فکر کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) سه پیشامد قطعی را نام ببرید.

ب) سه پیشامد غیرممکن را نام ببرید.

پ) سه پیشامد را نام ببرید که به وقوع آن خوش‌بین هستید.

ت) سه پیشامد را نام ببرید که شانس وقوع آن‌ها کم باشد.

۵ ــ۱ــ آزمایش‌های تصادفی

بسیاری از پدیده‌ها و اتفاقات در زندگی روزانه شانسی یا تصادفی هستند. یعنی نتیجه‌ی آن‌ها را از پیش به‌طور قطع نمی‌دانیم اما شاید بتوانیم همه‌ی نتایج ممکن را فهرست کنیم. با مشاهده و بررسی تعداد دفعاتی که هر کدام از آن نتایج رخ می‌دهد، می‌خواهیم به پیشامدها عددهایی را نسبت دهیم که معرّف **شانس** یا **احتمال** وقوع آنها هستند.

پدیده‌ی ساده‌ای را در نظر می‌گیریم : داور یک بازی فوتبال می‌خواهد با پرتاب کردن یک سکه، تعیین کند که در شروع بازی، توپ در اختیار کدام‌یک از دو تیم باشد. آیا سکه به «پشت» می‌نشیند یا به «رو»[1]؟ نمی‌توانیم نتیجه‌ی پرتاب را از پیش تعیین کنیم ولی می‌دانیم که فقط دو نتیجه وجود خواهد داشت. می‌توانیم با پرتاب مکرر یک سکه،و مشاهده‌ی نتیجه‌ی حاصل از آن، نتایج ممکن آزمایش پرتاب سکه را بررسی کنیم. در علم احتمال، به عملی که برای جمع‌آوری داده‌ها صورت می‌پذیرد، **آزمایش** می‌گوییم و اگر نتیجه‌ی این آزمایش را از پیش نتوان به‌طور قطع معین کرد، آن را **آزمایش تصادفی** می‌نامیم. آزمایش پرتاب سکه یک آزمایش تصادفی است زیرا پیش از پرتاب سکه نمی‌توان به‌طور قطع معین کرد که «رو» خواهد آمد یا «پشت». با این حال، تمام نتایج ممکن در این آزمایش همین دو تا هستند.

*مجموعه‌ی همه‌ی نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی، **فضای نمونه‌ای** آن نامیده می‌شود.*

۱ــ آن طرفی از سکه را که عدد روی آن نوشته شده است «رو» و طرف دیگر را «پشت» می‌نامیم.

فعالیت ۵ــ۱

یک سکه را ۵۰ بار پرتاب کنید و نتایج این آزمایش تصادفی را در جدولی همانند جدول زیر گردآوری کنید.

جدول (۱)

	خط نشان	تعداد کل
رو		
پشت		
کل		۵۰

هر بار که سکه را پرتاب می‌کنید نتیجه را با یک علامت، زیر ستون «خط‌نشان» ثبت کنید و در انتها آن‌ها را بشمارید و عدد حاصل را زیر ستون «تعداد کل» یادداشت کنید.

۱ــ نسبت تعداد دفعاتی که سکه «رو» آمده است به تعداد کل پرتاب‌ها، یعنی ۵۰ را به‌دست آورید ؛

به عبارت دیگر کسر

$$\text{نسبت «روها»} = \frac{\text{تعداد روها}}{\text{تعداد پرتاب‌ها}}،$$

را حساب کنید.

۲ــ نسبت پرتاب‌هایی که «پشت» آمده است را نیز مانند قسمت ۱ حساب کنید.

۳ــ نتیجه‌ی آزمایش خود را با نتایجی که دیگر دانش‌آموزان کلاس به‌دست آورده‌اند مقایسه کنید. آیا در نتایج تفاوتی به چشم می‌خورد؟

۴ــ آیا نتایج این آزمایش، همان چیزی بود که شما انتظار داشتید؟

*نسبت «رو»هایی که در آزمایش پرتاب سکه به‌دست آمد همان **فراوانی نسبی** است.*

اگر در ۵۰ بار پرتاب سکه، ۱۶ بار «رو» ظاهر شود، عدد $\frac{۱۶}{۵۰}$ یعنی فراوانی نسبی تعداد «رو»ها، **تخمین احتمال** یا شانس مشاهده‌ی «رو» در این آزمایش نامیده می‌شود. بنابراین از فراوانی نسبی برای تخمین احتمال استفاده می‌کنیم. ممکن است تعداد روهایی که شما مشاهده کرده‌اید عدد دیگری باشد، در این صورت تخمین شما هم برای احتمال به‌دست آوردن «رو» متفاوت خواهد بود. اعداد مختلفی که با انجام فعالیت ۵ــ۱ برای تعداد روها به‌دست آورده‌اید، تخمین‌های مختلفی برای تعداد روها خواهد بود. بنابراین، تخمین احتمال رخ دادن یک نتیجه ممکن است از آزمایشی به آزمایش دیگر فرق کند.

گاهی تخمین احتمال بدون انجام آزمایش تقریباً غیرممکن است. برای مثال اگر بخواهید احتمال این‌که در یک تقاطع ماشین‌ها از سمت چپ وارد شوند را تخمین بزنید، باید تعدادی از ماشین‌ها را مشاهده کنید و ببینید چند تا از آن‌ها از سمت چپ وارد می‌شوند. اگر از ۵۰ ماشینی که مشاهده کرده‌اید ۲۰ تای آن‌ها از سمت چپ وارد تقاطع شوند، تخمین احتمال $۰/۴۰ = \frac{۲۰}{۵۰}$ خواهد بود.

تخمین احتمال معمولاً برای یک یا چند نتیجه از مجموعه‌ی نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی به‌کار می‌رود. این نتایج خاص، زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای آزمایش تصادفی را تشکیل می‌دهند که آن را **پیشامد** می‌نامیم. تاکنون اصطلاح **پیشامد** را به معنای اتفاقات روزمره و طبیعی به‌کار برده‌ایم ولی از این پس **معنای اخیر** آن موردنظر است. تخمین احتمال پیشامد E[۱] را می‌توان با کسر

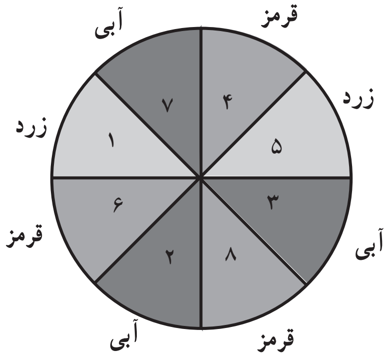
$$P(E) = \frac{\text{تعداد نتایج مشاهده شده که در E هستند}}{\text{تعداد کل مشاهدات در آزمایش}} \text{ [۲]}$$

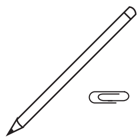
تعریف کرد که همان فراوانی نسبی است. بنابراین اگر یک سکه را ۵۰ بار پرتاب کنیم و ۱۶ بار «رو» بیاید، E عبارت است از پیشامد «رو آمدن» و $P(E) = \frac{۱۶}{۵۰} = ۰/۳۲$.

فعالیت ۵ ــ ۲

مطابق شکل، یک صفحه عقربه را به هشت قسمت مساوی تقسیم کنید، به‌جای عقربه‌ی چرخان می‌توانید یک گیره‌ی کاغذ بردارید و آن را حول مدادی که نوک آن را در مرکز صفحه عقربه

۱ــ Event
۲ــ Probability





قرار داده‌اید، بچرخانید. قسمت‌ها را شماره‌گذاری کنید و آن‌ها را با سه رنگ **قرمز**، **زرد** و **آبی**، رنگ کنید. عقربه را ۳۰ بار بچرخانید و هر بار رنگی را که نوک عقربه روی آن می‌ایستد یادداشت کنید. اگر عقربه روی یک خط ایستاد، دوباره آن را بچرخانید تا روی یکی از قسمت‌ها قرار گیرد. حال به کمک داده‌هایی که به دست آورده‌اید به سؤالات زیر پاسخ دهید :

۱ــ در این ۳۰ بار آیا ایستادن روی رنگ **قرمز** محتملتر است یا **زرد**؟ چرا؟

۲ــ در این ۳۰ بار آیا ایستادن روی رنگ **آبی** محتملتر است یا **قرمز**؟ چرا؟

۳ــ اگر یک دفعه‌ی دیگر عقربه را بچرخانید، احتمال ایستادن نوک عقربه روی رنگ **زرد** را تخمین بزنید ؛

۴ــ اگر یک دفعه‌ی دیگر عقربه را بچرخانید، احتمال ایستادن نوک عقربه روی رنگ **آبی** را تخمین بزنید ؛

۵ ــ اگر این عقربه را ۹۰ بار دیگر بچرخانید، انتظار شما از ایستادن عقربه روی رنگ **آبی** چه عددی است؟

۶ــ اعدادی را که به‌دست آورده‌اید با آنچه دیگر دانش‌آموزان کلاس به دست آورده‌اند مقایسه کنید و تعداد کل رنگ‌های **قرمز**، **آبی** و **زرد** مشاهده شده توسط کل کلاس را یادداشت کنید و مجدداً به سؤالات ۱ تا ۵ پاسخ دهید.

فعالیت ۵ ــ ۳

یک **تاس**[1] را ۶۰ بار پرتاب کنید و ببینید چه عددی ظاهر می‌شود. نتایج را در جدول زیر یادداشت کنید. مانند قبل مقابل هر عدد به ازای هر بار ظاهر شدن، یک خط در سطر خط‌نشان بکشید.

جدول (۲)

	تعداد ۱	تعداد۲	تعداد۳	تعداد ۴	تعداد ۵	تعداد ۶
خط نشان						
کل						

حال به کمک داده‌هایی که به‌دست آورده‌اید به سؤالات زیر پاسخ دهید :

۱ــ آیا در این پرتاب‌ها، همه‌ی شش عدد را مشاهده کرده‌اید؟ آیا انتظار داشتید در ۶۰ بار پرتاب، هر یک از اعداد لااقل یک بار ظاهر شود؟ توضیح دهید ؛

۲ــ احتمال ظاهر شدن عدد ۵ را تخمین بزنید ؛

۳ــ احتمال ظاهر شدن عدد ۴ را تخمین بزنید ؛

۴ــ پاسخ سؤال‌های ۲ و ۳را مقایسه کنید ؛

۵ ــ احتمال ظاهر شدن عدد زوج را تخمین بزنید. این پاسخ را با پاسخ سؤال ۳ مقایسه کنید ؛

۶ــ احتمال ظاهر شدن عدد بزرگتر از ۴ را تخمین بزنید ؛

۷ــ اگر تاس را ۱۰۰ بار دیگر پرتاب کنید، چند بار ظاهرشدن عدد ۵ را انتظار می‌کشید؟

۸ ــ نتایجی را که ۱۰ نفر از دانش‌آموزان کلاس به‌دست آورده‌اند در جدولی مطابق جدول (۳) گردآوری کنید.

۱ــ تاس مکعبی است که روی وجوه آن اعداد ۱ تا ۶ نوشته شده است.

جدول (۳)

جدول مرکب						
نفر	تعداد ۱	تعداد ۲	تعداد ۳	تعداد ۴	تعداد ۵	تعداد ۶
الف						
ب						
پ						
ت						
ث						
ج						
چ						
ح						
خ						
د						

۹ــ با استفاده از داده‌های به‌دست آمده توسط این ۱۰ نفر ؛

الف) احتمال ظاهر شدن عدد ۵ را تخمین بزنید و جواب را با پاسخ سؤال ۲ مقایسه کنید ؛

ب) احتمال ظاهر شدن عدد ۴ را تخمین بزنید و پاسخ را با پاسخ سؤال ۳ مقایسه کنید ؛

پ) احتمال ظاهر شدن عدد زوج را تخمین بزنید. این پاسخ را با پاسخ سؤال ۵ مقایسه کنید.

فعالیت ۵ ــ ۴

مدادتان را بردارید و آماده‌ی یادداشت کردن یک عدد شوید. آماده‌اید! بی درنگ یکی از اعداد بین ۱ تا ۴ را یادداشت کنید. سپس در جدول زیر تعداد دانش‌آموزان کلاس خود را که یکی از اعداد ۱ تا ۴ را انتخاب کرده‌اند بنویسید.

جدول (۴)

۴	۳	۲	۱

۱ــ هر عدد چند بار انتخاب شده است؟

۲ــ فراوانی نسبی کدامیک از این اعداد بزرگ‌تر است؟

۳ــ اگر از بین اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴، فراوانی انتخاب عدد ۳ بیشتر از بقیه باشد، بنابر تجربه احتمال این که شخصی خارج از کلاس شما عدد ۳ را برگزیند برابر فراوانی نسبی ۳ است. به کمک جدول فوق این احتمال را برای همه‌ی اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ تخمین بزنید.

۴ــ احتمال اینکه دانش‌آموزان اعداد یکی از ۱، ۲ و ۴ را انتخاب کرده باشند پیدا کنید.

تمرین ۱ : در صورت وجود، دو تا از سینماهای شهر خود را انتخاب کنید[1]. یکی را (الف) بنامید و دیگری را (ب). حال از تعدادی از دانش‌آموزان مدرسه‌ی خود بپرسید که به کدام‌یک از این سینماها رفته‌اند. توجه کنید که این دانش‌آموزان را **به تصادف** از میان دانش‌آموزان مدرسه انتخاب کنید. تعداد آن‌هایی را که به هر کدام از این سینماها رفته‌اند یا نرفته‌اند در جدول زیر ثبت کنید :

جدول (۵)

	به (ب) رفته است	به (ب) نرفته است	تعداد کل
به (الف) رفته است			
به (الف) نرفته است			
تعداد کل			

اکنون دانش‌آموزی را انتخاب کنید که از او نپرسیده‌اید. براساس داده‌هایی که از دانش‌آموزان مورد سؤال به‌دست آورده‌اید :

الف) احتمال این‌که او به سینمای (الف) رفته باشد را تخمین بزنید ؛

ب) احتمال این‌که او به سینمای (ب) رفته باشد را تخمین بزنید ؛

پ) احتمال این‌که او اصلاً به هیچ کدام از این دو سینما نرفته باشد را تخمین بزنید ؛

ت) اگر ۱۰۰ دانش‌آموز در مدرسه‌ی شما وجود داشته باشند که از آن‌ها نپرسیده‌اید، انتظار دارید چند نفر از آن‌ها به هر دو سینما رفته باشند؟

۱ــ اگر در شهر شما سینما وجود ندارد، می‌توانید دو شبکه‌ی تلویزیونی را انتخاب کنید.

۵ــ۲ــ احتمال نظری

در هر بار پرتاب سکه[1] فقط دو نتیجه‌ی ممکن وجود دارد و شانس ظاهر شدن آن‌ها یکسان است، یعنی **احتمال** آمدن «رو» در پرتاب سکه، $\frac{۱}{۲}$ است و می‌نویسیم :

$$P(\text{ر}) = \frac{۱}{۲}$$ [2]

به همین صورت احتمال آمدن «پشت» نیز $\frac{۱}{۲}$ است. در مورد پرتاب تاس، ۶ نتیجه‌ی ممکن برای اعدادی که ظاهر می‌شوند وجود دارد که شانس ظاهر شدن آن‌ها نیز برابر است. از این‌رو، احتمال مشاهده‌ی عدد ۳ در پرتاب یک تاس $\frac{۱}{۶}$ است.

مثال ۱: فرض کنید می‌خواهیم پیشامد «آمدن عدد زوج» را پیدا کنیم. سه تا از شش نتیجه‌ی ممکن یعنی اعداد ۲، ۴ و ۶ در این پیشامد قرار دارند. بنابراین احتمال آمدن عدد زوج $\frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$ است.

اگر نتایج آزمایشی، هم شانس و E یک پیشامد مربوط به این آزمایش باشد، احتمال E را به‌صورت

$$P(E) = \frac{\text{تعداد عناصر } E}{\text{تعداد کل عناصر}} = \frac{m}{n} \qquad (۱)$$

تعریف می‌کنیم. از این تعریف **فقط** وقتی استفاده می‌کنیم که نتایج آزمایش هم شانس هستند.

*به هریک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی یک **برآمد** و به احتمال‌هایی که به کمک آنچه به‌طور ایده‌آل باید رخ دهد تعیین می‌گردند و داده‌های حاصل از آزمایش در آن نقش ندارند، **احتمال نظری** گفته می‌شود.*

در حل مسائل احتمال ابتدا مجموعه‌ی همه‌ی برآمدهای ممکن آزمایش تصادفی را می‌یابیم ؛ سپس پیشامدی که احتمال آن خواسته شده است را به‌صورت زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای معین می‌کنیم ؛ در نهایت احتمال نظری آن پیشامد را به کمک قوانین احتمال به‌دست می‌آوریم. در

۱ــ منظور، سکه‌ی سالم است.

۲ــ از این پس قرار می‌گذاریم که به جای $P(\{۰\})$ بنویسیم $P(۰)$، به همین صورت به جای $P(\{(۰,۰)\})$ می‌نویسیم $P(۰,۰)$.

حالتی که برآمدها هم شانس هستند، احتمال نظری از رابطه‌ی (۱) به‌دست می‌آید. توجه کنید که ممکن است برآمدهای یک آزمایش تصادفی هم شانس نباشند.

احتمال نظری آمدن «رو» در یکبار پرتاب سکه $\frac{۱}{۲}$ است، اما وقتی سکه‌ای را ۵۰ بار پرتاب می‌کنیم (**فعالیت ۵ ــ ۱**) **معمولاً** به‌طور دقیق ۲۵ «رو» به‌دست نمی‌آوریم. فراوانی نسبی «رو» در آزمایش ۵۰ بار پرتاب سکه حتی از دانش‌آموزی به دانش‌آموز دیگر متفاوت است. اگر تعداد پرتاب‌ها به‌جای ۵۰ بار، ۱۰۰۰ بار می‌بود، فراوانی نسبی نزدیک‌تر به $\frac{۱}{۲}$ می‌شد و عددهایی که دانش‌آموزان مختلف به‌دست می‌آوردند، تفاوت چندانی با هم نمی‌کرد. اگر آزمایش‌های تصادفی به دفعات زیاد تکرار شوند، احتمال تجربی به‌دست آمده به احتمال نظری نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. با استفاده از احتمال نظری، می‌توان احتمال وقوع پیشامد در **دراز مدّت** را به دو طریق حدس زد :

۱ــ اگر بتوانیم احتمال نظری یک پیشامد را معیّن کنیم، می‌توانیم از آن برای اندازه‌گیری احتمال پیشامدها استفاده کنیم ؛

۲ــ اگر نتوانیم احتمال نظری یک پیشامد را معیّن کنیم، باید آزمایش را انجام دهیم و با تعیین فراوانی نسبی وقوع آن پیشامد، احتمال وقوع آن‌را **تخمین** بزنیم.

فعالیت ۵ ــ ۵

درفعالیت ۵ ــ۲، چون صفحه عقربه را به هشت ناحیه‌ی برابر تقسیم کردیم، ایستادن عقربه روی ناحیه‌های مختلف هم شانس است. با استفاده از تعریف احتمال نظری :

۱ــ احتمال اینکه عقربه در ناحیه‌ی شماره‌ی ۳ بایستد را بیابید ؛

۲ــ احتمال اینکه عقربه در ناحیه‌ای با شماره‌ی زوج بایستد را بیابید ؛

۳ــ احتمال اینکه عقربه روی ناحیه‌ی آبی رنگ بایستد چقدر است؟

۴ــ عقربه را ۴۰ بار بچرخانید و فراوانی برآمدها را در جدول زیر ثبت کنید :

جدول (۶)

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	کل
تعداد دفعات مشاهده									۴۰

۵ ــ فراوانی نسبی دفعاتی که عقربه در ۴۰ بار چرخش در ناحیه‌ی شماره‌ی ۳ می‌ایستد چقدر است؟

۶ــ فراوانی نسبی دفعاتی که عقربه در ۴۰ بار چرخش، در ناحیه‌ی زوج می‌ایستد چقدر است؟ نتیجه را با پاسخ سؤال ۲ مقایسه کنید.

۷ــ فراوانی نسبی **آبی‌**های مشاهده شده در این ۴۰ بار چرخش چقدر است؟ نتیجه را با پاسخ سؤال ۳ مقایسه کنید؛

۸ ــ سؤال‌های ۵، ۶ و ۷ تخمین‌های احتمال را به‌دست می‌دهند. اگر به جای ۴۰ بار چرخش، عقربه را ۴۰۰۰ بار بچرخانیم، در آن صورت احتمال‌های نظری را در سؤال‌های ۱، ۲ و ۳ **با احتمال‌های تجربی** مقایسه کنید.

فعالیت ۵ ــ ۶

۱ــ هر کدام از ارقام ۰ تا ۹ را روی ۱۰ کارت جداگانه بنویسید. آنگاه کارت‌ها را در یک جعبه قرار دهید و درهم بریزید. سپس بدون آنکه داخل جعبه را نگاه کنید، دست خود را داخل جعبه ببرید و یک کارت را بیرون بیاورید. احتمال اینکه عدد روی کارت

الف) ۱ باشد چقدر است؟

ب) زوج باشد چقدر است؟ (صفر را عدد زوج بگیرید)

پ) بزرگتر از ۷ باشد چقدر است؟

ت) بر ۳ بخش‌پذیر باشد چیست؟ (صفر هم بر ۳ بخش‌پذیر است.)

۲ــ اگر عدد روی کارتی که از جعبه بیرون کشیده‌اید صفر نباشد آن را به داخل جعبه برگردانید و مجدداً کارتی را بیرون آورید. آنقدر این کار را تکرار کنید تا عدد روی کارت بیرون آمده صفر نباشد. عدد روی این کارت را یادداشت کنید. حال کارت را به داخل جعبه برگردانید و جعبه را تکان دهید. کارت دیگری را بیرون بکشید و عدد روی آن را سمت راست عدد قبلی بنویسید تا یک عدد دو رقمی به‌دست آید. احتمال اینکه این عدد

الف) به ۳ ختم شود چقدر است؟

ب) زوج باشد چقدر است؟

عددهایی که به این صورت انتخاب می‌گردند، **عددهای تصادفی** نام دارند و شانس انتخاب شدن این عددها، با یکدیگر برابر است. عددهای تصادفی اغلب در انتخاب **نمونه‌های تصادفی** مورد استفاده قرار می‌گیرند. مثلاً فرض کنید ۱۰ دوست صمیمی دارید و می‌خواهید یکی از آن‌ها را به بازی بسکتبال دعوت کنید. می‌توانید آن‌ها را با شماره‌های ۰ تا ۹ شماره‌گذاری کنید و یک عدد را به تصادف از بین ۰ تا ۹ انتخاب کرده، آنگاه آن دوست خود که همان شماره را به او داده‌اید برای دعوت به بازی برگزینید.

تمرین ۲: اگر عددهای حاصل از تکرار آزمایش‌های فعالیّت ۵ـ۶ را به دنبال هم بنویسیم، یک دنباله ۲۵۰ رقمی به ازای ۲۵۰ بار انتخاب عدد به دست می‌آید :

۰۳۲۲۲۳۹۹۵۱۱۲۷۳۸۵۰۳۰۳۲۵۰۱۷۸۷۰۰۲...

این اعداد تصادفی را در جدولی به صورت زیر مرتب می‌کنیم. نمونه‌ی از این جدول را در زیر می‌بینید. که شامل ۲۵۰ رقم است و اعداد آن به ۵ ستون تقسیم شده‌اند تا بررسی آن‌ها راحت‌تر شود.

جدول (۷)

۰۳۲۲۲	۳۹۹۵۱	۱۲۷۳۸	۵۰۳۰۳	۲۵۰۱۷
۸۷۰۰۲	۶۱۷۸۹	۹۶۲۵۰	۹۹۳۳۷	۱۴۱۴۴
۶۸۸۴۰	۹۴۲۵۹	۰۱۹۶۱	۴۲۵۵۲	۹۱۸۴۳
۸۸۳۲۳	۲۸۸۲۸	۶۴۷۶۵	۰۸۲۴۴	۵۳۰۷۷
۵۵۱۷۰	۷۱۰۶۲	۶۴۱۵۹	۷۹۳۶۴	۵۳۰۸۸
۸۴۲۰۷	۵۲۱۲۳	۸۸۶۳۷	۱۹۳۶۹	۵۸۲۸۹
۰۰۰۲۷	۴۳۵۴۲	۳۷۰۳۰	۱۴۷۷۳	۷۳۰۸۷
۳۳۸۵۵	۰۰۸۲۴	۴۸۷۳۳	۸۱۲۹۷	۸۰۴۱۱
۵۰۸۹۷	۹۱۹۳۷	۰۸۸۷۱	۹۱۵۱۷	۱۹۶۶۸
۲۱۵۳۶	۳۹۴۵۱	۹۵۶۴۹	۶۲۵۵۶	۲۳۹۵۰

در جدولی از این نوع انتظار دارید

۱ــ چند تا ۱ ببینید؟

۲ــ چند رقم زوج ببینید؟

۳ــ چند رقم بزرگتر از ۷ ببینید؟

۴ــ چند رقم بخش‌پذیر بر ۳ ببینید؟

۵ــ تعداد ۱ها، تعداد رقم‌های زوج، تعداد رقم‌های بزرگتر از ۷ و تعداد رقم‌های بخش‌پذیر بر ۳ را در جدول فوق بشمارید. آیا فراوانی‌ها به اعدادی که انتظار دارید نزدیک هستند؟

تمرین ۳: صفحه‌ی مربوط به ماه فروردین را از یک تقویم دیواری جدا کنید و عددهای ۱ تا ۳۱ مربوط به روزهای آن را ببرید و دقت کنید که برش‌های شما هم‌اندازه باشند. آن‌ها را درون یک جعبه بریزید و کاملاً تکان دهید. قبل از انتخاب، احتمال این را بیابید که آن عدد :

الف) ۱۷ باشد ؛

ب) یک عدد فرد باشد ؛

پ) یک رقمی باشد.

تمرین ۴: اکنون کارتی را از درون جعبه بیرون بکشید و عدد روی آن را یادداشت کنید. سپس آن را به داخل جعبه برگردانید و جعبه را مجدداً تکان دهید و کارتی را خارج کنید. این آزمایش را ۲۰ بار تکرار کنید.

ت) بین این ۲۰ عدد انتخاب شده، نسبت اعداد فرد به کل اعداد را بیابید و نتیجه را با پاسخ سؤال (ب) مقایسه کنید ؛

ث) بین این ۲۰ عدد انتخاب شده، نسبت اعداد یک رقمی را بیابید و نتیجه را با پاسخ سؤال (پ) مقایسه کنید ؛

ج) اگر در یکی از شش ماه اوّل سال به دنیا آمده باشید، احتمال این‌که یکی از اعداد انتخاب شده از درون جعبه، همان روز تولد شما باشد چقدر است؟

چ) اهمیت هم‌اندازه بریدن عددهای تقویم در چیست؟

۵ــ۳ــ ارتباط بین فضای نمونه‌ای و احتمال نظری

در آزمایش پرتاب سکه فقط دو نتیجه یعنی «رو» و «پشت» وجود دارد، به همین دلیل فضای نمونه‌ای آن، تنها از دو عنصر تشکیل یافته است. فضای نمونه‌ای را معمولاً با علامت S[۱] نشان می‌دهند. بنابراین در آزمایش پرتاب سکه

$$S = \{ر , پ\}$$

۱ــ Sample space

حال فرض کنید به‌جای یک سکه، دو سکه به شماره‌های ۱ و ۲ را با هم پرتاب کنیم. این نیز یک آزمایش تصادفی است. فضای نمونه‌ای این آزمایش با آزمایش پرتاب **یک** سکه متفاوت است. هر کدام از دو سکه می‌تواند یا «رو» یا «پشت» بیاید. چون سکه ها را شماره‌گذاری کرده‌ایم «رو» یا «پشت» آمدن سکه‌ی اول با «رو» یا «پشت» آمدن سکه‌ی دوم تفاوت دارد. بنابراین، چهار برآمد وجود دارد : سکه‌ی اول و دوم هر دو «رو» بیایند، سکه‌ی اول و دوم هر دو «پشت» بیایند، سکه‌ی اول «رو» و سکه‌ی دوم «پشت» بیاید، سکه‌ی اول «پشت» و سکه‌ی دوم «رو» بیاید. به این ترتیب، فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب همزمان **دو** سکه همان حاصل‌ضرب دکارتی[1] فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب یک سکه در خودش می‌شود :

S = {(ر,ر),(ر,پ) , (پ,ر),(پ,پ)}

با استفاده از فضای نمونه‌ای، می‌توانیم احتمال‌های نظری پیشامدهای مختلف را حساب کنیم. برای نمونه، چون فضای نمونه‌ای شامل ۴ عنصر است، احتمال آمدن (ر,ر) برابر $\frac{۱}{۴}$ است :

P(ر,ر) = $\frac{۱}{۴}$

یا احتمال آمدن یک رو و یک پشت، یعنی احتمال پیشامد

E = {(ر,پ),(پ,ر)}

برابر با $\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$ است.

فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب تاس عبارت است از

S = {۱,۲,۳,۴,۵,۶}

با استفاده از این فضای نمونه‌ای، پیشامد ظاهر شدن عدد بزرگتر از ۴ عبارت است از

E = {۵,۶}

که احتمال نظری آن $\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$ است.

این‌بار،دو تاس همگن یکی به رنگ **سبز** و دیگری به رنگ **قرمز** را همزمان پرتاب می‌کنیم. پرتاب هر یک از تاس‌ها، شش نتیجه دارد که همان ظاهر شدن اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ است. پس پرتاب دو تاس، ۳۶ برآمد خواهد داشت. یعنی فضای نمونه‌ای این آزمایش، حاصل‌ضرب دکارتی

۱ــ حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه‌ی A وB عبارت است از مجموعه‌ی همه‌ی زوج‌های مرتب‌های (x,y) که x در A و y در B است یعنی.

$$A \times B = \{(x,y): x \in A, y \in B\}$$

فضای نمونه‌ای تاس سبز در فضای نمونه‌ای تاس قرمز است. در جدول (۸) همه‌ی برآمدهای این آزمایش تصادفی را فهرست کرده‌ایم :

جدول (۸)

تاس قرمز \ تاس سبز	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱ ، ۱)	(۱ ، ۲)	(۱ ، ۳)	(۱ ، ۴)	(۱ ، ۵)	(۱ ، ۶)
۲	(۲ ، ۱)	(۲ ، ۲)	(۲ ، ۳)	(۲ ، ۴)	(۲ ، ۵)	(۲ ، ۶)
۳	(۳ ، ۱)	(۳ ، ۲)	(۳ ، ۳)	(۳ ، ۴)	(۳ ، ۵)	(۳ ، ۶)
۴	(۴ ، ۱)	(۴ ، ۲)	(۴ ، ۳)	(۴ ، ۴)	(۴ ، ۵)	(۴ ، ۶)
۵	(۵ ، ۱)	(۵ ، ۲)	(۵ ، ۳)	(۵ ، ۴)	(۵ ، ۵)	(۵ ، ۶)
۶	(۶ ، ۱)	(۶ ، ۲)	(۶ ، ۳)	(۶ ، ۴)	(۶ ، ۵)	(۶ ، ۶)

فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب دو تاس را می‌توان به‌صورت

S = {(x, y)| x = ۱,۲,۳,۴,۵,۶ و y = ۱,۲,۳,۴,۵,۶}

نمایش داد. به دلیل همگنی تاس‌ها ، برآمدهای این آزمایش هم شانس هستند. بنابراین، احتمال نظری هر برآمد $\frac{۱}{۳۶}$ است. با این اطلاعات می‌توانیم احتمال‌های پیشامدهای مختلف را حساب کنیم. مثلاً احتمال این‌که اعداد ظاهر شده روی دو تاس یکسان باشند، یعنی احتمال پیشامد

E = {(۱,۱), (۲,۲), (۳,۳), (۴,۴), (۵,۵), (۶,۶)}

برابر با $\frac{۱}{۶} = \frac{۶}{۳۶}$ است.

تمرین ۵: انتخاب عدد از میان ارقام ۰ تا ۹ (عددهای تصادفی) را در فعالیت ۶ به یاد بیاورید.

این بار فرض کنید به‌جای یک عدد، دو عدد به تصادف از میان ارقام ۰ تا ۹ انتخاب شده باشد. فضای نمونه‌ای این آزمایش و تعداد عناصر آن را معین کنید.

۵ ــ ۴ــ پیشامدهای مکمل

فعالیت ۵ ــ ۷

۱ ــ فرض کنید دسته کلید شما، ۸ کلید دارد که یکی از آن‌ها مخصوص درِ اصلی منزل و یکی دیگر متعلق به درِ اتاق است. شب به منزل می‌رسید و برای باز کردن در، یکی از کلیدها را به تصادف انتخاب می‌کنید.

الف) احتمال اینکه بتوانید با کلید انتخابی در منزل را بازکنید چقدر است؟

ب) احتمال اینکه نتوانید با آن درِ منزل را باز کنید چه‌قدر است؟

۲ــ اگر با لمس کردن کلیدها، متوجه شوید که یکی از آن‌ها خیلی کوچکتر از کلید درِ اصلی و اتاق است، از این‌رو آن را کنار می‌گذارید و با یکی از کلیدهای باقیمانده درِ منزل را باز می‌کنید و وارد می‌شوید. سپس برای باز کردن درِ اتاق، یکی از آن‌ها را به تصادف برمی‌گزینید.

الف) احتمال اینکه این کلید درِ اتاق را باز کند چقدر است؟

ب) احتمال اینکه این کلید درِ اتاق را باز نکند چقدر است؟

۳ــ از مقایسه‌ی پاسخ قسمت‌های الف و ب سؤال‌های ۱ و ۲ چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آورید؟

گاهی، در هنگام بررسی پیشامدها و احتمال‌های آن‌ها، احتمال رخ ندادن پیشامد نیز مورد نظر است. اگر E یک پیشامد باشد، پیشامد رخ ندادن E را با E' نشان می‌دهیم و آن را **مکمل** E می‌نامیم. E' مکمل E نسبت به فضای نمونه‌ای S است، یعنی

$$E' = S - E$$

شاید با انجام فعالیت ۵ ــ۷، به رابطه‌ای که بین احتمال‌های یک پیشامد و مکمل آن وجود دارد پی برده باشید. حال با بررسی نتایج آزمایش‌هایی که در فعالیت‌های گذشته انجام داده‌اید، بار دیگر این رابطه را بررسی کنید.

جدول (۹)

آزمایش	E	P(E)	E'	$P(E')$
پرتاب سکه	رو بیاید	۱/۲	رو نیاید	۱/۲
صفحه عقربه	روی آبی بایستد	۳/۸	روی آبی نایستد	۵/۸
پرتاب تاس	چهار بیاید	۱/۶	چهار نیاید	۵/۶
پرتاب تاس	بزرگتر از ۴	۲/۶	کوچکتر یا مساوی ۴	۴/۶

در هر یک از پیشامدهای زیر، E، را ملاحظه نمایید و احتمال E را با احتمال مکمل آن یعنی E'، مقایسه کنید. می‌بینید که

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱ \text{ ، } \frac{۵}{۸}+\frac{۳}{۸}=۱ \text{ ، } \frac{۵}{۶}+\frac{۱}{۶}=۱ \text{ و } \frac{۴}{۶}+\frac{۲}{۶}=۱$$

یعنی مجموع این دو احتمال همواره برابر ۱ است. بنابراین، برای پیشامد E و مکمل آن E' همیشه

$$P(E)+P(E')=۱$$

مثال ۲ : فرض کنید که گزارش‌های یک ایستگاه هواشناسی نشان می‌دهد که در ۱۲۰ روز، ۸۹ بار پیش‌بینی‌های وضع هوا درست بوده است. احتمال این‌که پیش‌بینی بعدی این ایستگاه درست نباشد، چقدر است؟

حل: اگر پیشامد این‌که پیش‌بینی درست باشد را با C و پیشامد این‌که پیش‌بینی درست نباشد را با C' نشان دهیم،

آنگاه مطابق داده‌های به‌دست آمده، $P(C)=\frac{۸۹}{۱۲۰}$. چون $P(C)+P(C')=۱$ ، پس $\frac{۸۹}{۱۲۰}+P(C')=۱$ ، و در نتیجه

$$P(C')=۱-\frac{۸۹}{۱۲۰}=\frac{۱۲۰-۸۹}{۱۲۰}=\frac{۳۱}{۱۲۰}$$

در هر دو مورد، دو کسر وجود دارد که مخرج آن‌ها برابر است و جمع صورت‌های آن‌ها برابر مخرج می‌شود :

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱ \quad \text{و} \quad ۱+۱=۲$$

$$\frac{۳}{۸}+\frac{۵}{۸}=۱ \quad \text{و} \quad ۳+۵=۸$$

$$\frac{۸۹}{۱۲۰}+\frac{۳۱}{۱۲۰}=۱ \quad \text{و} \quad ۸۹+۳۱=۱۲۰$$

تمرین ۶: در آزمایش صفحه عقربه، احتمال ایستادن عقربه روی ناحیه‌ی زرد رنگ $\frac{۲}{۸}$ است. احتمال این‌که عقربه روی ناحیه‌ی زرد رنگ نایستد چقدر است؟

یکی از کاربردهای جالب احتمال پیشامد مکمل، حل **مسأله‌ی روز تولد** است. هر کس در یکی از ۳۶۵ روز سال (سال‌های کبیسه را که ۳۶۶ روز دارند در نظر نمی‌گیریم) به دنیا می‌آید. می‌خواهیم احتمال این که از میان ۵ نفر لااقل دو نفر در یک روز سال متولد شده باشند را بیابیم. بنابراین، E پیشامدی است که در جستجوی احتمال آن هستیم

لااقل دو نفر از ۵ نفر در یک روز سال به دنیا بیایند : E

به‌جای محاسبه‌ی P(E)، P(E& را محاسبه می‌کنیم و آنگاه با کم کردن آن از ۱، P(E) را به‌دست می‌آوریم :

روزهای تولد هر پنج نفر با هم متفاوت باشد E&

چون هر کدام از این ۵ نفر می‌توانند در هر یک از ۳۶۵ روز سال به دنیا آمده باشند، فضای نمونه‌ای مربوط به تولّد هر نفر، ۳۶۵ عضو دارد. در نتیجه طبق اصل اساسی شمارش (اصل‌ضرب)، فضای نمونه‌ای مربوط به ۵ نفر، $۳۶۵ \times ۳۶۵ \times ۳۶۵ \times ۳۶۵ \times ۳۶۵$ و یا به طور خلاصه $۳۶۵^{۵}$ عضو دارد. برای پیدا کردن تعداد عناصرE& ، می‌دانیم که نفر اول در هر یک از ۳۶۵ روز سال می‌تواند متولد شده باشد. چون باید روز تولد نفر دوم با نفر اول متفاوت باشد، نفر دوم در ۳۶۴ روز باقیمانده به دنیا می‌آید. چون روز تولد نفر سوم باید متفاوت با روزهای تولد دو نفر قبلی باشد، نفر سوم در ۳۶۳ روز باقیمانده به دنیا خواهد آمد. به همین ترتیب نفر چهارم در ۳۶۲ روز دیگر و نفر آخر در ۳۶۱ روز بعدی. طبق اصل اساسی شمارش

$$\text{E\&تعداد اعضای} = ۳۶۵ \times ۳۶۴ \times ۳۶۳ \times ۳۶۲ \times ۳۶۱$$

و

$$P(E\&) = \frac{۳۶۵ \times ۳۶۴ \times ۳۶۳ \times ۳۶۲ \times ۳۶۱}{(۳۶۵)^{۵}}$$

در نتیجه

$$P(E) = ۱ - P(E\&) = ۱ - \frac{۳۶۵ \times ۳۶۴ \times ۳۶۳ \times ۳۶۲ \times ۳۶۱}{(۳۶۵)^{۵}}$$

تمرین ۷: علی از دوستان خود درباره‌ی ورزش مورد علاقه‌ی آنان نظرخواهی کرد و درصد تعداد دوستانش را که به ورزش معینی علاقه‌مند بودند در جدولی به‌صورت صفحه‌ی‌بعد یادداشت کرد :

اگر علی با یکی دیگر از دوستانش برخورد کند و همین سؤال را از او بپرسد، احتمال این‌که ورزش مورد علاقه‌ی او

جدول (۱۰)

ورزش	درصد
فوتبال	۳۶
بسکتبال	۲۱
تنیس	۱۲
شنا	۵
کشتی	۵
تیراندازی	۴
ژیمناستیک	۴
دو	۱۳

۱ ــ بسکتبال باشد چه‌قدر است؟

۲ ــ فوتبال **نباشد** چه‌قدر است؟

۳ ــ تنیس باشد چه‌قدر است؟

۴ ــ تنیس **نباشد** چه‌قدر است؟

۵ ــ ۵ ــ پیشامدهای مرکب

گاهی یک پیشامد از دو یا چند پیشامد ساده تشکیل می‌شود. برای مثال، هر برآمد در آزمایش پرتاب دو سکه را به عنوان یک پیشامد درنظر گرفتیم، درصورتی که از برآمدهای دو سکه‌ی مختلف تشکیل یافته بود. این‌گونه پیشامدها، **پیشامدهای مرکب** نامیده می‌شوند.

*پیشامدی که از برآمدهای دو یا چند آزمایش مختلف تشکیل شده باشد، **پیشامد مرکب** نامیده می‌شود.*

فعالیت ۵ ــ ۸

۱ــ دو سکه‌ی متفاوت (مثلاً یک سکه‌ی ۱۰۰ ریالی و یک سکه‌ی ۵۰ ریالی) انتخاب کنید.

۲ــ دو سکه را ۵۰ بار پرتاب کنید. نتایج این پرتاب‌ها را با علامت خط‌نشان در جدولی همانند

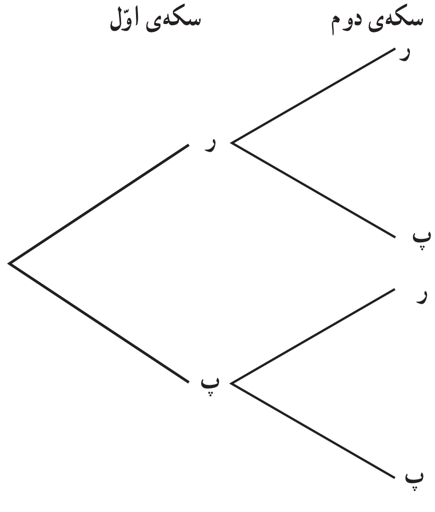
جدول زیر علامت بزنید.

جدول (۱۱)

کل	دوپشت	یک رو و یک پشت	دورو
۵۰			

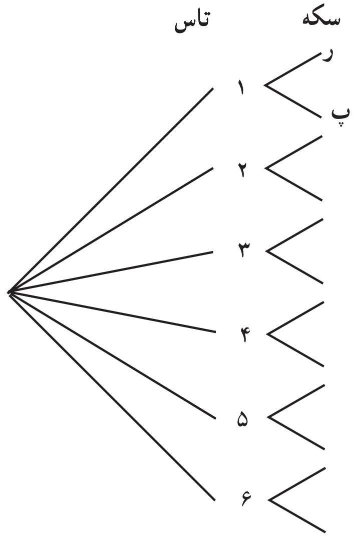
الف) در چه کسری از پرتاب‌ها «دو رو»، «دو پشت»، «یک رو و یک پشت» ظاهر می‌شود؟
ب) آیا انتظار چنین نتایجی را داشتید؟ اگر آری چرا و اگر نه چرا؟
پ) آیا سه پیشامد «دو رو آمدن»، «دو پشت آمدن» و «یک رو و یک پشت آمدن» هم‌شانس هستند؟
ت) احتمال ظاهر شدن یک رو و یک پشت را در پرتاب دو سکه چه‌قدر تخمین می‌زنید؟

برآمدهای پرتاب دو سکه را می‌توان از روش دیگری موسوم به **نمودار درختی** نیز به‌دست آورد : سکه‌ی اوّل یا «رو» می‌آید یا «پشت». حال اگر سکه‌ی اوّل «رو» آمده باشد در مقابل آن، سکه‌ی دوم می‌تواند «رو» یا «پشت» بیاید که نشان می‌دهد روی هم چهار برآمد برای این آزمایش ممکن است. نمایش مطلب فوق به شکل نمودار درختی و به‌صورت زیر است :



فعالیت ۵ــ۹

۱ــ ابتدا یک تاس و به دنبال آن، یک سکه پرتاب کنید. برآمدهای ممکن چیست؟ نمودار درختی زیر را که نشان دهنده‌ی برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی است کامل کنید :



الف) تاس به چند حالت می‌نشیند؟

ب) سکه به چند حالت می‌نشیند؟

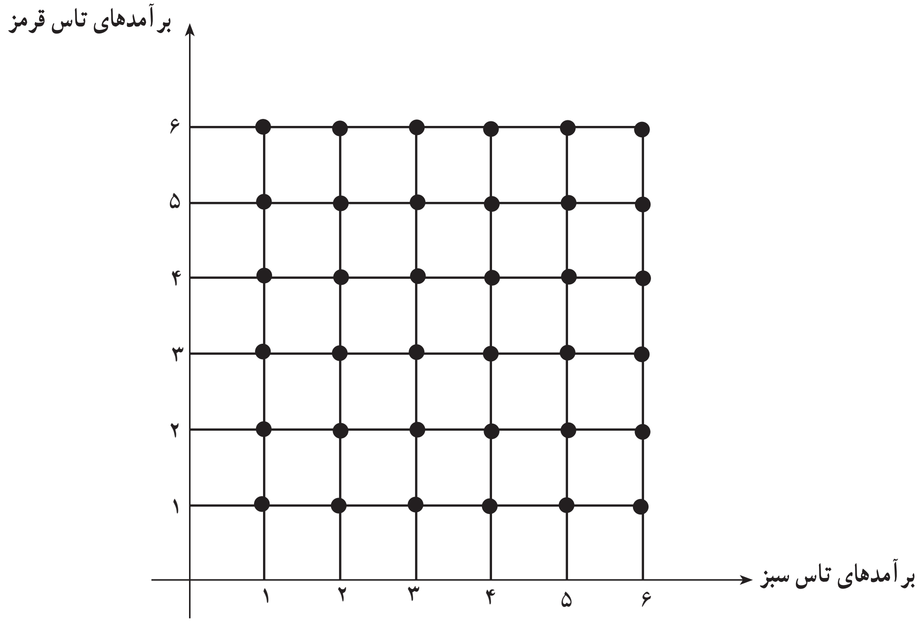
پ) این آزمایش (پرتاب تاس وبه دنبال آن پرتاب سکه) چند برآمد ممکن دارد؟

ت) آیا رابطه‌ای بین پاسخ سؤال‌های الف، ب و پ وجود دارد؟

ث) آیا برآمدها هم شانس هستند؟

ج) احتمال این‌که در پرتاب تاس، عدد ۴ و در پرتاب سکه «رو» ظاهر شود چقدر است؟

در آزمایش پرتاب دو تاس سبز و قرمز، فضای نمونه‌ای دارای ۳۶ عضو بود، که همگی هم‌شانس بودند و برآمدهای ممکن را در یک جدول گردآوری کردیم. نمایش برآمدهای ممکن این آزمایش به‌صورت آرایه‌ای ۳۶ نقطه‌ای در صفحه نیز ممکن است. برآمدهای تاس سبز را روی محور افقی و برآمدهای تاس قرمز را روی محور قائم نمایش می‌دهیم. نقاط تلاقی خطوط عمودی و افقی در نقاط برآمدهای این تاس‌ها، برآمدهای ممکن این آزمایش را نشان می‌دهند.



فعالیت ۵ــ ۱۰

به آرایه‌ی ۳۶ نقطه‌ای که برای نشان دادن برآمدهای پرتاب دو تاس سبز و قرمز به‌کار بردیم نگاه کنید.

۱ــ حول نقاط (۱,۱) ، (۲,۲) ، (۳,۳) ، (۴,۴) ، (۵,۵) ، (۶,۶) یک نوار رسم کنید. احتمال اینکه اعداد ظاهر شده روی دو تاس با هم برابر باشند را به دست آورید ؛

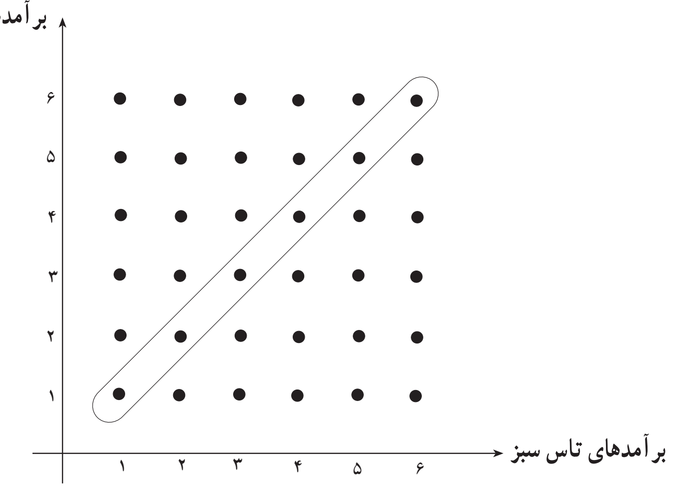
۲ــ حول نقاطی که نشان‌دهنده‌ی پیشامد «مجموع اعداد ظاهر شده = ۸» هستند، یک نوار رسم کنید. توجه کنید که مثلاً نقاط (۶,۲) و (۲,۶) برآمدهای مجزا هستند. احتمال این‌که مجموع اعداد ظاهر شده روی دو تاس :

الف) ۸ باشد چه‌قدر است؟

ب) ۸ نباشد چه‌قدر است؟

پ) ۸ باشد و نیز این دو عدد با هم برابر باشند چه‌قدر است؟

۳ــ اگر اعداد ظاهر شده روی دو تاس برابر باشند. احتمال این‌که مجموع آن‌ها ۸ باشد چه‌قدر است؟



در آزمایش‌های تصادفی، فوق، توانستیم به کمک نمودار درختی، برآمدهای آزمایش و تعداد آن‌ها را معین کنیم. برای تعیین تعداد برآمدهای ممکن یعنی تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای، کافی بود تعداد شاخه‌های انتهایی درخت را بشماریم. نتایج این آزمایش‌ها که در جدول (۸) گردآوری شده است، نشان می‌دهد که تعداد شاخه‌های انتهایی درخت را می‌توان با یک عمل ضرب به‌دست آورد.

می‌توان به جای رسم کامل نمودار درختی مربوط به یک آزمایش مرکب و فهرست کردن تمام برآمدهای ممکن ؛ با ضرب کردن، تعداد برآمدها را به‌دست آورد. که این عمل همان **اصل اساسی شمارش** (اصل ضرب) است. مثلاً اگر از شهر (الف) به شهر (ب) دو راه و از شهر (ب) به شهر (پ) سه راه موجود باشد، برای رفتن از شهر (الف) به شهر (پ) ۶ راه وجود خواهد داشت.

*اگر عملی به m طریق ممکن و عمل دیگری به n طریق ممکن انجام گیرد، طبق **اصل اساسی شمارش** (اصل ضرب) دو عمل با هم به $m \times n$ طریق ممکن انجام خواهد گرفت.*

تمرین ۸: صفحه‌ی عقربه‌ی A را به شش قطاع برابر با شماره‌های ۵،۴،۳،۲،۱ و ۶ تقسیم می‌کنیم. صفحه عقربه‌ی B را نیز به ۸ قطاع برابر با شماره‌های ۷،۶،۵،۴،۳،۲،۱ و ۸ تقسیم می‌کنیم. ابتدا عقربه‌ی مربوط به A و به دنبال آن عقربه‌ی مربوط به B را می‌چرخانیم.

الف) تعداد برآمدهای ممکن چندتا است؟

ب) آیا برآمدها همگی هم شانس هستند؟

پ) احتمال اینکه عقربه‌ی A روی ناحیه‌ی ۳ و عقربه‌ی B روی ناحیه‌ی ۸ بایستد چه‌قدر است؟

منابع

۱ـ Adams, R.A. (1983). **Single variable calculus**. New York : Addison-Wesley Publishers Limited.

۲ـ Billstein, R.; Libeskind, S., Lott , J. (1984). **A problem solving approach to mathematics for elementary school teachers**. (3rd Ed.) Benjamin - Cummings Publishing Co.

۳ـ Devlin, K. (1994). **Mathematics the science of patterns**. Scientific American Library. Distributed by W. H. Freeman and Company.

۴ـ Hughes - Hallett, D.; Gleason, A. M. & et al. (1992). **Calculus: Produced by the consortium based at Harvard and Funded by a National Science Foundation Grant**. John Wiley & Sons, Inc.

۵ ـ Hostetler, L. I. (1993). **Precalculus**. D. C. Heath and Company.

۶ـ Jacobs, H. R. (1982). Mathematics: A human endeavor. (2nd Ed.) W. H. Freeman.

۷ـ National Council of Teachers of Mathematics. (1989). **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. NCTM, Reston, Virginia.

۸ ـ National Council of Teachers of Mathematics. (1993). **Patterns and functions: Addenda Series, Grades 5-8**. (4th printing). NCTM,Reston, Virginia.

۹ـ National Council of Teachers of Mathematics. (1991). **Connecting Mathematics : Addenda Series , Grades 9-12.** NCTM, Reston, Virginia.

۱۰ـ National Research Council. (1990). **On the shoulders of Giants: New approach to numeracy.** by A. L. Steen (Ed.). National Academy Press, Washington, D.C.

۱۱ـ Polya, G. (1962). **Mathematical discovery (vol. I).** John Wiley & Sons, INC.

۱۲ـ Polya, G. (1965). Mathematical discovery (vol. I). John Wiley & Sons, INC.

۱۳ـ Quantitative Literacy Series (1987). **Exploring Probability**. Dale Seymour Publications.

۱۴ـ Sawyer, W. W. (1961). **Mathematician’s delight**. (12th Ed.) Penguin Books.

۱۵ـ بختیاری، جواد. **جوهره و ساختار هندسی خط نستعلیق.**

۱۶ـ زنگنه، بیژن و همکاران. (۱۳۷۳). **جبر و احتمال: نظام جدید آموزش متوسطه.** دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تهران.

۱۷ـ شهریاری، پرویز (مترجم) **خلاقیّت ریاضی**، نوشته‌ی جرج پولیا، انتشارات فاطمی، (۱۳۷۲).

۱۸ـ واروسفل، آندره، اعداد و اسرار آن. ترجمه‌ی عباس کرکان، ۱۳۴۵، سازمان کتاب‌های جیبی.