

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

ریاضی پایه

دوره پیش دانشگاهی

رشته علوم انسانی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

برنامه ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : دفتر تألیف کتاب های درسی ابتدایی و متوسطه نظری

نام کتاب : ریاضی پایه - ۲/۲۹۲

شورای برنامه ریزی : یحیی تابش، محمدحسن بیژن زاده، امیر نادری،

حمیده داریوش همدانی و جواد حاجی بابایی

مؤلفان : زهرا گویا، مریم گویا، بیژن ظهوری زنگنه، جواد حاجی بابایی و روح الله جهانی پور

آماده سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

تهران : خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن : ۹ - ۸۸۸۳۱۱۶۱ ، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶ ، کد پستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹

وبسایت : www.chap.sch.ir

صفحه آرا : طرفه سهانی

طراح جلد : علیرضا رضائی کُر

ناشر : شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران : تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروبخن)

تلفن : ۵ - ۴۴۹۸۵۱۶۱ ، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰ ، صندوق پستی : ۱۳۹ - ۳۷۵۱۵

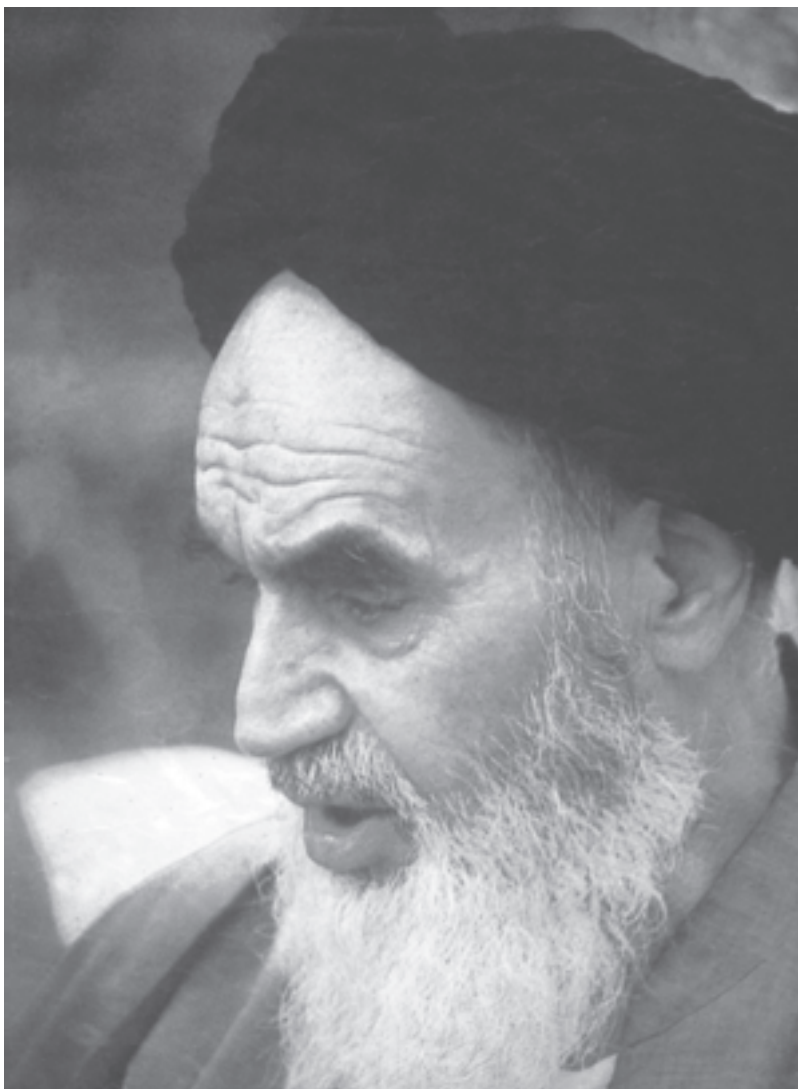
چاپخانه : شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ : چاپ بیستم و یکم ۱۳۹۴

حق چاپ محفوظ است.

شابک ۹۶۴-۰۵-۰۱۰۲-۶ ISBN 964-05-0102-6

۱۳۹۴



اگر بخواهید عزیز و سربلند باشید باید از سرمایه‌های عمر و استعداد جوانی استفاده کنید و با اراده و عزم راسخ خود به طرف علم و عمل و کسب دانش و بینش حرکت نمایید که زندگی زیر چتر علم و آگاهی آن قدر شیرین و انس با کتاب و قلم و اندوخته‌ها آن قدر خاطره‌آفرین و پایدار است که همه تلخی‌ها و ناکامی‌های دیگر را از یاد می‌برد.

امام خمینی

فهرست مطالب

۷۰	۳-۳. لگاریتم و نماد علمی
۷۳	۳-۴. محاسبه با لگاریتم
۷۵	۳-۵. اثبات روابط لگاریتمی
	۳-۶. کاربردهای لگاریتم: مقیاس
۷۹	سنجش زلزله و صدا
۸۶	فصل ۴: مدل سازی ریاضی
۸۶	۴-۱. مسائل رشد
۸۹	۴-۱-۱. نمودار رشد نمایی
۹۸	۴-۲. مسائل زوال
	۴-۲-۱. چگونگی تعیین قدمت
۱۰۰	سنگواره (زوال کربن)
۱۰۵	۴-۳. بهینه سازی
۱۰۶	۴-۴. بازاریابی
	۴-۴-۱. ماکزیمم کردن درآمد
	۴-۴-۲. ماکزیمم کردن سود
۱۱۴	فصل ۵: احتمال مقدماتی
۱۱۶	۵-۱. آزمایش های تصادفی
۱۲۳	۵-۲. احتمال نظری
	۵-۳. ارتباط بین فضای نمونه ای و
۱۲۷	احتمال نظری
۱۳۰	۵-۴. پیشامدهای مکمل
۱۳۳	۵-۵. پیشامدهای مرکب
۱۳۸	منابع

پیشگفتار

۱	فصل ۱: استدلال ریاضی
۱	۱-۱. درک شهودی
۲	۱-۲. استدلال تمثیلی
۴	۱-۳. استدلال استقرایی
	۱-۴. محدودیت های استدلال
۸	استقرایی
۹	۱-۵. استقرای ریاضی
۱۱	۱-۶. استدلال استنتاجی
۱۵	۱-۷. مثال نقض
۱۸	فصل ۲: دنباله های اعداد
۱۸	۲-۱. دنباله ها
	۲-۲. تاریخچه ی یک کشف کوچک
۲۰	یا یک نبوغ بزرگ
۲۵	۲-۳. دنباله ی حسابی
۳۱	۲-۴. دنباله ی هندسی
۴۶	۲-۵. دنباله ی مربعی
۴۸	۲-۶. دنباله ی مثلثی
۴۹	۲-۷. دنباله ی فیبوناچی
۵۳	۲-۸. نسبت طلایی
۵۹	فصل ۳: لگاریتم
۵۹	۳-۱. پیدایش
۶۴	۳-۲. لگاریتم اعشاری

پیشگفتار

به نام خداوند لوح و قلم حقیقت نگار وجود و عدم در آستانه‌ی ورود به قرن بیست و یکم، هدف اصلی آموزش ریاضی ایجاد توانایی استدلال، حل مسأله، ارتباطات و هم‌چنین، تلفیق مقوله‌های مختلف ریاضی و ارتباط آن‌ها با سایر مقولات است. ریاضی اقیانوس بیکران و به هم پیوسته‌ای است که نه فقط ریاضیدان‌ها، بلکه هر کس و هر شاخه‌ی تحصیلی به گونه‌ای تشنه‌ی آن است و نیاز به جرعه‌ای دارد.

آب دریا را اگر نتوان کشید هم به قدر تشنگی باید چشید در دنیای پیشرفته و پیچیده‌ی کنونی که همراه با تحولات تکنولوژی، تمامی کشورها به نوعی به هم پیوند خورده‌اند این تشنگی به خصوص بیشتر محسوس است. امروزه نقش ریاضیات در آموزش انسان‌ها امری پذیرفته شده است و آشنایی با این علم، برای جوانان مستعد، متفکر و توانای ما یک ضرورت است. برای رسیدن به اهداف فوق، بایستی که فراگیرندگان با ریاضیات به‌عنوان یک تلاش انسانی که علاوه بر کاربردهایش، موجب تقویت قوه‌ی استدلال، ایجاد نظم فکری و دمیدن روح زیبایی‌شناسی در آن‌ها می‌شود، آشنا شوند. چنین نگرشی به ریاضی باعث بالا بردن توانایی حل مسأله در دانش‌آموزان و برخورد بهتر آن‌ها با مشکلات در زندگی واقعی می‌شود.

دانش‌آموزان رشته‌ی علوم انسانی دارای توانایی لازم برای یادگیری ریاضی هستند؛ با این حال نوع ریاضی ارائه شده به آنان باید با در نظر گرفتن روحیه حساس، هنرمند، خلاق و متناسب با نیازهای تحصیلی آن‌ها باشد. رشته‌های علوم انسانی به ریاضیاتی که در عین سادگی و روانی، دارای استحکام و دقت و ظرافت است نیازمندند. انتظار می‌رود دانش‌آموزان عزیز با نگرشی که نسبت به ریاضی پیدا می‌کنند، بتوانند طرز تلقی جامعه را نیز تغییر دهند و خود را باور کنند و بدانند که در دنیای امروز، همه‌ی علوم، زنجیروار به هم مرتبطند و هم‌چنان که ریاضیات از علوم انسانی و ادبیات بهره می‌گیرد، علوم انسانی و ادبی نیز برای اعتلای خود، ناگزیر از روی آوردن به ریاضیات هستند، چنان که در رشته‌های روانشناسی، جامعه‌شناسی، فلسفه، اقتصاد و مدیریت، حقوق، هنر و پزشکی، همه جا حضور ریاضی دیده می‌شود.

در این کتاب، بیشترین تکیه بر ذوق‌آفرینی و ارائه‌ی کاربردهای واقعی ریاضی بوده است.

هر تمثیلی که به کار گرفته شده یا از هر مطلب ملموسی که استفاده گردیده، در جهت تحکیم مبانی ریاضی بوده است. هدف آن بوده است که مطالب کتاب باعث ایجاد خلاقیت در دانش‌آموزان گردد و این باور نادرست که ریاضی چون دژی نفوذناپذیر است را لرزان کند؛ به قول کیت دولین^۱، «اگر در کتاب به فرمول‌ها و قوانینی برخوردید که یادآور کلاس‌های بعضاً خشک و بی‌روح ریاضی در تجربه‌ی تحصیلی شما است، آن را به حساب ریاضی نگذارید! چنان‌که یک صفحه از کتاب هاملت ممکن است خاطره‌ی ناخوشایند حفظ کردن‌های کسل‌کننده در کلاس‌های ادبیات انگلیسی را برای شما تداعی کند. اما آن کلاس‌ها، به هیچ‌وجه از زیبایی و جاودانگی آثار کلاسیک شکسپیر نمی‌کاهد!»

در تهیه مطالب کتاب، با توجه به اصول برنامه‌ریزی و روان‌شناسی یادگیری ریاضی، برای درک بهتر مباحث، فعالیت‌هایی در هر بخش مطرح شده که با دنبال کردن آن‌ها به چگونگی ایجاد یک فرمول یا یک قانونمندی ریاضی پی می‌بریم و مراحل تکوین آن‌ها را درمی‌یابیم. این یکی از جنبه‌های زیبا و جذاب ریاضی است که هر قضیه یا قانون و فرمول تحت ضابطه و نظمی منطقی به وجود می‌آید. در تمام کتاب کوشش شده است که دانش‌آموزان با نحوه‌ی استدلال آشنا شوند تا در آینده با اعتماد به نفس بیشتری به اتخاذ تصمیم‌های اصولی در زندگی واقعی بپردازند و بتوانند با توجه به امکانات محدود، بهترین راه را با صرف کمترین هزینه و بیشترین بهره‌وری انتخاب کنند. هنگامی که در جریان تلاش‌هایی که به یک نتیجه منجر می‌شود قرار می‌گیریم، عمق آن را دریافته و چون همراه با سیر تحول مطالب پیش می‌رویم، کمتر در یادگیری دچار مشکل خواهیم شد و این ناشی از همان بینش آموزشی است که در تدوین کتاب مورد نظر بوده است؛ در حالی که اگر تنها به نتیجه‌گیری‌های کلی بسنده می‌کردیم، کتاب کم‌حجم‌تر می‌شد اما یادگیری را هم مشکل‌تر می‌ساخت!

اگرچه خواهان آن هستیم که با انجام فعالیت‌های هر درس^۲، دانش‌آموزان، در کلاس به‌نحوی درگیر فرآیند حل مسئله شوند و کتاب جنبه‌ی خودآموز پیدا کند، اما به اعتقاد ما کتاب هرگز نباید و نمی‌تواند جانشین معلم گردد، زیرا وجود معلمان علاقه‌مند و آگاه در کلاس درس یکی از مهم‌ترین عوامل مؤثر در یادگیری است. کتاب حاضر از هم‌فکری و همراهی گروه تألیف

۱- ریاضی: دانش‌الگوها، ۱۹۹۴

۲- از معلمان گرامی استدعا می‌شود که برای انجام فعالیت‌ها و بهتر فهمیدن مطالب کتاب، دانش‌آموزان را با طرز کار ماشین حساب آشنا کنند و استفاده از ماشین حساب را به آن‌ها توصیه نمایند.

متشکل از روان‌شناس و برنامه‌ریز ریاضی، متخصص ریاضی، معلم ریاضی و کارشناس تألیف سود جسته است و انتظار می‌رود تجارب و توانایی‌های حرفه‌ای این عده، در تدوین مطالب مفید واقع شده باشد. لازم به یادآوری است که بسیاری از ایده‌های آموزشی این کتاب، در کلاس‌های درس به محک تجربه گذاشته شده و نتایج مفیدی دربر داشته است.

از شما معلمان گرامی، دانش‌آموزان عزیز و همه‌ی دل‌سوختگان امر آموزش صمیمانه استدعا داریم بدون پیش‌داوری کتاب را نقد کنید و ما را از پیشنهادهای مفید و سازنده‌ی خود مطلع سازید تا در ویرایش‌ها و چاپ‌های بعدی کار کم‌عیب‌تر شود؛ پیشاپیش از همه‌ی شما عزیزان که با حوصله و دقت برای بهبود کیفی کتاب، آن را مطالعه می‌کنید و نارسایی‌ها را مطرح می‌نمایید سپاسگزاری می‌کنیم.

مؤلفان

فصل ۱

استدلال ریاضی

«اختلاف کردن در چگونگی و شکل پیل»

عرضه را آورده بودندش هنوز
اندر آن ظلمت همی شد هر کسی
اندر آن تاریکیش کف می بسود
گفت هم چون ناودان است این نهاد
آن برو چون باد بیزن شد پدید
گفت شکل پیل دیدم چون عمود
گفت خود این پیل چون تختی به دست
فهم آن می کرد هر جا می شنید
آن یکی دالش لقب داد این الف
اختلاف از گفتشان بیرون شدی
نیست کف را بر همه‌ی او دسترس

پیل اندر خانه‌ی تاریک بود
از برای دیدنش مردم بسی
دیدنش با چشم، چون ممکن نبود
آن یکی را کف به خرطوم افتاد
آن یکی را دست بر گوشش رسید
آن یکی را کف چو بر پایش بسود
آن یکی بر پشت او بنهاد دست
هم چنین هر یک به جزوی که رسید
از نظرکه، گفتشان شد مختلف
در کف هر کس اگر شمعی بُدی
چشم حس هم چون کف دستت و بس

۱-۱- درک شهودی

از زمانی که انسان زندگی غارنشینی را آغاز کرد و غار را مأوا و مأمنی برای خود دانست تا امروز که خبری در یک لحظه به سراسر دنیا مخابره می شود، او همواره برای درک آنچه که در پیرامونش می گذشته از شهودش کمک می گرفته است. انسان به طور فطری خود را تا حدودی با محیط هماهنگ می کرده و سعی داشته است تا با مشکلات مبارزه کند و بر آنها چیره شود. برای مثال، قبل از آن که انسان بتواند از ساعت شنی یا ساعت خورشیدی برای تنظیم وقت خود استفاده

کند، از حواسش برای نگه داشتن حساب روز و ماه بهره می‌گرفت. از بلندی یا کوتاهی سایه‌ی اشیاء پی به موقعیت زمان می‌برد و یا برای تشخیص جهت در بیابان‌ها و دریاها از شهود خود کمک می‌گرفت. هر جا که با چشم دل می‌دید و با گوش جان می‌شنید، یا خوب می‌چشید و درست لمس می‌کرد، رازهای ناگفته و نادیده بر او فاش می‌شد و این همه، راه را برای فهم و استنباط و استدلال باز می‌کرد تا او بتواند با درک حقایق، پی به راز آفرینش ببرد و اسرار طبیعت را کشف کند.

برگ درختان سبز در نظر هوشیار هر ورقش دفترست معرفت کردگار
و این همان شهود است که می‌تواند راهگشای انسان در کشف پدیده‌ها و حل مسائل بفرنج شود.
با دقت در شعر «اختلاف کردن در چگونگی و شکل پیل» می‌فهمیم چون مردم در تاریکی قرار داشتند، قادر به تشخیص فیل نبودند، اما با لمس کردن توانستند درکی هرچند مختصر از فیل داشته باشند که گرچه کافی نبود تا حدودی راهگشا بود. با این حال، برای به دست آوردن آگاهی کامل، مولوی هشدار می‌دهد که به ابزار قوی‌تری یعنی شمع در کف دست نیازمندیم و این شمع روشن‌گر همان استدلالی است که باید خالی از ابهام باشد. در این فصل، به معرفی چند نوع استدلال ریاضی می‌پردازیم.

۱-۲- استدلال تمثیلی^۱

در اکثر کارهای روزمره از نتیجه‌گیری‌های سطحی تا موفقیت‌های عمده‌ی علمی یا کارهای هنری از تمثیل استفاده می‌کنیم. تمثیل که در واقع همان یافتن نوعی مشابهت بین مفاهیم گوناگون است، در تمام سطوح مختلف قابل استفاده است. در ادبیات ما نمونه‌های زیبایی از تمثیل وجود دارد که با ظرافت خاصی محدودیت‌های آن مطرح می‌گردد که از آن جمله داستان بقال و طوطی در مثنوی معنوی است:

بود بقالی و وی را طوطی	خوش نوایی سبز گویا طوطی
در دکان بودی نگهبان دکان	نکته گفستی با همه سوداگران
در خطاب آدمی ناطق بدی	در نوای طوطیان حاذق بدی
جست از سوی دکان سویی گریخت	شیشه‌های روغن گل را بریخت
از سوی خانه بیامد خواجه‌اش	بردکان بنشست فارغ خواجه‌وش
دید پر روغن دکان و جامه چرب	بر سرش زد گشت طوطی کل ^۲ ز ضرب

۱- Analogy

۲- کل = کج

روزکی چندی سخن کوتاه کرد
 ریش برمی کند و می گفت ای دریغ
 دست من بشکسته بودی آن زمان
 هدیه ها می داد هر درویش را
 بعد سه روز و سه شب حیران و زار
 می نمود آن مرغ را هرگون شگفت
 جولقی سر برهنه می گذشت
 طوطی اندر گفت آمد در زمان
 از چه ای کل با کلان آمیختی
 از قیاسش^۱ خنده آمد خلق را
 کار پاکانرا قیاس از خود مگیر
 جمله عالم زین سبب گمراه شد

مرد بقال از ندامت آه کرد
 کآفتاب نعمتم شد زیر میغ
 چون زدم من بر سر آن خوش زبان
 تا بیابد نطق مرغ خویش را
 بر دکان بنشسته بُد نومیدوار
 تا که باشد کاندر آید او بگفت
 با سر بی مو چو پشت طاس و طشت
 بانگ بر درویش زد که هی فلان
 تو مگر از شیشه روغن ریختی
 کو چو خود پنداشت صاحب دل را
 گرچه ماند در نبشتن شیر و شیر
 کم کسی زابدال حق آگاه شد

تمرین: با توجه به داستان، توضیح دهید که طوطی چه تمثیلی به کاربرد و علت خنده‌ی مردم چه بود؟

انواع تمثیل با آن که محدودیت‌هایی دارند می‌توانند در ایجاد یک زمینه‌ی شهودی برای درک بسیاری از مفاهیم و اثبات‌های ریاضی کمک مؤثری باشند و نباید اهمیت آن‌ها را نادیده گرفت. مثلاً از تمثیل می‌توان برای درک بهتر این حقیقت که حاصل ضرب عدد منفی در عدد منفی، عددی مثبت است استفاده کرد. به نمونه‌ی زیر توجه کنید:

وارد شدن آب به مخزن را عملی مثبت (+) و خروج آب از آن را عملی منفی (-) در نظر می‌گیریم. در نمایش فیلم نیز، جلو بردن فیلم را عملی مثبت (+) و عقب بردن آن را عملی منفی (-) به حساب می‌آوریم. حال اگر فیلمی نمایش داده شود که در آن، آب در حال خروج از یک مخزن است (-) و فیلم را به عقب برگردانیم (-)، آب دوباره به مخزن باز می‌گردد (+)؛ یعنی حاصل دو عمل منفی (خروج آب و عقب بردن فیلم) عمل مثبت بازگشت آب به مخزن شده است.

۱- در این جا، «قیاس» به همان معنای تمثیل (analogy) به کار برده شده است و با لغت «قیاس» که به معنای syllogism در منطق ارسطویی به کار می‌رود متفاوت است. برای اطلاعات بیشتر به صفحات ۶۶ و ۶۷ کتاب منطق سال چهارم فرهنگ و ادب مراجعه شود.

۱-۳- استدلال استقرایی

فرض کنید یک محقق فرهنگ و تمدن ایران، به قصد جمع‌آوری اطلاعاتی در مورد معماری سنتی قریه‌ها به آن‌جا سفر می‌کند، در اولین قریه (روستا) مشاهده می‌کند که سقف همه‌ی خانه‌ها گنبدی و دیوارها قطور هستند. در قریه‌ی بعدی نیز مشاهده می‌کند که سقف خانه‌ها گنبدی و دیوارها قطور هستند. به نظر شما مشاهده‌ی دو قریه برای نتیجه‌گیری کلی در مورد وضعیت معماری روستاهای ایران کافی است؟ شاید توصیه شما به محقق این باشد که به مشاهدات خود تا حصول نتیجه ادامه دهد؛ شاید بتواند در مورد همه‌ی روستاهای ایران یک ادعای کلی بکند. عملاً محدودیت امکانات و زمان اجازه نمی‌دهند جستجوها در همه‌ی موارد انجام شوند، در مسائل ریاضی هم وضع به همین منوال است زیرا معمولاً فرایند جستجو متناهی نیست. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱: می‌خواهیم اعداد فرد متوالی را با هم جمع کنیم، برای این کار به جمع‌آوری اطلاعات می‌پردازیم.

$$۱=۱$$

$$۱+۳=۴$$

$$۱+۳+۵=۹$$

$$۱+۳+۵+۷=۱۶$$

مشاهدات بالا نشان می‌دهد که حاصل جمع اعداد فرد متوالی می‌توانند زوج یا فرد باشند. اما چهار مورد بالا همگی مربع کامل می‌باشند. پس اولین حدس این است که حاصل جمع اعداد فرد متوالی مربع کامل است. آیا با مشاهده‌ی موارد فوق می‌توانیم نسبت به صحت حدس خود مطمئن باشیم؟ مسلماً نه! بنابراین برای حصول اطمینان از حدس اولیه، جستجو را ادامه می‌دهیم.

$$۱+۳+۵+۷+۹=۲۵$$

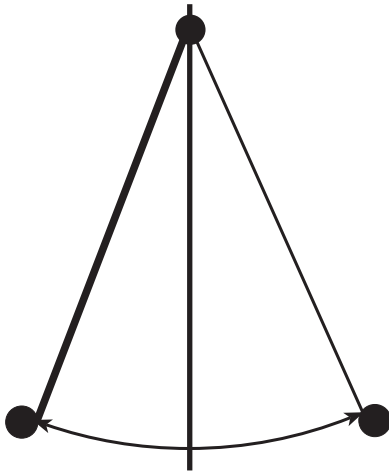
$$۱+۳+۵+۷+۹+۱۱=۳۶$$

این دو نمونه نیز حدس را تأیید کرد، ولی آیا مجموع هر تعداد از اعداد فرد متوالی که از ۱ شروع شود، مربع کامل می‌شود؟

فعالیت ۱-۱

گالیلو دانشمند بزرگ ایتالیایی، با مشاهده‌ی رفتار نوسانی وزنه‌های آویزان، موفق به کشف‌هایی شد که در نهایت او را قادر به اختراع ساعت آونگ‌دار کرد. یکی از کشف‌هایی که گالیلو را در

اختراع ساعت آونگ‌دار یاری داد، دیدن رابطه‌ی بین طول آونگ و زمان نوسان بود. جدول زیر، زمان نوسان چند آونگ با طول‌های متفاوت را نشان می‌دهد:



جدول (۱)

طول پاندول	زمان نوسان
۱ واحد	۱ ثانیه
۴ واحد	۲ ثانیه
۹ واحد	۳ ثانیه
۱۶ واحد	۴ ثانیه

۱- با توجه به الگویی که در جدول فوق می‌بینید، به نظر شما چه نوع رابطه‌ای بین طول آونگ و زمان نوسان وجود دارد؟

۲- حدس شما برای طول آونگی با زمان نوسان ۷ ثانیه چیست؟

۳- حدس شما برای طول آونگی با زمان نوسان 10° ثانیه چیست؟

فعالیت ۱-۲

تا سال ۱۷۷۲ میلادی، تنها شش سیاره شناخته شده بود و فاصله‌های واقعی آن‌ها از خورشید به دست آمده بود. ستاره‌شناس آلمانی یوهان الرت باود^۲، با مشاهده‌ی فاصله‌ی آن سیارات از خورشید، متوجه نظم و الگویی در آن‌ها شد. این الگو به یوهان باود این توانایی را داد که فاصله‌ی سیارات (هنوز ناشناخته) از خورشید را پیش‌بینی کند. جالب است بدانید که با کشف سیاره‌های دیگری، حدسیه^۳ یا فرضیه‌ای که او ساخت به آزمایش گذاشته شد و درستی آن تأیید گشت!

جدول (۲)، فاصله‌ی نسبتاً واقعی سیاره‌ها از خورشید و فاصله‌ی پیش‌بینی شده با الگوی یوهان باود را نشان می‌دهد:

۱- فاصله‌ی زمین تا خورشید 10° واحد فرض شده است و باقی فاصله‌ها بر مبنای آن محاسبه شده است.

۲- Johan Elert Bode

۳- Conjectures

جدول (۲)

سیاره	فاصله‌ی واقعی	الگوی یوهان باود
تیر (عطارد)	۴	$۰+۴=۴$
زهره (ناهید)	۷	$۳+۴=۷$
زمین (ارض)	۱۰	$۶+۴=۱۰$
بهرام (مریخ)	۱۵	$۱۲+۴=۱۶$
؟	<input type="text"/>	<input type="text"/> + <input type="text"/> = <input type="text"/>
مشتري (برجیس)	۵۲	<input type="text"/> + ۴ = ۵۲
کیوان (زحل)	۹۶	$۹۶+۴=۱۰۰$
؟	<input type="text"/>	<input type="text"/> + <input type="text"/> = <input type="text"/>

با کمی دقت، متوجه نزدیکی فاصله‌های واقعی سیارات از خورشید با فاصله‌هایی که توسط الگوی یوهان باود پیش‌بینی شده بود می‌شویم.

۱- به نظر شما، آیا می‌توان رابطه‌ی بین فاصله‌ی بهرام و مشتری را به وسیله‌ی یک معادله نشان داد؟

۲- به نظر شما، چگونه می‌توان فاصله‌ی سیاره‌های بعد از کیوان از خورشید را پیدا کرد؟ الگوی باود چه کمکی در پیدا کردن معادله‌ای برای یافتن فاصله‌ها می‌کند؟

در سال ۱۷۸۱، سیاره‌ی بعد از کیوان یعنی اورانوس، به وسیله‌ی ویلیام هرشل^۱ کشف شد. فاصله‌ی ۱۹۲ واحدی اورانوس تا خورشید، به‌طور قابل‌توجهی با فاصله‌ی پیش‌بینی شده به وسیله‌ی معادله‌ی فوق‌نزدیک بود. به همین دلیل، ستاره‌شناسان به این نتیجه رسیدند که رابطه‌ی بین معادله‌ی باود برای بهرام و مشتری معنای خاصی دارد.

۳- به نظر شما این معنای خاص چیست؟

همان‌طور که حدس زدید و به تجربه دریافتید، معادله‌ی باود برای پیدا کردن فاصله‌های تقریبی سیارات از خورشید به‌صورت

$$d = 4 + (3 \times 2^{n-2})n \geq 2$$

بود.

^۱ - William Herschel

در سال ۱۸۰۱، سیاره‌ی کوچکی کشف شد که فاصله‌ی آن تا خورشید ۲۸ واحد بود!
 ۴- آیا می‌توانیم معنای خاصّ معادله‌ی باود را به عنوان یک نتیجه‌گیری کلی بپذیریم؟
 گاليله و باود، با جمع‌آوری اطلاعات و مشاهده‌ی آن‌ها، متوجهّ نظم و الگویی در مشاهدات خود شدند. آن‌ها با دیدن این نظم، حدسیه‌هایی ساختند که ایشان را قادر به پیش‌بینی نتایج مشاهدات بعدی می‌کرد. گاليله و باود، با انجام مشاهدات دیگری، پیش‌بینی خود را آزمایش کردند و همان نتایجی را که حدس می‌زدند به‌دست آوردند. این فرایند، گاليله و باود را مطمئن کرد که حدسیه‌ی آن‌ها درست بوده است. آن‌ها روابطی را که به‌دست آورده بودند، به عنوان یک نتیجه‌گیری کلی اعلام کردند. به روشی که گاليله و باود و به طور کلی عالمان علوم تجربی را به نتیجه‌گیری کلی می‌رساند استدلال استقرایی^۱ می‌گویند.

استدلال استقرایی، روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات است.

فعالیت ۱-۳

الف:

۱- یک عدد سه رقمی انتخاب کنید؛

۲- آن عدد را در ۷ ضرب کنید؛

۳- حاصل ضرب به‌دست آمده را در ۱۱ ضرب کنید؛

۴- حاصل ضرب به‌دست آمده در قسمت (۳) را در ۱۳ ضرب کنید.

ب:

مراحل ۱ تا ۴ را برای یک عدد سه رقمی دیگر انجام دهید.

پ:

۱- چه رابطه‌ای بین حاصل ضرب‌های به‌دست آمده در قسمت ۴ و عدد انتخابی خود در ۱

می‌بینید؟

مراحل ۲، ۳ و ۴ را برای چندین عدد سه رقمی دیگر که انتخاب کرده‌اید تکرار کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا می‌توانید ادعا کنید که نتیجه‌ی شما برای تمام اعداد سه رقمی درست است؟

ت:

۱- حاصل ضرب $7 \times 11 \times 13$ را به دست آورید؛

۲- بدون استفاده از ماشین حساب، اعداد سه رقمی انتخابی خود را در حاصل ضرب به دست آمده ضرب کنید. مراحل کار خود را نشان دهید؛

۳- چه نتیجه‌ای گرفتید؟ آیا می‌توانید ادعا کنید که اگر هر عدد سه رقمی را در ۷ و ۱۱ و ۱۳ ضرب کنید، به نتیجه‌ی مشابه می‌رسید؟

۴-۱- محدودیت‌های استدلال استقرایی



آب آن قدر می‌جوشد تا آن که چیزی از آن باقی نماند ... برف آن قدر می‌جوشد تا آن که چیزی از آن باقی نماند ... یخ آن قدر می‌جوشد تا آن که چیزی از آن باقی نماند ... هر چیزی آن قدر می‌جوشد تا آن که چیزی از آن باقی نماند!

در این جا، بعد از آن که مرد غارنشین کشف کرد که آب و برف و یخ آن قدر می‌جوشند تا آن که چیزی از آن‌ها باقی نماند، این مشاهدات را تعمیم داد و ادعا کرد که «هر چیزی آنقدر می‌جوشد تا آن که چیزی از آن باقی نماند!» این نتیجه‌گیری کلی که براساس مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات است، ضعف اساسی استدلال استقرایی را نشان می‌دهد، زیرا همیشه این احتمال وجود دارد که با کشف شواهد بیشتر، درستی نتیجه‌ی به دست آمده نقض شود.

فعالیت ۱-۴

محاسبات زیر را به صورت ستونی و بدون استفاده از ماشین حساب انجام دهید:

الف:

۱- حاصل ضرب 112×124 را به دست آورید؛

۲- حاصل ضرب 211×421 را به دست آورید؛

۳- چه رابطه‌ای بین قسمت‌های ۱ و ۲ و جواب‌های به دست آمده وجود دارد؟

ب:

۱- حاصل ضرب 312×221 را به دست آورید؛

۲- بدون هیچ محاسبه‌ای، حاصل ضرب 213×122 را حدس بزنید؛

۳- حال حاصل ضرب 213×122 را محاسبه کنید. آیا حدس شما درست بود؟

پ:

۱- حالا حاصل ضرب 113×223 را محاسبه کنید؛

۲- بدون هیچ محاسبه‌ای، حاصل ضرب 311×322 را حدس بزنید؛

۳- حالا حاصل ضرب 311×322 را محاسبه کنید. آیا حدستان درست بود؟

با انجام این فعالیت متوجه می‌شویم که استدلال استقرایی عمومیت ندارد و با محدودیت‌هایی مواجه است. در واقع، در استدلال استقرایی، اطمینان قطعی به درستی نتایج نداریم زیرا نتیجه‌گیری‌های ما بر مبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات است.

۱-۵- استقرای ریاضی

آیا مجموع اولین n عدد فرد متوالی، n^2 است؟

در مثال ۱، با فرایند استقرایی و جمع‌آوری مشاهدات، جواب سؤال فوق را به‌طور تجربی نشان دادیم. اما چون تعداد اعداد فرد، نامتناهی است نتوانستیم همه‌ی موارد را تحقیق کنیم. بنابراین، برای اثبات ادعای خود از یک ابزار دقیق و قوی ریاضی یعنی اصل استقرای ریاضی کمک می‌گیریم.

اصل استقرای ریاضی: فرض کنید حکمی درباره‌ی عدد طبیعی n داشته باشیم. اگر این حکم برای $n=1$ درست باشد و برای هر $k \geq 1$ ، با فرض درستی حکم برای $n=k$ بتوان درستی حکم برای $n=k+1$ را نتیجه گرفت آن‌گاه حکم برای هر عدد طبیعی n درست است.

می‌خواهیم نشان دهیم که مجموع اولین n عدد فرد متوالی، n^2 است. همانند گذشته به جمع‌آوری مشاهدات می‌پردازیم:

$$1 = 1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$$

اگر با دقت به تساوی‌های بالا بنگریم می‌بینیم که:

مجموع n عدد فرد متوالی اولیه = مربع تعداد آن‌ها = n^2

یا

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2 \quad (1)$$

اثبات: طبق اصل استقرای ریاضی، ابتدا باید درستی حکم فوق را در مورد $n = 1$ بیازماییم.

اگر رابطه‌ی (۱) را برای $n = 1$ در نظر بگیریم داریم

$$1 = 1^2$$

پس برای $n = 1$ حکم درست است.

در گام بعدی، فرض می‌کنیم حکم به ازای $n = k$ درست باشد یعنی

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2k - 1 = k^2$$

حالا باید ثابت کنیم حکم برای $n = k + 1$ نیز درست است یعنی

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2k - 1 + 2(k + 1) - 1 = (k + 1)^2 \quad (2)$$

برای اثبات تساوی اخیر (حکم استقرا) به طرفین رابطه‌ی (۱) (فرض استقرا)، جمله‌ی $(k + 1)$ ام

یعنی $2(k + 1) - 1$ را اضافه می‌کنیم

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2k - 1 + 2(k + 1) - 1 = k^2 + 2(k + 1) - 1$$

$$= k^2 + 2k + 2 - 1$$

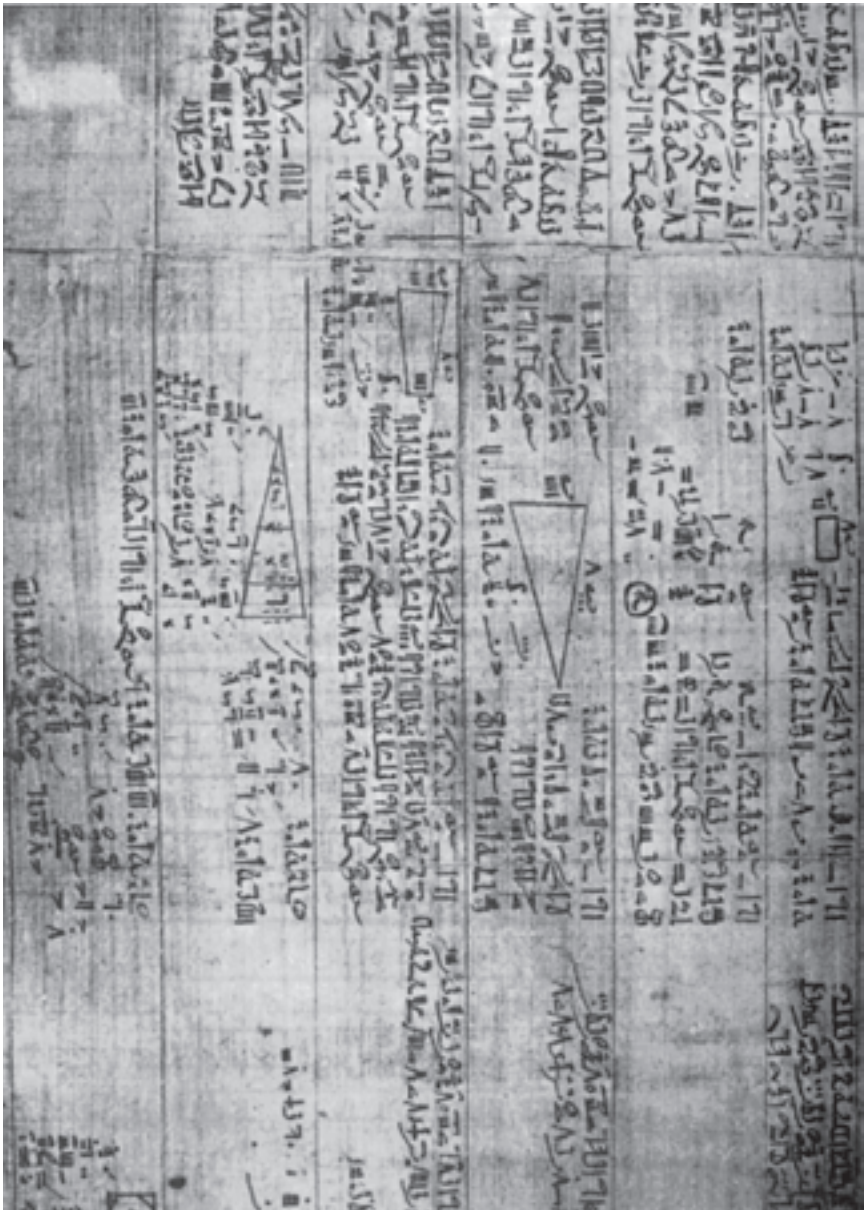
$$= k^2 + 2k + 1$$

$$= (k + 1)^2 ,$$

بنابراین حکم استقراء یعنی (۲) را اثبات کردیم. در نتیجه برای هر عدد طبیعی n داریم.

$$1 + 3 + \dots + 2n - 1 = n^2 .$$

۱-۶- استدلال استنتاجی



در مقدمه‌ی پایپروس رایند - ۱۶۵۰ سال قبل از میلاد - که شاید قدیمی‌ترین تاریخ موجود ریاضی باشد، چنین آمده است: «به جرات می‌توان گفت که بارزترین مشخصه‌ی شعور انسان که نشان‌دهنده‌ی درجه‌ی تمدن هر ملت است، همان قدرت استدلال کردن است و به‌طور کلی این قدرت به بهترین وجهی می‌تواند در مهارت‌های ریاضی افراد آن ملت به نمایش گذاشته شود.»

دو مسأله‌ی بازی با اعداد در تاریخ ریاضی مصر (پاپيروس راینند) موجود است که طبق دستورالعمل‌های این دو مسأله، عددی انتخاب می‌شود و سپس چندین کار دیگر روی آن انجام می‌گیرد و در پایان بدون در نظر گرفتن عدد انتخابی، نتیجه همیشه یکسان است! با یکی از این دو مسأله آشنا می‌شویم.

فعالیت ۱-۵

مثال‌های زیر یکی از انواع سرگرمی با اعداد است.

مثال ۲: هر مرحله از این بازی در سمت راست و نتایج هر مرحله برای ۴ عدد که به‌طور

تصادفی انتخاب شده‌اند، در سمت چپ جدول زیر نشان داده شده است.

جدول (۳)

۴۶	۱۷	۸	۵	یک عدد انتخاب کنید
۱۳۸	۵۱	۲۴	۱۵	آن را در ۳ ضرب کنید
۱۴۴	۵۷	۳۰	۲۱	به آن ۶ اضافه کنید
۴۸	۱۹	۱۰	۷	آن را بر ۳ تقسیم کنید
۲	۲	۲	۲	عددی را که از ابتدا انتخاب کرده بودید از این نتیجه‌ی تقسیم کم کنید

بررسی بالا ما را مطمئن می‌سازد که نتیجه همیشه برابر با ۲ است.

اگر چه با استدلال استقرایی می‌توان دریافت که این نتیجه شاید برای همه‌ی اعداد درست

باشد، اما برای اثبات کلی این مطلب، یعنی تبدیل شاید به باید، به استدلال استنتاجی نیازمندیم.

مثال ۳: همان مثال قبلی را با اندکی تغییر بررسی می‌کنیم و به جای انتخاب یک یا چند

عدد، در موقع شروع از علامت‌گذاری استفاده می‌کنیم. در طی بازی، مربع کوچک معرف عدد انتخابی

اولیه است و برای هربار افزودن یا کاستن اعداد جدید، از یک دایره‌ی کوچک استفاده می‌کنیم.

جدول (۴)

<input type="checkbox"/>	عدد انتخابی
<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	عدد انتخابی ضرب در ۳
<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> ○○○○	نتیجه‌ی قبلی به اضافه‌ی ۶
<input type="checkbox"/> ○○	حاصل تقسیم بر ۳
○○	کم کردن عدد اولیه

در مثال ۱ دیدیم که نتیجه همیشه عدد ۲ است. حال به وضوح می‌بینیم که عدد انتخابی اولیه هر چه که باشد باز هم نتیجه عدد ۲ است.

شاید مربع‌ها و دایره‌ها نمادهای جالبی برای استفاده‌ی همیشگی نباشند. در ریاضیات معمولاً از حروف برای نشان دادن اعداد دلخواه استفاده می‌کنیم.

مثال ۴: حال مثال قبلی را با نماد جبری، یعنی با استفاده از یک حرف به جای عدد انتخابی اولیه، دوباره بررسی می‌کنیم:

جدول (۵)

n	عدد انتخابی
۳n	عدد انتخابی ضرب در ۳
۳n+۶	نتیجه‌ی قبلی به اضافه‌ی ۶
n+۲	حاصل تقسیم بر ۳
۲	کم کردن عدد اولیه

نکته‌ای که در هر سه مثال به چشم می‌خورد این است که نتایجی را بر مبنای عباراتی که درستی آن‌ها را قبول کرده‌ایم به دست آوردیم یعنی از استدلال استنتاجی استفاده کردیم.

استدلال استنتاجی روش نتیجه‌گیری کلی با استفاده از حقایقی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

فعالیت ۱-۶

در فعالیت ۱-۳، دیدیم که اگر اعداد سه رقمی مختلفی را انتخاب کنیم و آن‌ها را در ۷، ۱۱ و ۱۳ ضرب کنیم، حاصل یک عدد شش رقمی خواهد بود که تکرار عدد سه رقمی انتخابی اولیه است. حال از زاویه‌ای دیگر به آن فعالیت نگاه می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم که \overline{abcabc} نشان‌دهنده‌ی هر عدد شش رقمی‌ای است که از تکرار عدد سه رقمی \overline{abc} به دست آمده است. می‌خواهیم ثابت کنیم که \overline{abcabc} بر ۷، ۱۱ و ۱۳ بخش پذیر است.

عدد \overline{abcabc} را به صورت تجزیه شده می‌نویسیم

$$\overline{abcabc} = 100,000a + 10,000b + 1,000c + 100a + 10b + c$$

با دقت در صورت تجزیه شده‌ی \overline{abcabc} و فاکتورگیری از عوامل مشترک، عدد 1001 را ردیابی می‌کنیم. این همان عددی است که در فعالیت ۱-۳، از ضرب $7 \times 11 \times 13$ به دست آوردیم

$$\overline{abcabc} = 100,000a + 10,000b + 1,000c + 100a + 10b + c$$

$$= 100a(1000+1) + 10b(1000+1) + c(1000+1)$$

$$= 100a(1001) + 10b(1001) + c(1001)$$

مجدداً از عامل مشترک 1001 فاکتور می‌گیریم

$$1001(100a + 10b + c) \quad (1)$$

داخل پرانتز، صورت تجزیه شده‌ی عدد سه رقمی \overline{abc} است

$$1001 \overline{abc} \quad (2)$$

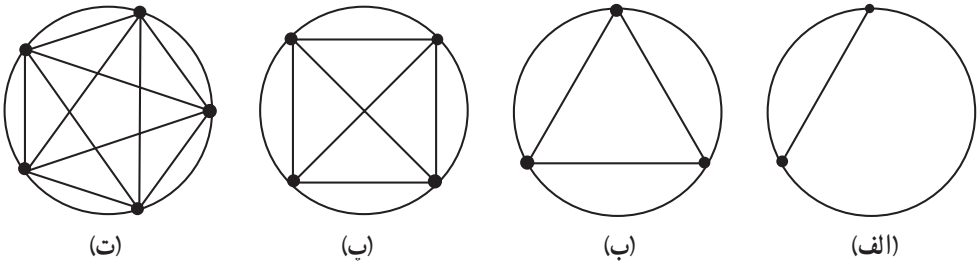
از (۲) نتیجه می‌گیریم که \overline{abcabc} بر ۷ و ۱۱ و ۱۳ بخش پذیر است این نتیجه‌گیری قابل تعمیم است زیرا ما بدون هیچ محدودیتی، \overline{abcabc} را به عنوان نماینده‌ی هر عدد شش رقمی که از تکرار یک عدد سه رقمی تشکیل شده است، انتخاب کردیم و باز هم توانستیم نشان دهیم که این عدد بر ۷، ۱۱ و ۱۳ بخش پذیر است زیرا دارای ضریب 1001 است.

فرق اساسی فعالیت ۱-۳ و این فعالیت در آن است که در مورد قبلی، براساس مجموعه‌ی محدودی از شواهد، به یک نتیجه‌گیری کلی رسیدیم اما در این فعالیت، حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم مبنایی برای بررسی‌ها و نتیجه‌گیری‌های کلی ما شد.

۱-۷- مثال نقض

استدلال استنتاجی به ما اطمینان می‌دهد که نتیجه‌ی به‌دست آمده حتماً درست است. این جامعیت، یکی از نشانه‌های اقتدار و زیبایی این نوع استدلال است. گاهی اتفاق می‌افتد که با مثالی، عمومیت نتیجه‌ای که حدس می‌زنیم، نقض می‌شود.

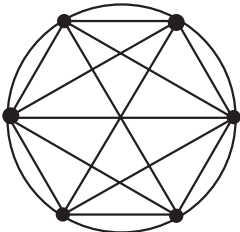
مثال ۵: اگر دو نقطه‌ی اختیاری بر روی پیرامون دایره را به وسیله‌ی یک پاره خط به هم وصل کنیم، دایره به دو ناحیه تقسیم می‌شود. با اتصال سه نقطه‌ی اختیاری بر روی دایره، دایره به ۴ ناحیه تقسیم می‌شود. شکل زیر این موضوع را برای ۲، ۳، ۴ و ۵ نقطه‌ی اختیاری بر روی دایره نشان می‌دهد:



آیا اگر تعداد نقاط ۶ باشد، تعداد ناحیه‌ها ۳۲ می‌شود؟ ۶ نقطه بر روی دایره اختیار می‌کنیم و آن‌ها را به وسیله‌ی پاره‌خط‌هایی به هم وصل می‌کنیم. با توجه به شکل می‌بینیم که تعداد ناحیه‌ها به صورت ۲، ۴، ۸، ۱۶، ... افزایش می‌یابد.

جدول (۶)

تعداد نقطه‌ها	۲	۳	۴	۵
تعداد ناحیه‌ها	۲	۴	۸	۱۶



(ث)

با استدلال استقرایی به نظر می‌رسد پاره‌خط‌هایی که ۶ نقطه را به هم متصل می‌سازند، دایره را به ۳۲ ناحیه تقسیم می‌کنند.

اما با شمردن ناحیه‌ها، می‌بینیم که تعداد آن‌ها ۳۰ است، که نادرست بودن نتیجه‌ی فوق را نشان

می‌دهد. اگر حتی یک نمونه پیدا شود که حدس ما را رد کند، گوئیم که با مثال نقض، نادرستی حدس ثابت شده است.

به مثالی که کلیت حکمی را نقض کند، مثال نقض می‌گویند.

مثال ۶: برای هر دو عدد گنگ x و y می‌خواهیم ببینیم آیا $x+y$ نیز گنگ است یا خیر؟
حل: کافی است نشان دهیم که x و y ای پیدا می‌شوند که گنگ هستند اما مجموع آن‌ها، یعنی $x+y$ گنگ نیست. برای این کار اگر دو عدد گنگ $x=2+\sqrt{2}$ و $y=2-\sqrt{2}$ را انتخاب کنیم، می‌بینیم که $x+y=(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=2+2=4$ که یک عدد گویا است. پس این مثال، کلیت این حکم را که مجموع دو عدد گنگ همیشه یک عدد گنگ است نقض می‌کند.

مسائل^۱

- با استفاده از استدلال استنتاجی، نتایج زیر را کامل کنید.
(الف) اگر باران بیارد، زمین مرطوب می‌شود. الآن باران می‌بارد.
نتیجه: زمین است.
(ب) خطوط موازی هیچگاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند. خطوط L_1 و L_2 موازی هستند.
نتیجه: L_1 و L_2 .
- آیا نتایج زیر از عبارات داده شده حاصل می‌شوند؟ جواب خود را توضیح دهید.
(الف) تمام دانش‌آموزانی که ریاضی یاد می‌گیرند می‌توانند استدلال کنند.
حمید دانش‌آموزی است که ریاضی یاد می‌گیرد.
نتیجه: حمید می‌تواند استدلال کند.
(ب) بعضی از دانش‌آموزان با طرز کار کامپیوتر آشنا هستند.
نرگس دانش‌آموز است.
نتیجه: نرگس با طرز کار کامپیوتر آشنا است.
(پ) مثلث متساوی‌الساقین دارای حداقل دو ضلع مساوی است.
مثلث متساوی‌الاضلاع دارای سه ضلع مساوی است.
نتیجه: هر مثلث متساوی‌الاضلاع، یک مثلث متساوی‌الساقین است.

۱- تمرین‌های ۱ تا ۵ از کتاب جبر و احتمال سال سوم ریاضی نظام جدید گرفته شده است.

۳- نشان دهید که مجموع دو عدد زوج همیشه زوج است.

۴- علی، احمد، کامران، داوود و ابراهیم عضو تیم بسکتبال مدرسه‌ی خود هستند. با توجه به اطلاعات زیر، آن‌ها را برحسب افزایش قد مرتب کنید :

- الف) حداقل دو نفر از آن‌ها از علی کوتاه‌تر هستند ؛
ب) داوود از کامران کوتاه‌تر است ؛
پ) احمد کوتاه‌ترین پسر نیست ؛
ت) داوود از علی بلندتر است .

۵- کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است. در صورت نادرست بودن یک مثال نقض پیدا کنید.

- الف) اگر ۱ با هر عدد فردی جمع شود، نتیجه همیشه یک عدد زوج است ؛
ب) توان دوم یک عدد همیشه از آن بزرگ‌تر است ؛
پ) مجموع دو زاویه‌ی حادّه کمتر از 180° است ؛
ت) همیشه ارتفاع یک مثلث داخل آن قرار می‌گیرد ؛
ث) هر مستطیلی یک مربع است ؛
ج) هر مربعی یک مستطیل است .
۶- نمونه‌های زیر را در نظر بگیرید :

$$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2,$$

$$14 = 1^2 + 2^2 + 3^2,$$

$$24 = 2^2 + 2^2 + 4^2,$$

$$59 = 1^2 + 3^2 + 7^2,$$

$$61 = 3^2 + 4^2 + 6^2,$$

$$89 = 2^2 + 2^2 + 9^2,$$

نتیجه‌ی احتمالی آن است که : «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع سه مربع کامل نوشت». با ارائه‌ی یک مثال نقض نشان دهید که نتیجه‌گیری فوق نادرست است.

۷- کدام یک از احکام زیر درست است؟

الف) اگر x گنگ و y گویا باشد، آن‌گاه $x + y$ گویا است.

ب) اگر x و y هر دو گویا باشند، آن‌گاه $x + y$ گویا است.

احکام درست را اثبات کنید و برای رد احکام نادرست مثال‌های نقض بیاورید.

دنباله‌های اعداد



«ریاضی ملکه‌ی علوم است» کارل فریدریک گوس^۱

۲-۱ دنباله‌ها

اولین فعالیتی که کودک را با ماهیت اعداد آشنا می‌کند، شمارش است. مجموعه‌ی اعداد طبیعی N که از ۱ آغاز می‌شود و یکی یکی افزوده می‌گردد، مثالی از یک دنباله‌ی عددی است و هریک از این اعداد یک جمله از دنباله‌ی اعداد طبیعی نامیده می‌شوند. به بیانی دیگر، برای ساختن دنباله‌ای از اعداد طبیعی، به هر جمله یکی اضافه می‌کنیم تا جمله‌ی بعدی به دست آید. چنین دنباله‌هایی می‌توانند از هر عدد طبیعی شروع شوند و تا بی‌نهایت ادامه یابند.

دنباله‌ی عددی آرایشی از اعداد است که هر عدد یا جمله‌ی آن با یک قانون یکسان به دنبال جمله‌ی قبلی می‌آید.^۲

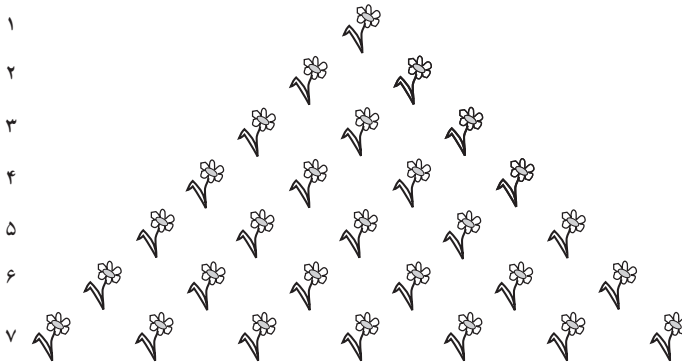
۱- Karl Friedrich Gauss

۲- این تعریف دسته‌ی خاصی از دنباله‌های اعداد را در بر می‌گیرد.

در مثال‌های زیر، به بررسی راه‌های مختلف پیدا کردن مجموع اعداد طبیعی می‌پردازیم:

فعالیت ۱-۲

چند گل برای ساختن شکل زیر لازم است؟



شکل ۱

یکی از راه‌های پاسخ به سؤال فوق، یافتن تعداد گل‌های موجود در هر ردیف است که در سمت

چپ نوشته شده است، یعنی: $1+2+3+4+5+6+7$

راه دیگر از تصویر زیر حدس زده می‌شود:



شکل ۲

در شکل ۲؛ تعداد ردیف‌ها ۷ و تعداد گل‌ها در هر ردیف ۸ است.

تمرین ۱: ویژگی شکل ۲ را مشخص کنید و سپس راه میان‌بری برای تعیین تعداد گل‌ها

در شکل ۲ پیدا کنید.

تمرین ۲: با توجه به شکل ۲، راه میان‌بری برای تعیین تعداد گل‌ها در شکل ۱ پیدا کنید. چه رابطه‌ای بین مجموع گل‌های شکل ۲ و مجموع گل‌های شکل ۱ وجود دارد؟

با دقت در تمرین‌های ۱ و ۲، متوجه شدیم که مجموع تعداد گل‌ها در ردیف‌های اول و آخر مساوی است با تعداد گل‌ها در ردیف‌های دوم و ماقبل آخر و به همین ترتیب تا آخر، یعنی در شکل ۲، تعداد گل‌ها در هر ردیف برابر است با

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{+7}{8} & \frac{+6}{8} & \frac{+5}{8} & \frac{+4}{8} & \frac{+3}{8} & \frac{+2}{8} & \frac{+1}{8} \end{array}$$

اگر به شکل ۲ دقیق‌تر نگاه کنید، متوازی‌الاضلاعی را می‌بینید که قاعده‌ی آن ۸، یعنی مجموع ردیف‌های اول و آخر و ارتفاع آن ۷، یعنی تعداد ردیف‌ها است. حال جواب تمرین ۱ را با مساحت متوازی‌الاضلاع مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تمرین ۳: دوباره به شکل ۱ نگاه کنید! این شکل دوزنقه‌ای است که طول قاعده‌ی بالایی آن ۱ (هر گل یک واحد) و طول قاعده‌ی پایینی آن ۷ است. مجدداً جواب تمرین ۲ را با مساحت دوزنقه مقایسه کنید و نتیجه را یادداشت کنید.

۲-۲- تاریخچه‌ی یک کشف کوچک^۱ یا یک نبوغ بزرگ!

داستانی درباره‌ی گوس که از بزرگترین نوایغ و ریاضیدان‌های معروف دنیا (۱۸۵۵-۱۷۷۷) است نقل می‌کنند^۲ که بسیار جالب است. ماجرا از این قرار بوده است که وقتی گوس در دبستان درس می‌خواند روزی معلم از آن‌ها خواست که اعداد ۱ تا ۱۰۰ را پشت سر هم بنویسند و جمع کنند. قبل از این که هم‌کلاسی‌های گوس عددنویسی را به پایان ببرند، او مجموع اعداد از ۱ تا ۱۰۰ را به دست آورد و به معلمش نشان داد! معلم برآشفته و فکر کرد که گوس قصد اذیت کردن او را دارد. با این حال، بر اثر پافشاری گوس، معلم او به جمع اعداد متوالی از ۱ تا ۱۰۰ پرداخت و پس از صرف مدت زمانی طولانی به نتیجه‌ای رسید که گوس کودک در چند دقیقه رسیده بود. حدس‌های متعددی درباره‌ی راه حل گوس زده می‌شود. واقعاً گوس مسأله را چگونه حل کرده بود؟

۱- خلاقیت ریاضی اثر جورج پولیا.

۲- برگردان‌های مختلفی از داستان گوس در منابع تاریخ ریاضی وجود دارد.

نمودار زیر^۱ چند شیوه‌ی مختلف به‌دست آوردن مجموع اعداد متوالی از ۱ تا ۱۰۰ را نشان

می‌دهد:

A	B	C	D
۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۲
۳	۳	۳	۳
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	۵۰	۵۰
⋮	⋮	۶۵	۵۱
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	۹۸	۹۸	۹۸
⋮	۹۹	۹۹	۹۹
۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰

در ستون A، طریق به‌دست آوردن مجموع، نوشتن عددها به ترتیب از آغاز و جمع آن‌ها است، یعنی همان شیوه‌ای که در ابتدا برای جمع کردن تعداد گل‌های شکل ۱ به‌کار بردیم. در ستون B، جمع اعداد با شروع از انتها یعنی ۱۰۰ به ترتیب نزولی شیوه‌ی به‌دست آوردن مجموع در ستون C، جمع کردن این اعداد بدون هیچ ترتیب خاصی است.

ستون D از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. زیرا رابطه‌ی جالبی بین اعداد ابتدایی و انتهایی دیده می‌شود. این همان راه میان‌بری است که در تمرین ۲ پیدا کردید. مجموع هردو عددی که به یک فاصله از دو انتها باشند، مجموع معینی می‌دهند، یعنی

$$۱+۱۰۰=۲+۹۹=۳+۹۸=⋯=۵۰+۵۱=۱۰۱$$

و چون مجموعاً ۵۰ جفت از این اعداد داریم، در نتیجه مجموع اعداد از ۱ تا ۱۰۰ برابر است با

$$۵۰ \times ۱۰۱ = ۵۰۵۰$$

دوباره به تمرین ۲ دقت کنید! در آن تمرین، تعداد گل‌های شکل ۱ را با توجه به شکل ۲ به‌دست آوردید. در واقع، تعداد گل‌های شکل ۲ در هر ردیف برابر مجموع گل‌های ردیف‌های اول و آخر بود

۱- به نقل از جرج بولیا، ۱۹۶۲

و چون مجموعاً ۷ ردیف گل داشتیم، در نتیجه مجموع گل‌های شکل ۱ نصف گل‌های شکل ۲ یعنی $۸ \times \frac{۷}{۲}$ بود. به بیانی دیگر

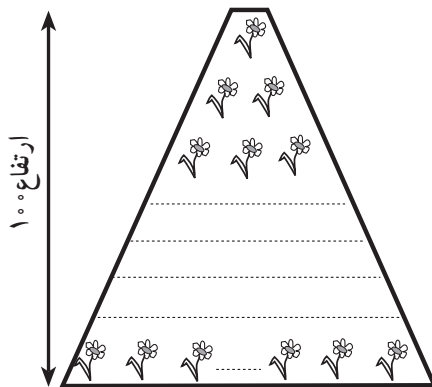
(تعداد گل‌های ردیف آخر + تعداد گل‌های ردیف اول) \times تعداد ردیف‌ها = مجموع گل‌های شکل ۱
 که این همان روش پیدا کردن مساحت ذوزنقه‌ای است که قاعده‌ی کوچک آن ۱، قاعده‌ی بزرگ آن ۷ و بلندی یا ارتفاع آن ۷ یعنی تعداد ردیف‌ها است:

$$\text{مجموع گل‌های شکل ۱} = \frac{\text{ارتفاع}}{۲} (\text{قاعده‌ی بزرگ} + \text{قاعده‌ی کوچک})$$

در مسأله‌ی گوس نیز، ۱۰۱ مجموع عددهای ابتدا و انتها و ۵۰ نصف تعداد آن‌ها بود پس

$$\begin{aligned} S = 100 &= \frac{\text{تعداد عددها}}{۲} (\text{عدد انتها} + \text{عدد ابتدا}) \\ &= \frac{۱۰۰}{۲} (1 + 100) \end{aligned}$$

به یاد چه می‌افتید؟ همان‌طور که قبلاً هم دیدید، مجموع فوق یادآور مساحت ذوزنقه‌ای است که ارتفاع آن ۱۰۰ و قاعده‌های آن ۱ و ۱۰۰ است.



حال همین مسأله را اساس کار قرار می‌دهیم و به تعمیم آن می‌پردازیم. به جای عدد خاص ۱۰۰، عدد طبیعی n را در نظر می‌گیریم. در واقع با کمک گرفتن از تجربه‌ی گوس، می‌خواهیم

۱- S حرف اول Sum به معنی مجموع است.

مجموع اولین n عدد طبیعی را پیدا کنیم.

برای این کار، از همان شیوه‌ای که در ستون D به کار بردیم دوباره استفاده می‌کنیم؛ یعنی پیدا کردن جفت مرتب‌هایی از اعداد ابتدایی و انتهایی (اعدادی که به فاصله‌ی معینی از ابتدا و انتها قرار گرفته‌اند) که مجموع معینی دارند.

به همان شیوه‌ای که در شکل ۲ داشتیم، مجموع S را دوباره می‌نویسیم مشروط بر این که در سطر دوم، ترتیب جمله‌ها برعکس، یعنی از بزرگ به کوچک نوشته شوند. (حتماً به یاد می‌آورید که در شکل ۲ ردیف گل‌ها را برعکس چیدیم.)

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$$

از جمع دو سطر بالا نتیجه می‌گیریم که

$$2S = (1+n) + (1+n) + (1+n) + \dots + (1+n) + (1+n) + (1+n)$$

n بار

چون تعداد جمله‌ها n تا بود پس

$$2S = n(1+n)$$

یا

$$S = \frac{n(1+n)}{2}$$

(*)

یعنی:

$$S = \frac{(\text{جمله‌ی آخر} + \text{جمله‌ی اول}) \times \text{تعداد جمله‌ها}}{2}$$

فعالیت ۲-۲

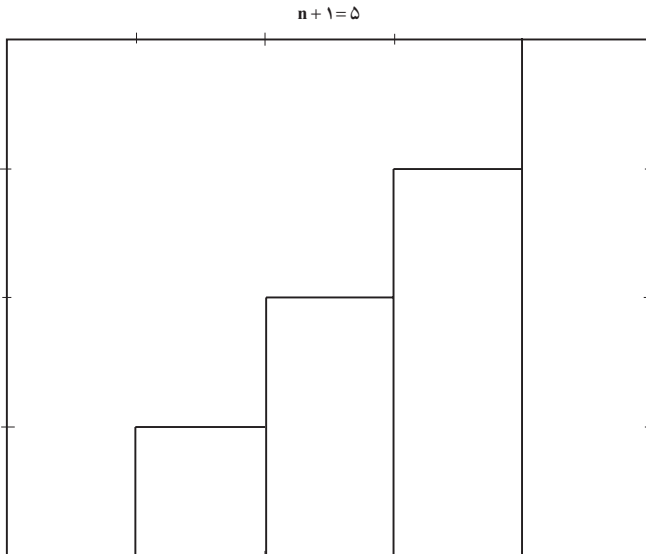
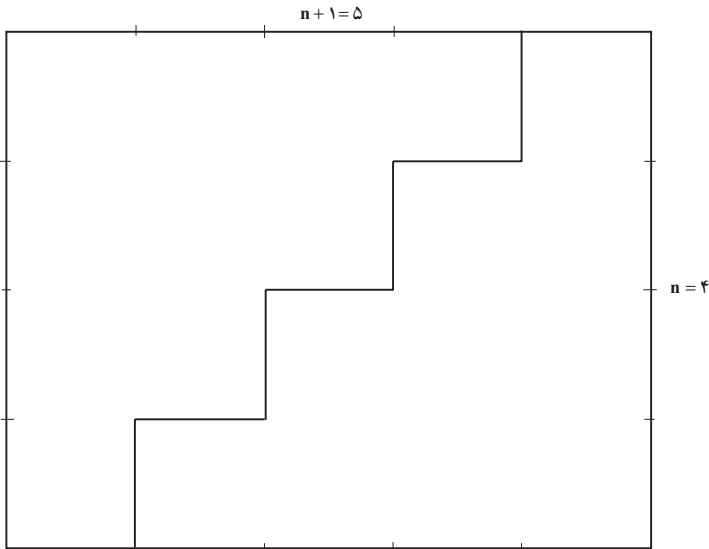
برای نشان دادن مجموع $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ مستطیلی را در نظر می‌گیریم که یک

ضلع آن n و ضلع دیگرش $n+1$ باشد. حال با خطی پلکانی، مستطیل را به دو قسمت مساوی تقسیم

می‌کنیم: مساحت هر قسمت برابر است با $n + 3 + 2 + 1$. چرا؟ به آن فکر کنید! مساحت تمام مستطیل چقدر است؟ درست حدس زدید! با توجه به طول و عرض مستطیل، مساحت آن $n(n+1)$ و مساحت نصف آن $\frac{n(n+1)}{2}$ است. بنابراین

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

شکل زیر با فرض $n = 4$ رسم شده است.



۲-۳- دنباله‌ی حسابی

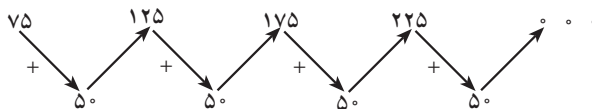
مادر بزرگ گلاره تصمیم گرفت به تمام نوه‌های خود عیدی بدهد. به این ترتیب که به کوچکترین آن‌ها ۳ سکه ۲۵ تومانی و به بچه‌های دیگر به ترتیب سن ۲ سکه بیشتر از نفر قبلی بدهد. در ضمن هیچ کدام از بچه‌ها هم‌سن نبودند. می‌خواهیم مجموع پول‌هایی که مادر بزرگ گلاره به نوه‌های خود داده است و مقدار عیدی نفر پانزدهم را به دست آوریم. دنباله‌ی زیر نشان‌دهنده‌ی عیدی‌های دریافتی از مادر بزرگ است:

۷۵ , ۱۲۵ , ۱۷۵ , ۲۲۵ , ۲۷۵ , , ۴۲۵ ,

این دنباله نمونه‌ای از یک دنباله‌ی حسابی است.

هر جمله از یک دنباله‌ی حسابی از افزودن یک مقدار ثابت به جمله‌ی قبلی به دست می‌آید. به این مقدار ثابت قدر نسبت می‌گوییم.

دنباله‌ی عیدی‌ها شبیه دنباله‌ی اعداد طبیعی است، با این تفاوت که هر جمله‌ی آن با افزودن عدد ۵۰ به جمله‌ی قبلی به دست می‌آید. با این حال، این دنباله حالت تعمیم یافته‌ای از مثال ردیف‌های گل و اعداد از ۱ تا ۱۰۰ است که با آن‌ها آشنا شدیم. در دو مثال قبلی، اولین جمله‌ی دنباله‌ها (اولین ردیف گل‌ها) عدد ۱ بود و به ترتیب در سطرها (ردیف‌های) بعدی یک گل افزوده شد، یعنی اختلاف هر دو جمله در آن‌ها دقیقاً ۱ بود، اما در این دنباله، جمله‌ی اول ۷۵ است و جمله‌ها به ترتیب ۵۰ تا ۵۰ تا زیاد شده‌اند، یعنی اختلاف هر دو جمله در این دنباله دقیقاً ۵۰ است.



تمرین ۴: مجموع پول‌هایی که مادر بزرگ به ۱۵ نفر از نوه‌های خود داده است چه قدر است؟

در فعالیت ۱-۲، پیدا کردن تعداد گل‌ها در هر ردیف ساده بود، زیرا گل‌های هر ردیف یکی یکی اضافه می‌شدند و صدمین جمله در دنباله‌ی اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ همان صد است. اگر فرض کنیم مادر بزرگ ۱۰۰ نوه داشته باشد پیدا کردن مقدار پرداختی مادر بزرگ به این صد نوه به این وضوح نیست و اگر روشی برای به دست آوردن آن‌ها نداشته باشیم، صد بار جمع کردن این اعداد کار وقت‌گیری است! پس دوباره جمله‌های این دنباله را به طریقی دیگر می‌نویسیم تا روش مناسب را پیدا کنیم:

۷۵			
۷۵	۵۰		
۷۵	۵۰	۵۰	
۷۵	۵۰	۵۰	۵۰

تمرین ۵: جمله‌های پنجم تا دهم را حدس بزنید و سپس با ادامه‌ی نمودار حدس خود را آزمایش کنید.

می‌توانیم این جمله‌ها را به صورت زیر بنویسیم:

$$\text{جمله اول} = ۷۵ + ۰ \times ۵۰,$$

$$\text{جمله دوم} = ۷۵ + ۱ \times ۵۰,$$

$$\text{جمله سوم} = ۷۵ + ۲ \times ۵۰,$$

$$\text{جمله چهارم} = ۷۵ + ۳ \times ۵۰,$$

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، کم کم روش مناسب را پیدا می‌کنیم زیرا بین شماره (ترتیب) جمله‌ها و تعداد ۵۰ تومانی‌های افزوده شده رابطه‌ای دیده می‌شود یعنی در هر جمله، تعداد ۵۰ تومانی‌های اضافه شده یکی کمتر از شماره‌ی جمله است. با این اطلاعات، می‌توانیم پرداختی مادر بزرگ به n امین نوه‌ی خود را حدس بزنیم:

$$\text{جمله } n \text{ ام} = ۷۵ + (n-1) \times ۵۰$$

اگر به جای جمله‌ی اول که ۷۵ است حرف a و به جای ۵۰ حرف d (اختلاف هر دو جمله) را قرار دهیم، آن وقت دنباله‌ی حسابی را در حالت کلی نشان داده‌ایم! یا به بیان دیگر نمایش یک دنباله‌ی

۱-d اولین حرف کلمه‌ی difference به معنای فاصله یا اختلاف ثابت هر دو جمله‌ی متوالی است.

a				
a	d			
a	d	d		
a	d	d	d	
a	d	d	d	d

حسابی با جمله‌ی اول a و قدرنسبت d چنین است :

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots, a + (n-1)d, \dots$$

یعنی n مین جمله‌ی این دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی

$$a + (n-1)d$$

به دست می‌آید و این راه میان‌بری است که ما را از محاسبات کسل کننده بی‌نیاز می‌کند.

برای محاسبه‌ی مجموع این جمله‌ها چه می‌توان کرد؟

به نمودار بالا توجه کنید. آن را تا n مین جمله ادامه می‌دهیم و بعد به دنبال مجموع n جمله می‌گردیم. می‌بینیم که جمله‌ی اول به تعداد جمله‌ها تکرار شده است، یعنی این مجموع شامل n تا a است. از طرف دیگر جملات $d, 2d, 3d, \dots, (n-1)d$ نیز وجود دارند که بخشی از مجموع ما را تشکیل می‌دهند، در نتیجه

$$S = na + 1d + 2d + 3d + \dots + (n-1)d$$

اگر به جمله‌های بعد از na توجه کنید همگی در d مشترک هستند و می‌توانیم برای سهولت کار از d فاکتور بگیریم

$$S = na + [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)]d \quad (1)$$

ضرب d مجموع اعداد طبیعی از 1 تا $n-1$ است و با استفاده از رابطه‌ی (*) در بند ۲-۲ می‌توان آن را به این صورت نوشت

$$S_1 = \frac{(\text{جمله‌ی آخر} + \text{جمله‌ی اول}) \times \text{تعداد جمله‌ها}}{2}, \quad (2)$$

یا

$$S_1 = \frac{(n-1)[1 + (n-1)]}{2},$$

یا

$$S_1 = \frac{(n-1)n}{2}$$

این مجموع را در رابطه‌ی (۱) به جای ضریب d قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم

$$S = na + \left(\frac{(n-1)n}{2} \right) d$$

آیا می‌توانیم این رابطه را به صورت رابطه‌ی (۲) دریاوریم؟ یعنی آیا مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول a و قدر نسبت d نیز همان نصف تعداد جملات \times مجموع جمله‌های اول و آخر می‌شود؟

معمولاً در ساده کردن عبارتها، علاوه بر عوامل مشترک، از عوامل مشکل‌آفرین از جمله کسرها نیز تا حد امکان فاکتور می‌گیریم تا رابطه‌ی به دست آمده به ساده‌ترین شکل ممکن درآید. در این مورد هم چنین می‌کنیم

$$S = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \quad (3)$$

این رابطه به رابطه‌ی (۲) بسیار نزدیک است. قبلاً دیده بودیم که جمله‌ی n ام یک دنباله‌ی حسابی $a + (n-1)d$ است. با کمی دقت در (۳) متوجه می‌شویم که اگر $2a$ را به صورت $a + a$ بنویسیم، درواقع (۲) را به دست آورده‌ایم

تعداد جمله‌ها

$$S = \frac{n}{2} [a + a + (n-1)d] ,$$

جمله‌ی آخر جمله‌ی اول

یعنی

$$S = \frac{\text{(جمله‌ی آخر + جمله‌ی اول) تعداد جمله‌ها}}{2}$$

$$S = \frac{n}{2} (a + l)$$

اگر دوباره به مسأله‌ی گوس و جمع تعداد گل‌ها بازگردیم، می‌بینیم که آن‌ها حالت‌های خاصی از دنباله‌های حسابی بودند که در آن‌ها d ، یعنی قدر نسبت، عدد ۱ و جمله‌ی اول نیز ۱ بود. با این حال همگی ماهیت یکسان دارند و مجموع چنین دنباله‌هایی با رابطه‌ی یکسانی به دست می‌آیند.

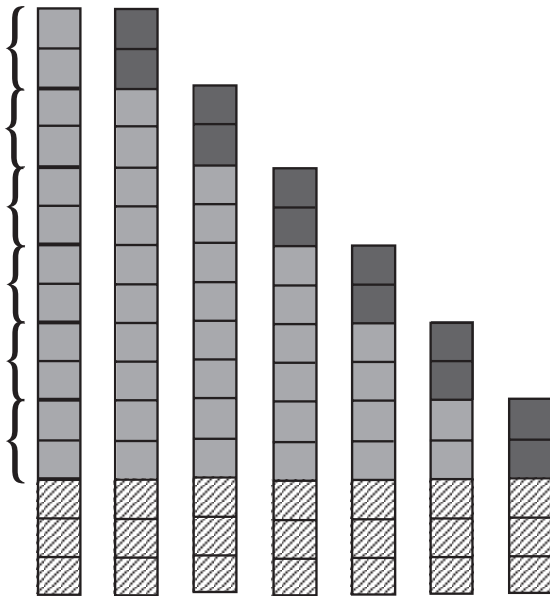
تمرین ۶: با توجه به روشی که گوس، مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی طبیعی را به دست آورد، مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت d و جمله‌ی اول a را به دست آورید. سپس نتیجه را با رابطه‌ی (۲) مقایسه کنید.

اینجا با دنباله‌های حسابی افزایشی آشنا شدیم، یعنی دنباله‌هایی که قدر نسبت آن‌ها مثبت بود و هر جمله از جمله‌ی قبلی بیشتر می‌شد. اما همیشه چنین نیست و گاهی جمله‌های دنباله‌ی حسابی به میزان ثابتی کاهش می‌یابند. به مثال زیر توجه کنید:

مثال: خواهر گلاره ۱۵ سکه‌ی ۲۵ تومانی دارد و می‌خواهد به هریک از بچه‌های کوچک‌تر از خود در فامیل دو سکه عیدی بدهد و سه سکه را نیز برای خودش نگه دارد. وضعیت موجودی خواهر گلاره قبل و بعد از دادن عیدی، دنباله‌ی حسابی زیر را می‌سازند

۳۷۵, ۳۲۵, ۲۷۵, ۲۲۵, ۱۷۵, ۱۲۵, ۷۵

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، قدر نسبت این دنباله، عدد -۵۰ است و نمودار آن به صورت زیر است:



در دنباله‌ی حسابی، اگر مقدار ثابت، مثبت باشد، جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی افزایش می‌یابند و اگر مقدار ثابت، منفی باشد، جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی کاهش می‌یابند.

تمرین

۱- جاهای خالی را در دنباله‌های حسابی زیر پر کنید :

الف) $10 \square 50$

ب) $10 \square \square 50$

پ) $10 \square \square \square 50$

ت) $10 \square \square \square \square 50$

ث) $10 \square \square \square \square \square 50$

۲- کدامیک از دنباله‌های زیر حسابی هستند؟ آن‌ها را معلوم کرده و قدر نسبت آن‌ها را پیدا کنید.

الف) $4, 24, 44, 64, 84, \dots$

ب) $3, 6, 12, 24, 48, \dots$

پ) $5, 5, 5, 5, 5, \dots$

ت) $10, 100, 1000, 10000, 100,000, \dots$

ث) $20, 21, 23, 26, 30, \dots, \dots$

ج) $15, 14, 13, 12, 11, \dots$

۳- مجموع ۱۵ جمله‌ی اول دنباله‌های حسابی تمرین ۲ را حساب کنید .

۴- دنباله حسابی روبرو را در نظر بگیرید :

$1, 5, 9, 13, 17, \dots$

و هر جمله آن را در ۲ ضرب کنید. دنباله‌ی

به دست می‌آید.

الف) آیا دنباله‌ی حاصل نیز یک دنباله‌ی حسابی است؟

ب) اگر جمله‌های دنباله‌ی حسابی را در یک عدد ضرب کنیم، آیا دنباله‌ی حاصل همیشه

دنباله‌ی حسابی خواهد شد؟ چرا؟

۵- مجموع 50 جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی 200 و مجموع 50 جمله‌ی بعدی آن

2700 است، جمله‌ی اول این دنباله را پیدا کنید.

۶- در فعالیت ۱، ردیف صفر را به گل‌ها اضافه کنید : یعنی در ردیف صفر هیچ گلی نباشد و

در ردیف ۱ یک گل و به همین ترتیب تا در ردیف ۷ که هفت گل قرار می‌گیرد. این‌بار

ترتیب چیدن گل‌ها چه شکلی می‌سازد؟ تعداد گل‌ها را با توجه به مساحت این شکل

به دست آورید.

۷- مجموع ۵ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی 10° و مجموع سه جمله‌ی بزرگ‌تر هفت برابر مجموع دو جمله‌ی کوچک‌تر است. جمله‌های این دنباله را پیدا کنید. (قدر نسبت مثبت فرض شود)

۲-۲- دنباله‌ی هندسی

فعالیت ۲-۳

نیما به دنبال شغل مناسبی می‌گشت تا بتواند هم هزینه‌ی تحصیل خود را تأمین کند و هم مهارت‌های شغلی خود را بالا ببرد، در ضمن فرصت کافی برای درس خواندن داشته باشد، او در صفحه‌ی نیازمندی‌های روزنامه، چشمش به یک آگهی درباره‌ی شغل مورد علاقه‌اش افتاد که نوشته بود: «به یک جوان وظیفه‌شناس و ماهر در زمینه‌ی مورد نظر نیازمندیم. برای کار خوب دستمزد خوب می‌دهیم. روز اول به شما یک ریال و سپس تا پایان ماه، هر روز دستمزد شما را دوبرابر می‌کنیم. متقاضیان با در دست داشتن مدارک و یک معرفی‌نامه‌ی معتبر به آدرس ... مراجعه نمایند.»

نیما اول از دستمزد وعده داده شده خنده‌اش گرفت! اما پس از چند لحظه از روی کنجکاوی و به عنوان سرگرمی، تصمیم گرفت درآمد یک ماه را محاسبه نماید. ما هم به همراه نیما، به بررسی راه‌های مختلف محاسبه‌ی دستمزدهای روزانه و درآمد ماهانه‌ی وعده داده شده می‌پردازیم تا با تأکید پیشنهاد ردّ یا قبول این شغل را به او بدهیم!

شاید طبیعی‌ترین راهی که به ذهن برسد، دوبرابر کردن دستمزد روز قبل برای به دست آوردن دستمزد روز بعد و ادامه آن تا ۲۹، ۳۰ یا ۳۱ روز (تعداد روزهای ماه‌های مختلف سال) باشد^۱، آیا صرف وقت برای چنین کار یکنواختی معقول به نظر می‌رسد؟ شاید بتوانیم چاره‌ای بیندیشیم و راه میان‌بری برای انجام این محاسبات پیدا کنیم. در تلاش برای یافتن این راه میان‌بر، با قدرت و ظرافت ریاضی بیشتر آشنا می‌شویم، زیرا در هر دو صورت (قبول یا ردّ پیشنهاد) از وقتی که صرف کرده‌ایم بشیمان نخواهیم شد، چرا که با ساختار مسأله بیشتر آشنا شده‌ایم. در واقع این آگهی بهانه‌ای برای ما

۱- برگرفته از بولیا، ۱۹۶۲ که اصل مسأله از پایروس رابند در مصر باستان گرفته شده است.

۲- می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید.

خواهد شد تا چیزهای جدیدتری یاد بگیریم.

اگر کسی شغلی به شما پیشنهاد کند که دستمزد روز اول آن یک ریال باشد و سپس تا پایان ماه این دستمزد هر روز دو برابر شود، آیا شغل را می‌پذیرید یا رد می‌کنید؟
برای یافتن پاسخ این سؤال می‌توانیم جدولی تهیه کنیم و دستمزدهای روزانه را در آن یادداشت کنیم. الگویی برای ادامه‌ی کار پیدا نماییم و مجبور نباشیم که وقت زیادی را صرف آن کنیم.

(جدول ۱)

روزهای ماه	دستمزد روزانه
۱	۱
۲	$1 \times 2 = 2$
۳	$2 \times 2 = 4$
۴	$4 \times 2 = 8$
۵	$8 \times 2 = 16$
۶	$16 \times 2 = 32$

قبل از آن که جدول را ادامه دهیم به بررسی آن می‌پردازیم، شاید الگوی مناسبی پیدا کنیم و با دنبال کردن آن، از ادامه‌ی این کار بی‌نیاز شویم.

با دقت در جدول (۱)، متوجه می‌شویم که دستمزدهای روزانه در ستون دوم توان‌های ۲ هستند و رابطه‌ای نیز بین روزهای ماه و توان‌های ۲ در ردیف نظیر آن‌ها در آن ستون وجود دارد. بنابراین جدول (۲) را تشکیل می‌دهیم.

(جدول ۲)

روزهای ماه	دستمزد روزانه
۱	$1 = 2^0$
۲	$2 = 2^1$
۳	$4 = 2^2$
۴	$8 = 2^3$
۵	$16 = 2^4$
۶	$32 = 2^5$

تمرین ۷: دستمزد روز دهم را از روی جدول حدس بزنید. سپس با ادامه‌ی جدول، حدس خود را به آزمایش بگذارید. بعد از اطمینان از درستی حدس خود، دستمزد روزهای بیست و نهم، سی‌ام و سی‌ویکم را پیدا کنید.

حالا که دستمزدهای روزهای بیست و نهم، سی‌ام و سی‌ویکم را هم به دست آوردیم، می‌توانیم عدد دلخواه n کوچک‌تر یا مساوی ۳۱ را به عنوان نماینده‌ی روز انتخاب کنیم و رابطه‌ی به دست آمده از جدول (۲) را دوباره بنویسیم، که جدول (۳) به دست می‌آید.

با دقت در جدول (۳) حدس ما به یقین تبدیل شد و مطمئن شدیم که دستمزد هر روز از رابطه‌ی «۲ به توان یکی کمتر از آن روز» به دست می‌آید. با ادامه‌ی جدول، دستمزد روز n ام (n عددی طبیعی) را پیش‌بینی می‌کنیم، که در جدول (۴) آمده است.

(جدول ۳)

روز $n =$	دستمزد روزانه
۱ اول	$2^0 = 2^{1-1} = 2^{n-1}$
۲ دوم	$2^1 = 2^{2-1} = 2^{n-1}$
۳ سوم	$2^2 = 2^{3-1} = 2^{n-1}$
۴ چهارم	$2^3 = 2^{4-1} = 2^{n-1}$
۵ پنجم	$2^4 = 2^{5-1} = 2^{n-1}$
۶ ششم	$2^5 = 2^{6-1} = 2^{n-1}$

(جدول ۴)

روز	n	دستمزد روزانه
روز اول	۱	2^0
روز دوم	۲	2^1
روز سوم	۳	2^2
روز چهارم	۴	2^3
روز یازدهم	۱۱	$2^{11-1} = 2^{10}$
روز بیست و نهم	۲۹	$2^{29-1} = 2^{28}$
روز سی‌ام	۳۰	$2^{30-1} = 2^{29}$
روز سی‌ویکم	۳۱	$2^{31-1} = 2^{30}$

این مسأله را به صورت نموداری نیز می‌توان نشان داد.

دیده می‌شود که با دانستن آخرین رابطه‌ی جدول (۴)، یعنی دستمزد n امین روز، می‌توانیم دستمزد هر روزی را که بخواهیم، به دست آوریم.



نکته‌ی جالب اینجاست که با مشاهده‌ی دستمزدهای روزهای مختلف، رابطه‌ی (۱) را نتیجه گرفتیم و حالا با استفاده از این نتیجه کلی، می‌توانیم بدون انجام محاسبات قبلی، دستمزد روزانه را پیدا کنیم. این همان قوت و ظرافت ریاضی بود که به دنبالش می‌گشتیم!

$$(۱) \quad \text{دستمزد } n \text{ امین روز} = 2^{n-1}$$

تمرین ۸: رابطه‌ی بین مراحل مختلف فعالیت (۲-۳) و نتیجه‌گیری نهایی را با استقرای تجربی و استدلال استنتاجی بررسی کنید.

تمرین ۹: مقدار تقریبی دستمزد روزهای سی‌ام و سی و یکم را برحسب ریال و تومان به‌دست آورید. آیا می‌توانید در تصمیم‌گیری به‌نیما کمک کنید یا هنوز به دلایل بیشتری نیازمندید؟

فعالیت ۲-۴

در فعالیت ۲-۳، دستمزد روزانه‌ی شغل پیشنهادی در آگهی روزنامه را بررسی کردیم. با این حال، هنوز از درآمد ماهانه اطلاع درستی در دست نداریم. پس با تکمیل جدول (۱) صفحه‌ی ۳۲، به مطالعه‌ی درآمدها می‌پردازیم تا شاید الگوی مناسبی برای تعیین درآمد در n امین روز بیابیم. با دقت در جدول (۵)، امکان وجود رابطه‌ای بین n و درآمد تا پایان روز n ام را بررسی می‌کنیم:

(جدول ۵)

روز	n	دستمزد روز n ام	درآمد تا پایان روز n ام (مجموع دستمزدها)
روز اول	۱	$2^0 = 1$	۱
روز دوم	۲	$2^1 = 2$	$1 + 2 = 3$
روز سوم	۳	$2^2 = 4$	$1 + 2 + 4 = 7$
روز چهارم	۴	$2^3 = 8$	$1 + 2 + 4 + 8 = 15$
روز پنجم	۵	$2^4 = 16$	$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$
روز ششم	۶	$2^5 = 32$	$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$

با توجه به جدول (۶) می‌توانیم رابطه‌ی عمومی پیدا کردن مجموع دستمزدها (درآمد ماهانه) را پیش‌بینی کنیم:

$$(۲) \quad ۱ - ۲^n = \text{درآمد ماهانه}$$

(جدول ۶)

روز	n	دستمزد روز n ام	درآمد تا پایان روز n ام (مجموع دستمزدها)
روز اول	۱	$۲^0 = ۱ = ۲^1 - ۱$	$۱ = ۲^1 - ۱$
روز دوم	۲	$۲^1 = ۲ = ۲^2 - ۱$	$۱ + ۲ = ۳ = ۲^2 - ۱$
روز سوم	۳	$۴ = ۲^2 = ۲^3 - ۱$	$۱ + ۲ + ۴ = ۷ = ۲^3 - ۱$
روز چهارم	۴	$۸ = ۲^3 = ۲^4 - ۱$	$۱ + ۲ + ۴ + ۸ = ۱۵ = ۲^4 - ۱$
روز پنجم	۵	$۱۶ = ۲^4 = ۲^5 - ۱$	$۱ + ۲ + ۴ + ۸ + ۱۶ = ۳۱ = ۲^5 - ۱$
روز ششم	۶	$۳۲ = ۲^5 = ۲^6 - ۱$	$۱ + ۲ + ۴ + ۸ + ۱۶ = ۳۲ = ۲^6 - ۱$
روز سی‌ام	۳۰	$۲^{۳۰} - ۱$	$۲^{۳۰} - ۱$

تمرین ۱۰: درآمد تقریبی را در روز سی‌ام و سی و یکم به دست آورید و با دلیل، به شما تصمیم قاطع خود را در مورد قبول یا رد شغل پیشنهادی بگویید!

جدول (۶) به ما کمک کرد که میان‌بر بزنیم و بدون جمع کردن و تنها با استفاده از رابطه‌ی (۲)، مجموع دستمزدهای روزانه را به دست آوریم.

تمرین ۱۱: آیا از رابطه‌ی (۲) می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$۱ - (۲ \times \text{دستمزد روز } n \text{ ام}) = \text{درآمد تا پایان روز } n \text{ ام}$$

درستی نتیجه را با توجه به جدول (۶) و رابطه‌ی (۲) بررسی کنید.

اگر دستمزد هر روز را یک جمله بنامیم و آن‌ها را در یک سطر بنویسیم، می‌بینیم که افزایش آن‌ها نسبت ثابتی دارد، یعنی هر جمله با دو برابر کردن جمله قبلی به دست می‌آید

$$۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ۶۴, \dots$$

این جمله‌ها (اعداد) دنباله‌ی توان‌های ۲ را تشکیل می‌دهند.

حال می‌خواهیم از روش پیدا کردن دستمزدها در فعالیت‌های قبلی استفاده کنیم و مسأله را تعمیم دهیم. به همین دلیل، به جای دستمزد پیشنهادی «یک ریال» برای روز اول مقدار a و به جای

«دو برابر شدن»، r برابر شدن با شرط r بزرگتر از یک و به جای 3° روز، n روز را در نظر می‌گیریم. تغییر آگهی استخدام چنین خواهد بود «اگر کسی به شما شغلی پیشنهاد کند که دستمزد روز اول آن a باشد و این دستمزد بدون توقف هر روز r برابر شود، آیا پیشنهاد استخدام را برای n روز می‌پذیرید یا رد می‌کنید؟»

با در نظر گرفتن این تغییرات، جدول (۴) را دوباره‌سازی می‌کنیم (جدول ۷).

(جدول ۷)

روز	n	دستمزد روزانه a، نسبت افزایش r
جمله‌ی اول	۱	$ar^0 = a$
جمله‌ی دوم	۲	$ar = ar^1$
جمله‌ی سوم	۳	$(ar)r = ar^2$
جمله‌ی چهارم	۴	$(ar^2)r = ar^3$
جمله‌ی پنجم	۵	$(ar^3)r = ar^4$
جمله‌ی n ام	n	ar^{n-1}

به جمله n ام، جمله‌ی عمومی گفته می‌شود و آن را با t نمایش می‌دهند

$$t = ar^{n-1} \text{ : جمله عمومی}$$

دستمزدهای جدول (۷) را به ترتیب روزها در یک سطر می‌نویسیم:

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \dots, ar^{n-1}$$

این جمله‌ها تشکیل یک دنباله‌ی هندسی می‌دهند و نسبت بین هر دو جمله‌ی متوالی غیر صفر یعنی r ، که ثابت است را قدر نسبت می‌گویند. ($a \neq 0$)

هر جمله از یک دنباله‌ی هندسی از ضرب جمله‌ی قبلی در یک مقدار ثابت به دست می‌آید. با فرض مثبت بودن جمله‌ی اول، اگر مقدار ثابت بزرگتر از یک باشد دنباله افزایشی و اگر مقدار ثابت کوچکتر از یک باشد، دنباله کاهشی خواهد بود.

۱- r اول کلمه‌ی ratio به معنی نسبت است. در کتاب‌های قدیمی، به جای r از q که اول کلمه‌ی لاتین quotient است

استفاده می‌کردند.

همان‌طور که در جدول (۶) دیدیم، برای به‌دست آوردن کل درآمد در پایان هر روز، مجموع دستمزدهای روز اول تا آن روز را محاسبه کردیم. همان روند را ادامه می‌دهیم و راه میان‌بری برای پیدا کردن مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a و مقدار ثابت r جستجو می‌کنیم:

$$(۳) \quad a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} = \text{مجموع } n \text{ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی}$$

فعالیت ۲-۵

هر دو شیوه‌ای را که برای به‌دست آوردن مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی اتخاذ کردید، در مورد پیدا کردن مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی نیز به کار ببرید. آیا به نتیجه‌ای رسیدید؟ آیا آن شیوه‌ها را توانستید به عنوان یک روش در این مورد هم به کار ببرید یا خیر؟ نتیجه به‌دست آمده را بررسی کنید.

همان‌طور که در مورد پیدا کردن n جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی ملاحظه کردید، سعی ما بر این بود که تا حد امکان، تعداد مجهول‌ها را کم بکنیم و رابطه‌ای پیدا کنیم که اجزای کمتر و کلیت بیشتری داشته باشد. با دقت در رابطه‌ی (۳) می‌بینیم که اگر رابطه‌ی (۴) را از ضرب r در (۳) نتیجه بگیریم، بسیاری از جمله‌های رابطه‌ی اخیر با (۳) مشابه هستند

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

$$S_n r = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \quad (۴)$$

با کم کردن (۳) از (۴) جمله‌های مشابه حذف می‌شوند و آنچه که باقی می‌ماند چنین است

$$S_n r - S_n = ar^n - a \quad (۵)$$

چون مجهول ما، S_n ، یعنی مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی بود، در نتیجه با فاکتورگیری از عامل مشترک S_n و a در دو سمت رابطه‌ی (۵)، مقدار S_n را به‌دست می‌آوریم

$$S_n(r-1) = a(r^n - 1)$$

یا

$$\boxed{S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}} \quad \text{یا} \quad \boxed{S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}} \quad (۶)$$

تمرین ۱۲: مجموع 5° جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول ۴ و قدر نسبت ۳ را به دست آورید.

تمرین ۱۳: با توجه به اینکه جمله‌ی عمومی یا جمله‌ی n ام یک دنباله‌ی هندسی برابر است با ar^{n-1} ، رابطه‌ی (۶) را بر حسب جمله‌ی عمومی بنویسید.

فعالیت ۲-۶

الف - قدر نسبت این دنباله‌ی هندسی $4, 4, 4, 4, \dots$ را پیدا کنید؛
 ب - با استفاده از رابطه‌ی (۶) سعی کنید مجموع n جمله‌ی اول این دنباله را به دست آورید.
 به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟
 همان‌طور که در فعالیت ۴ دیدید، اگر قدر نسبت یک دنباله‌ی هندسی یک باشد، رابطه‌ی (۶) به صورت کسر $\frac{1}{r}$ درمی‌آید، در نتیجه لازم است که رابطه‌ی (۶) را محدود به دنباله‌های هندسی با قدر نسبت $r \neq 1$ بکنیم

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}; \quad r \neq 1 \quad (7)$$

تمرین ۱۴: چگونگی رابطه (۷) را برای حالتی که r بزرگتر از صفر و کوچکتر از یک است بررسی کنید. اگر تعداد جمله‌های دنباله‌ی هندسی بیشتر و بیشتر شود، چه تغییراتی در مجموع فوق پیش می‌آید؟ درباره‌ی آن فکر کنید!

فعالیت ۲-۷

مدت ۷۰ سال طول می‌کشد تا تعداد اتم‌های تجزیه شده‌ی اورانیوم ۲۳۲ به نصف برسد و

۱- کسر $\frac{1}{2}$ تعریف نشده است.

دوباره ۷۰ سال دیگر طول می کشد تا نیمی از اتم های باقی مانده، یعنی نیمی از نصف تجزیه شوند و این روند هم چنان ادامه پیدا می کند. فرض کنید که نمونه ای از این نوع اورانیوم شامل ۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ اتم در سال ۱۰۰۰ میلادی بوده است. در نتیجه، مقدار باقی مانده ی اورانیوم در پایان هر هفتاد سال که آن را یک دوره ی زمانی می نامیم، به نصف مقدار قبلی کاهش می یابد

$$1,000,000,000, \quad 1,000,000,000 \times \frac{1}{2}, \quad (1,000,000,000 \times \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2} \text{ و } \dots$$

با دقت در سطر بالا، متوجه می شویم که این اعداد نمایشگر یک دنباله ی هندسی با جمله ی اول $a = 1,000,000,000$ و قدر نسبت $r = \frac{1}{2}$ هستند. مقدار اورانیوم باقی مانده در سال های ۱۰۷۰، ۱۱۴۰، ۱۲۱۰، ۱۲۸۰ و ۱۳۵۰ یعنی در یک، دو، سه، چهار و پنج دوره ی زمانی را محاسبه می کنیم:

(جدول ۸)

مرتبیه ی جمله	سال میلادی	تعداد دوره های زمانی	مقدار اورانیوم باقی مانده	نتیجه
جمله ی اول	۱۰۰۰	0×70	۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰	۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰
جمله ی دوم	۱۰۷۰	1×70	$1,000,000,000 \times \frac{1}{2}$	۵۰۰,۰۰۰,۰۰۰
جمله ی سوم	۱۱۴۰	2×70	$(1,000,000,000 \times \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2}$	۲۵۰,۰۰۰,۰۰۰
جمله ی چهارم	۱۲۱۰	3×70	$(1,000,000,000 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2}$	۱۲۵,۰۰۰,۰۰۰
جمله ی پنجم	۱۲۸۰	4×70	$(1,000,000,000 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2}$	۶۲,۵۰۰,۰۰۰
جمله ی ششم	۱۳۵۰	5×70	$(1,000,000,000 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2}$	۳۱,۲۵۰,۰۰۰

در جدول فوق، مشاهده می کنیم که

(الف) مقدار اورانیوم باقی مانده به سرعت روبه زوال می رود؛

(ب) بین دوره های زمانی، تعداد ضرب های $r = \frac{1}{2}$ و مرتبه ی جمله های این تصاعد هندسی

رابطه ای برقرار است؛

با توجه به مشاهده ی فوق، جدول (۸) را دوباره می نویسیم که جدول (۹) حاصل می شود.

(جدول ۹)

سال	تعداد دوره‌های زمانی	مقدار اورانیوم باقیمانده	مرتبه‌ی جمله‌های دنباله
۱۰۰۰	۰	$۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \times (\frac{1}{4})^0$	جمله‌ی اول
۱۰۷۰	۱	$۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \times (\frac{1}{4})^1$	جمله‌ی دوم
۱۱۴۰	۲	$۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \times (\frac{1}{4})^2$	جمله‌ی سوم
۱۲۱۰	۳	$۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \times (\frac{1}{4})^3$	جمله‌ی چهارم
۱۲۸۰	۴	$۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \times (\frac{1}{4})^4$	جمله‌ی پنجم
۱۳۵۰	۵	$۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \times (\frac{1}{4})^5$	جمله‌ی ششم

تمرین ۱۵: مقدار اورانیوم باقیمانده در سال‌های ۱۷۰۰ و ۱۹۸۰ را اول حدس بزنید و سپس محاسبه کنید.

شاید از خود بپرسید که چه زمانی مقدار اورانیوم به صفر نزدیک می‌شود؟ برای یافتن پاسخ، جدول (۹) را ادامه می‌دهیم که نتایج در جدول ۱۰ ثبت شده است.

(جدول ۱۰)

سال	تعداد دوره‌های زمانی	مقدار اورانیوم باقیمانده	مرتبه‌ی جمله‌های دنباله
۱۰۰۰	۰	$۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \times (\frac{1}{4})^0$	جمله‌ی اول
۱۰۷۰	۱	$۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \times (\frac{1}{4})^1$	جمله‌ی دوم
۱۱۴۰	۲	$۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \times (\frac{1}{4})^2$	جمله‌ی سوم
۱۲۱۰	۳	$۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \times (\frac{1}{4})^3$	جمله‌ی چهارم
۱۲۸۰	۴	$۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \times (\frac{1}{4})^4$	جمله‌ی پنجم
۱۳۵۰	۵	$۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \times (\frac{1}{4})^5$	جمله‌ی ششم
۱۹۸۰	۱۴	$۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \times (\frac{1}{4})^{14}$	جمله‌ی پانزدهم
	n-1	$۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \times (\frac{1}{4})^{n-1}$	جمله‌ی n ^{ام}
	n	$۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \times (\frac{1}{4})^n$	جمله‌ی (n+1) ^{ام}

همان طور که در تمرین ۱۵ دیدید، هر قدر تعداد دوره‌های زمانی (n) بیشتر می‌شود، مقدار

$$\left(\frac{1}{p}\right)^n \text{ و مقدار باقیمانده‌ی اورانیوم کم کم به صفر نزدیک شود.}$$

تمرین ۱۶: به کمک ماشین حساب، مقدار اورانیوم باقیمانده را برای n های بزرگتر از ۱۴ و کوچکتر از ۲۰ به دست آورید (n عدد طبیعی است) و نتیجه را گزارش کنید. سپس تا آنجایی که می‌توانید، پیش بروید و سالی که مقدار اورانیوم باقی مانده بسیار نزدیک به صفر می‌شود را پیدا کنید.

همان طور که در تمرین ۱۴ حدس زدید، با افزایش تعداد دوره‌های زمانی، مقدار اورانیوم کم‌تر می‌شود. پس از گذشت ۳۰۰ دوره‌ی زمانی ($300 \times 70 = 21000$) یعنی در سال ۲۲۰۰۰ میلادی، مقدار اورانیوم را حساب می‌کنیم

$$\text{جمله‌ی سیصدویکم} = ar^{300} = 1,000,000,000 \times \left(\frac{1}{p}\right)^{300} = 4/909 \times 10^{-82}$$

می‌بینیم که این مقدار خیلی نزدیک به صفر است. اگر محاسبه را ادامه دهیم، جمله‌ی سیصد و

$$\text{بیست و نهم یعنی } \left(\frac{1}{p}\right)^{328} \times 1,000,000,000 \text{ را ماشین حساب صفر نشان می‌دهد.}$$

الف - در یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت بزرگ‌تر از صفر و کوچک‌تر از یک، هر قدر تعداد جمله‌ها (n) بیشتر و بیشتر شود، جمله‌ی a_n م به صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به زبان نمادین، اگر تعداد جمله‌ها یعنی n به سمت بی‌نهایت میل کند، حد a_n صفر می‌شود (از نماد ∞ برای نشان دادن بی‌نهایت استفاده می‌شود و Limit به معنای حد است).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

ب - در فعالیت ۱، دیدیم که چون مقدار قدر نسبت بزرگتر از یک بود

$$(r = 2 > 1) \text{ در نتیجه } r < r^2 < r^3 < \dots, \text{ اما در فعالیت ۲ چون قدر نسبت کوچک‌تر از یک بود}$$

$$\left(0 < r = \frac{1}{p} < 1\right), \text{ در نتیجه } r > r^2 > r^3 > \dots. \text{ با بیشتر شدن } n, r^n \text{ کوچک و کوچک‌تر می‌شود و}$$

به صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به زبان نمادین، حد r^n وقتی که n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند

برابر صفر می‌شود

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

تمرین ۱۷ — مجموع یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a و قدر نسبت $0 < r < 1$ را بررسی کنید.

فعالیت ۲ — ۸



به سوی بی‌نهایت [۳]: باطل‌نمای زنون نیاز به پیدایش یک نظریه برای فرایندهای نامتناهی داشت. همچنین نظریه‌ی چنین فرایندی، نیوتن و لایب‌نیتز را به سوی کشف حسابان راهبری کرد.

شاید داستان باطل‌نمای زنون را شنیده باشید! ماجرا از این قرار است که در زمان‌های دور، دوندۀ ای قصد پیمودن یک مسیر را داشته است. زنون مسأله را چنین می‌دید که دوندۀ در مرحله‌ی اول نصف مسافت را می‌پیماید، سپس نصف مسافت باقی‌مانده — یعنی نصفِ نصفِ مسافت — را می‌دود، بعداً نصفِ نصفِ نصفِ مسافت را طی می‌کند و به همین ترتیب تا به پایان مسیر برسد. با کمی دقت، متوجه می‌شویم که مسافت‌های طی شده در هر مرحله، یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $r = \frac{1}{2}$ و جمله‌ی اول $a = \frac{1}{2}$ تشکیل می‌دهند

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2}, \dots$$

در آن زمان، زنون به دلیل عدم آشنایی با نتایجی که در فعالیت ۲—۷ به آن رسیدیم، دچار یک سردرگمی شده بود. علت این بود که از یک طرف، توانایی محاسبه‌ی مجموع یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت مثبت و کوچک‌تر از یک، که تعداد جمله‌های آن روبه افزایش دائمی (تا بی‌نهایت) بودند را نداشت، یعنی نمی‌توانست به وسیله‌ی نمادها و ابزار ریاضی نشان دهد که مجموع مسافت‌های

بیموده شده توسط دونده، بالاخره او را به انتهای مسیر می‌رساند! از طرف دیگر، در دنیای واقعی می‌دید که دونده بالاخره مسیر را تمام و کمال طی می‌کند و این‌جا بود که زنون این داستان را «باطل‌نما» نامید و جامعه‌ی ریاضی مدت‌ها دچار بحرانی بود که این باطل‌نما به‌وجود آورده بود.

با توجه به نتایجی که به‌دست آورده‌ایم، مجموع جمله‌های دنباله‌ی هندسی فوق را دوباره بررسی می‌کنیم:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}, \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{4}, \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{4}, \dots$$

دنباله‌ی فوق را به دو طریق زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\frac{1}{4}, \left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{4}\right)^3, \left(\frac{1}{4}\right)^4, \dots \quad \text{(الف)}$$

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \frac{1}{4^4}, \dots \quad \text{(ب)}$$

تمرین ۱۸: با توجه به رابطه‌ی (۶) مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی یعنی S_n را در قسمت (ب) حساب کنید.

تمرین ۱۹: با توجه به نتیجه‌ی تمرین ۱۶، بررسی کنید که با افزایش تعداد n ها تا بی‌نهایت، وضعیت $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ چگونه می‌شود؟ مقدار S_n چه قدر می‌شود؟ نتیجه‌ی کار را یادداشت کنید.

نتیجه‌گیری‌های شما را می‌توان به صورت حد مجموع این دنباله نوشت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

در حالت کلی، حد مجموع یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $0 < r < 1$ و جمله‌ی اول a ، با توجه به نتایج به دست آمده چنین است:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

یا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

مسائل

۱- کدامیک از دنباله‌های زیر هندسی هستند؟ قدر نسبت را برای دنباله‌های هندسی پیدا

کنید:

(الف) $1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25 \quad \dots$

(ب) $7 \quad 14 \quad 21 \quad 28 \quad 35 \quad \dots$

(پ) $60 \quad 30 \quad 15 \quad 7/5 \quad 3/75 \quad \dots$

۲- نمودار سمت چپ، چهار جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی را نشان می‌دهد

(الف) جمله‌ها را مشخص کنید؛

(ب) قدر نسبت را پیدا کنید؛

(پ) سه جمله‌ی بعدی را به دست آورید؛

(ت) مجموع ۱۲ جمله‌ی اول آن را محاسبه کنید.



۳- جاهای خالی را در دنباله‌های هندسی زیر پر کنید:

الف) $4, 20, \square, 500, \square$

ب) $\square, \square, 63, 189$

پ) $1, \square, 1000000$

ت) $1, \square, \square, 1000000$

ث) $1, \square, 64$

ج) $1, \square, \square, 64$

چ) $1, \square, 64000000$

ح) $1, \square, \square, 64000000$

۴- اگر هر جمله‌ی دنباله‌ی هندسی

$1, 3, 9, 27, \dots$

۴ واحد بیشتر شود، دنباله‌ی به وجود آمده چنین خواهد بود:

$5, 7, 13, 31, \dots$

الف) آیا دنباله‌ی به دست آمده نیز یک دنباله‌ی هندسی است؟

ب) اگر هر جمله‌ی یک دنباله‌ی هندسی افزایش یکسانی داشته باشد، آیا دنباله‌ی جدید می‌تواند

یک دنباله‌ی هندسی باشد؟

۵- اگر هر جمله‌ی دنباله‌ی هندسی

$1, 3, 9, 27, \dots$

در عدد ۴ ضرب شود، حاصل چنین خواهد بود:

$4, 12, 36, 108, \dots$

الف) آیا دنباله‌ی به دست آمده یک دنباله‌ی هندسی است؟

ب) اگر هر جمله‌ی یک دنباله‌ی هندسی در عدد ثابتی ضرب شود، آیا دنباله‌ی به دست آمده

همیشه یک دنباله‌ی هندسی است؟

۶- یک دنباله‌ی هندسی دارای چهار جمله است: مجموع جمله‌های اول و دوم ۴ و مجموع

دو جمله‌ی آخر ۳۶ است. جمله‌های این دنباله را بیابید.

۲-۵- دنباله‌ی مربعی

در میان لوحه‌های گلی و سفالی که به وسیله‌ی بابلیان در ۲۰۰۰ سال قبل از میلاد مسیح ساخته شده‌اند، دنباله‌های اعداد دیده می‌شوند. اضافه بر لوحه‌هایی که شامل دنباله‌های حسابی و هندسی هستند، یک لوحه یافت شده است که ۶۰ جمله‌ی اول دنباله‌ی زیر را نشان می‌دهد

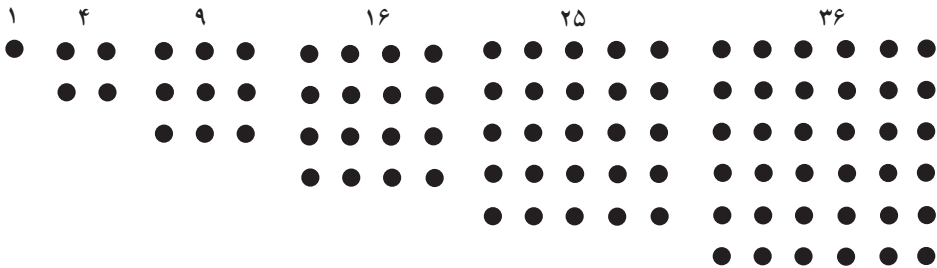
۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ۳۶, ۴۹,

همان‌طور که می‌بینید، جمله‌های دنباله‌ی فوق از ضرب هر عدد طبیعی متوالی در خودش به‌وجود آمده است و به همین دلیل به آن دنباله‌ی مربعی می‌گویند. دنباله‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر هم بازنویسی کرد

۱^۲, ۲^۲, ۳^۲, ۴^۲, ۵^۲, ۶^۲, ۷^۲, ...

در حدود ۶۰۰ سال قبل از میلاد مسیح، ریاضیدان‌های یونانی غالباً از نقطه‌ها برای نمایش

هندسی اعداد استفاده می‌کردند:



در واقع، شکل‌های بالا دلیل نام‌گذاری اعداد مربعی هستند.

اعداد مربعی اعدادی هستند که می‌توان آن‌ها را در یک آرایه‌ی^۱ مربعی شکل نمایش داد.

اگر به شکل‌ها دقت کنید، می‌بینید که طول ضلع‌های مربع‌هایی که به ترتیب از ۴، ۹، ۱۶، ۲۵ و ۳۶ نقطه تشکیل شده‌اند به ترتیب ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، یعنی ریشه‌ی^۲ مربع‌های فوق هستند. دنباله‌ی مربع‌ها رابطه‌ی جالبی با دنباله‌ی حسابی اعداد فرد دارد. در واقع، مجموع اعداد فرد متوالی که از یک شروع می‌شوند، اعداد مربعی هستند

$$1 = 1 = 1^2$$

۱- array

۲- root

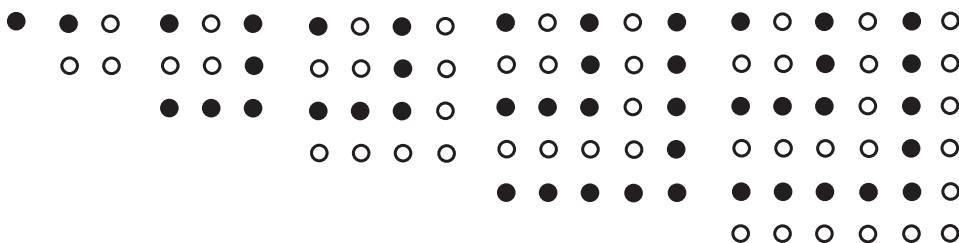
$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

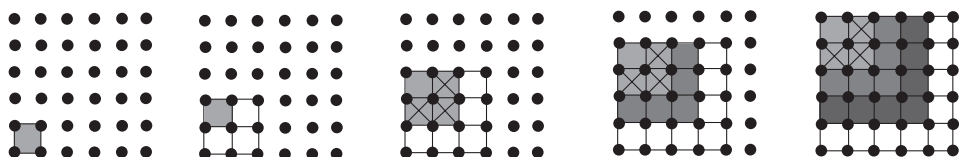
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

اساس این رابطه در شکل های زیر دیده می شود :



آرایه ی این الگوها به دو صورت عددی و هندسی، به بهتر دیدن روابط موجود در الگوها کمک می کند. به شکل دیگری از آرایه فوق توجه کنید :



فعالیت ۲-۹

مربع هایی با ضلع های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را در نظر بگیرید. آنگاه محیط ها و مساحت های آن ها را به ترتیب و جداگانه یادداشت کنید. همان طور که مشاهده می کنید، محیط ها و مساحت ها، هریک تشکیل یک دنباله ی عددی می دهند :

(الف) نوع دنباله ها را مشخص کنید ؛

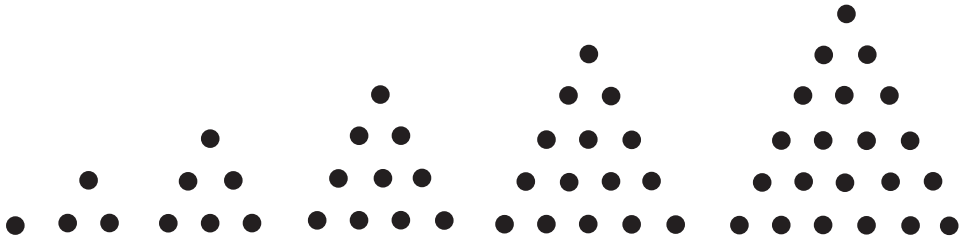
(ب) اگر طول ضلع مربعی دو برابر شود، محیط آن چه تغییری می کند؟

(پ) اگر طول ضلع مربعی دو برابر شود، مساحت آن چه تغییری می کند؟

۲-۶- دنباله‌ی مثلثی

اعداد دنباله‌ی ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ... مثلثی نامیده شوند زیرا آن‌ها نماینده‌ی تعداد نقطه‌ها در یک

آرایه‌ی مثلثی هستند :



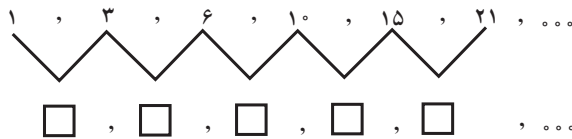
فعالیت ۲-۱۰

الف) شش جمله‌ی دنباله‌ی مثلثی بالا را عیناً یادداشت کنید. سپس پنج جمله‌ی بعدی این

دنباله را با نقطه‌ها نشان دهید ؛

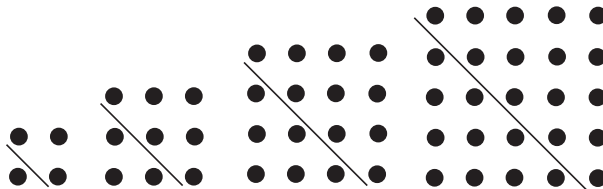
ب) هر جفت از جمله‌های متوالی این دنباله را باهم جمع کنید تا یک دنباله‌ی جدید ساخته

شود. به نمونه‌ی زیر توجه کنید :



ویژگی دنباله‌ی نتیجه شده چیست؟

شکل زیر جواب شما را به تصویر می‌کشد :



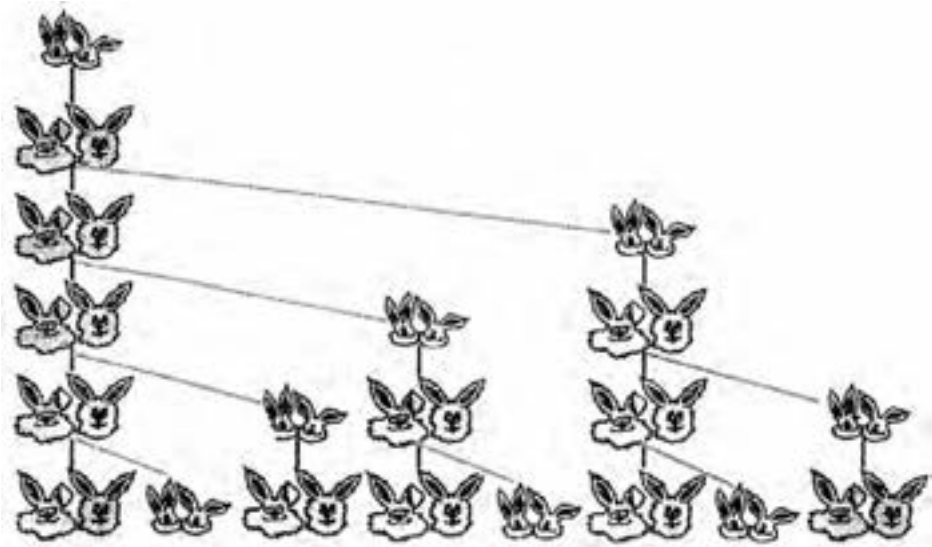
تمرین ۲۰: توان‌های ۳، ۴، الی آخر اعداد طبیعی، هریک تشکیل یک دنباله‌ی عددی می‌دهند که همگی در نوع خود جالب هستند. شما به عنوان تمرین دنباله‌ی عددی اعداد طبیعی مکعبی را بنویسید. آنگاه آن را با دنباله‌ی مساحت‌ها و محیط‌های مربع‌هایی با اضلاع متفاوت مقایسه کنید و نتیجه را یادداشت نمایید.

۲-۷- دنباله‌ی فیبوناتچی

یک جفت خرگوش نر و ماده‌ی یک ماهه، برای تولید مثل بسیار جوان هستند. اما فرض کنید که این جفت خرگوش در ماه دوم تولد خود و ماه‌های پس از آن، هر ماه یک جفت خرگوش نر و ماده به دنیا بیاورند. اگر هر جفت خرگوش متولد شده به همین روال تولید مثل کند و اگر هیچ‌کدام از خرگوش‌ها نمیرند، در شروع هر ماه چند جفت خرگوش وجود خواهد داشت؟ شکل زیر تعداد جفت خرگوش‌ها را در شش ماهه‌ی اول نشان می‌دهد:



فیبوناتچی



فعالیت ۱۱-۲

الف) جدول زیر با توجه به شکل تنظیم شده است. باقی جدول را کامل کنید؛

ماه	جفت خرگوش‌های نوزاد	جفت خرگوش‌های بزرگ	مجموع جفت خرگوش‌ها
اول	۱	۰	۱
دوم	۰	۱	۱
سوم	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
چهارم	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
پنجم	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
ششم	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

ب) رابطه‌ی بین مجموع جفت خرگوش‌ها و جفت خرگوش‌های بزرگ و نوزاد را بنویسید.

پ) چه رابطه‌ای بین تعداد جفت خرگوش‌های بزرگ در یک ماه و تعداد کل جفت خرگوش‌ها

در ماه قبلی وجود دارد؟

همان‌طور که مشاهده کردید، تعداد جفت خرگوش‌ها طی شش ماه، دنباله‌ی زیر را تشکیل می‌دهند:

۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸

با کمی دقت می‌بینیم که جمله‌ی سوم مجموع دو جمله‌ی اول و دوم، جمله‌ی چهارم مجموع

جمله‌ی دوم و سوم و الی آخر است. دنباله‌ی بالا را ادامه می‌دهیم:

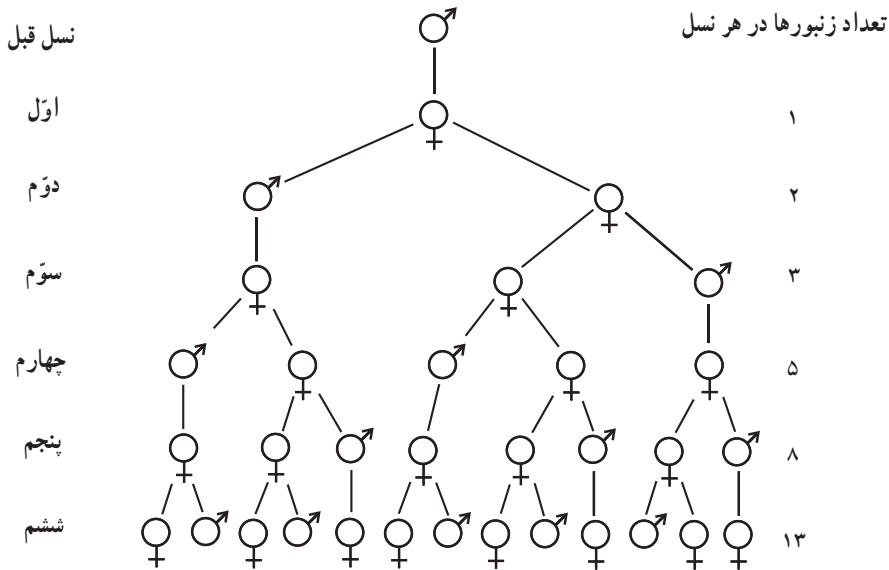
۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ...

این دنباله منسوب به فیبوناتچی^۱ ریاضیدان معروف ایتالیایی قرن سیزدهم میلادی است.

دنباله‌ی فیبوناتچی یک دنباله عددی است که دو جمله‌ی اول آن ۱ و هر جمله‌ی پس از آن‌ها مجموع دو جمله‌ی قبل است. به زبان نمادین، برای n های بزرگ‌تر یا مساوی دو

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

دنباله‌ی فیبوناتچی به طور اعجاب‌آوری در پدیده‌های طبیعی و مصنوعی ظاهر می‌شود. چگونگی تکثیر خرگوش‌ها در طبیعت مثال جالبی از دنباله‌های فیبوناتچی است. چگونگی زاد و ولد زنبور عسل نیز هم بر طبق قانون مندی این دنباله است. همان‌طور که می‌دانید، زنبور عسل نر تنها یک والد (مادر) دارد در حالی که زنبور عسل ماده، هم پدر و هم مادر دارد. در نتیجه شجره‌ی زنبور عسل نر الگوی عجیبی دارد. با این حال، تعداد زنبورها در نسل‌های متوالی تشکیل یک دنباله‌ی فیبوناتچی می‌دهند.^۱



تمرین ۲۱: جمله‌های دنباله‌ی فیبوناتچی دو در میان بر دو بخش پذیر است:

۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, ۸۹, ۱۴۴, ۲۳۳, ۳۷۷,

۶۱۰, ۹۸۷, ۱۵۹۷, ۲۵۸۴, ۴۱۸۱, ۶۷۶۵, ۱۰۹۴۶,

کدامین جمله‌ها بر اعداد زیر بخش پذیرند؟

الف) سه ؛

ب) پنج ؛

پ) هشت ؛

ت) سیزده ؛

ث) به نظر شما، کدامین جمله‌ها بر پنجاه و پنج بخش پذیر هستند؟

۱- علامت زنبور عسل نر و ♀ علامت زنبور عسل ماده است.

دنباله‌ی فیبوناتچی خواصّ جالبی دارد. به مجموع متوالی هشت جمله‌ی اول این دنباله توجه

کنید :

(جدول ۱۱)

مجموع جمله‌ها	حاصل جمع
$1+1$	$=2$
$1+1+2$	$=4$
$1+1+2+3$	$=7$
$1+1+2+3+5$	$=12$
$1+1+2+3+5+8$	$=20$
$1+1+2+3+5+8+13$	$=33$
$1+1+2+3+5+8+13+21$	$=54$

برای پیدا کردن الگوی به بررسی دقیق جدول می‌پردازیم تا ما را در پیدا کردن مجموع n جمله، بدون نیاز به محاسبه‌ی تکراری بالا، یاری کند. به همین منظور، جدول فوق را بازنویسی می‌کنیم و توسعه می‌دهیم تا شاید الگوی مناسب را پیدا کنیم (جدول ۱۲).

(جدول ۱۲)

مجموع جمله‌ها	حاصل جمع	الگوی پیشنهادی
$1+1$	2	$2 \times 1 + (1-1)$
$1+1+2$	4	$2 \times 2 + (1-1)$
$1+1+2+3$	7	$2 \times 3 + (2-1)$
$1+1+2+3+5$	12	$2 \times 5 + (3-1)$
$1+1+2+3+5+8$	20	$2 \times 8 + (5-1)$
$1+1+2+3+5+8+13$	33	$2 \times 13 + (8-1)$
$1+1+2+3+5+8+13+21$	54	$2 \times 21 + (13-1)$

با توجه به الگوی بالا و بدون محاسبه، مجموع ۱۲ جمله‌ی اول دنباله‌ی فیبوناتچی را حدس بزنید. سپس حدس خود را با محاسبه‌ی مجموع جمله‌ها به آزمایش بگذارید. آیا الگوی پیشنهادی تعمیم‌پذیر است؟

با توجه به الگوی فوق، مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی فیبوناتچی را برای $n = ۱$ حدس

می‌زنیم:

$$[۱ - \text{جمله‌ی } (n-1) \text{ اُم}] + (\text{جمله‌ی } n \text{ اُم}) \times ۲ = \text{مجموع } n \text{ جمله‌ی اول دنباله‌ی فیبوناتچی}$$

در این بخش، با جلوه‌هایی از نظم طبیعت در رابطه با رشد پدیده‌های طبیعی آشنا شدیم. دنباله‌ی فیبوناتچی ابزاری برای بیشتر شناختن قانونمندی بعضی از الگوهای رشد در طبیعت به ما می‌دهد. به عنوان مثال، ترتیب قرار گرفتن برگ‌های بسیاری از درختان بر روی ساقه‌هایشان به طرز جالبی با دنباله‌ی فیبوناتچی در رابطه هستند.



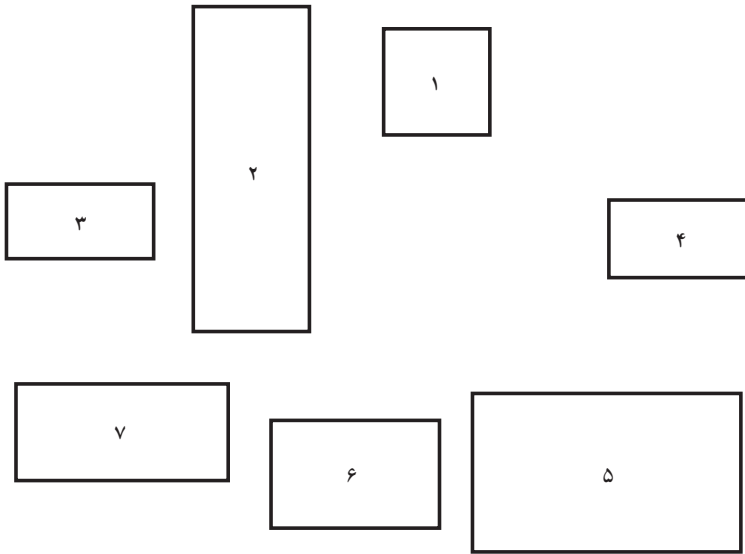
۸-۲ - نسبت طلایی

فعالیت ۲-۱۲

الف) به مستطیل‌های موجود نگاه کنید:

۱	۲	۳	۴	۵
---	---	---	---	---

کدام یک به چشم شما خوشایندتر می‌آید؟
 (ب) حال به مستطیل‌های زیر نگاه کنید :



کدام یک به نظر متناسب‌تر می‌آید؟

پ) ابعاد تمام مستطیل‌ها را در قسمت‌های (الف) و (ب) تا نزدیک‌ترین میلی‌متر ممکن اندازه بگیرید.

ت) نسبت طول به عرض هریک از مستطیل‌ها را پیدا کنید و نتیجه را یادداشت کنید.
 ث) چه رابطه‌ای بین خوشایندترین مستطیل‌ها در قسمت‌های قبل و نسبت به دست آمده می‌بینید؟

همان‌طور که در فعالیت ۲-۱۲ دیدید، نسبت طول به عرض مستطیل ۳ در قسمت (الف) و مستطیل ۵ در قسمت (ب) مساوی و تقریباً برابر با $1/618$ است. هنرمندان یونان قدیم احساس می‌کردند که مستطیل‌هایی با این نسبت ابعاد، به چشم خوشایندتر هستند و به همین دلیل، در خلق آثار هنری معروفی از جمله ساختمان پارتنون^۱ در آتن و مجسمه معروف آپولو^۲ در بلودیر^۳، از این نسبت استفاده شده است. به این نسبت، نسبت طلایی^۴ می‌گویند.

۱- Parthenon

۲- Apollo

۳- Belvedere

۴- Golden ratio



فعالیت ۲-۱۳

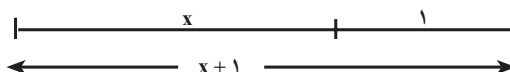
دنباله‌ی فیبوناتچی را تا ۲۰ جمله‌ی اول آن بنویسید و به کمک ماشین حساب نسبت بین هر دو جمله را در جدولی یادداشت کنید. آیا نظمی در نسبت‌های به دست آمده مشاهده کردید؟ نتیجه‌ی مشاهدات خود را توضیح دهید.

هم‌چنان که در فعالیت ۲-۱۳ دیدید، هرچه مرتبه‌ی جمله‌های دنباله‌ی فیبوناتچی بالاتر می‌رود، نسبت بین دو جمله‌ی دنباله به عدد $۱/۶۱۸$ نزدیک و نزدیکتر می‌شود که این همان نسبت طلایی است. در حالت کلی، اگر جمله‌ی n ام دنباله‌ی فیبوناتچی را با F_n نمایش دهیم، مشاهده می‌کنیم که با افزایش n ، نسبت هر دو جمله‌ی متوالی دنباله‌ی فیبوناتچی یعنی

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}$$

به نسبت طلایی یعنی $۱/۶۱۸$ ، نزدیک و نزدیکتر می‌شود. اقلیدس در کتاب پنجم اصول به این نسبت اشاره کرده است.

نسبت طلایی را از تقسیم یک پاره خط به دو قسمت به روش دیگری به دست می‌آوریم به طوری که نسبت طول تمام خط به قسمت بلندتر برابر با نسبت قسمت بلندتر به قسمت کوتاه‌تر می‌شود.



تساوی فوق را می‌توانیم به صورت جبری نیز نمایش دهیم:

$$\frac{\text{طول تمام پاره خط}}{\text{طول قسمت بلندتر}} = \frac{\text{طول قسمت بلندتر}}{\text{طول قسمت کوتاه‌تر}}$$

با توجه به نمودار ۱، مقادیر نسبت‌های فوق را جایگزین می‌کنیم

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$

رابطه‌ی فوق را برای x حل می‌کنیم

$$x^2 = x + 1,$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

یا

ریشه‌ی مثبت معادله برابر است با

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

مقدار تقریبی این عدد گنگ، همان نسبت طلایی است که تقریباً برابر با $1/618$ است.

یکی دیگر از نمایش‌های جالب توجه نسبت طلایی، کسری است که برای همیشه تکرار می‌شود:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

هنرمندان ایرانی نیز از نسبت طلایی در هنرهای سنتی از جمله خط نستعلیق و خط شکسته نستعلیق^۱ استفاده کرده‌اند. شما نیز در آفرینش کارهای هنری خود، این نسبت را فراموش نکنید!

مسائل

۱- به الگوی زیر توجه کنید:

$$1^2 + 1^2 = 2 = 1 \times 2$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = 2 \times 3$$

۱- «جوهره و ساختار هندسی خط نستعلیق»، نوشته‌ی جواد بختیاری

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 = 3 \times 5$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 40 = 5 \times 8$$

الف) دو سطر بعدی الگوی بالا را بنویسید؛

ب) با استفاده از الگوی فوق، مجموع مربع‌های ده جمله‌ی اول دنباله‌ی فیبوناتچی را بدون

محاسبه حدس بزنید.

۲- الگوی زیر را در نظر بگیرید:

$$1^3 + 2^3 - 1^3 = 8$$

$$2^3 + 3^3 - 1^3 = 34$$

$$3^3 + 5^3 - 2^3 = \square$$

$$5^3 + 8^3 - 3^3 = \square$$

الف) جاهای خالی را در الگوی بالا پر کنید؛

ب) دو سطر بعدی الگو را بنویسید؛

پ) متوجه چه نظمی شدید؟ توضیح دهید.

مجله‌ی ریاضی

یکی از مشهورترین مسائل حل نشده‌ی ریاضی، آخرین قضیه‌ی فرما^۱ بوده است. این قضیه درباره‌ی معادله‌ای به شکل $x^n + y^n = z^n$ است که در آن x, y, z, n اعداد طبیعی با فرض $xyz \neq 0$ هستند. مثال‌های زیر نمونه‌هایی از چنین معادله‌ای هستند:

$$۳^۲ + ۴^۲ = ۵^۲, \quad ۵^۲ + ۱۲^۲ = ۱۳^۲, \quad ۲۰^۲ + ۲۱^۲ = ۲۹^۲$$

پی‌یر فرما، ریاضیدان معروف فرانسوی در قرن هفدهم میلادی، در حاشیه‌ی یکی از کتاب‌هایش یادداشتی نوشت حاکی از این که معادله‌هایی به این شکل فقط برای $n=1$ و ۲ دارای جواب هستند. فرما در



یادداشت‌هایش یادآور شد که برای این قضیه اثباتی کشف کرده است اما حاشیه‌ی کتاب باریک است و جای نوشتن اثبات را ندارد! طی سالیان متمادی، ریاضیدان‌های برجسته‌ای برای اثبات این قضیه تلاش کرده‌اند. هرچند وقت یک بار، جامعه‌ی ریاضی امیدوار از حل این مسئله، نتایجی را اعلام می‌کرد ولی پس از مدت کوتاهی، متوجه نارسا بودن اثبات می‌شد. بالاخره، در سال ۱۹۹۴، آندره وایلز^۲ استاد ریاضی دانشگاه پرینستون آمریکا موفق به ارائه‌ی اثبات درست و کامل این قضیه شد و این تلاش ۳۰۰ ساله به نتیجه رسید.

۱_ Fermat's last theorem

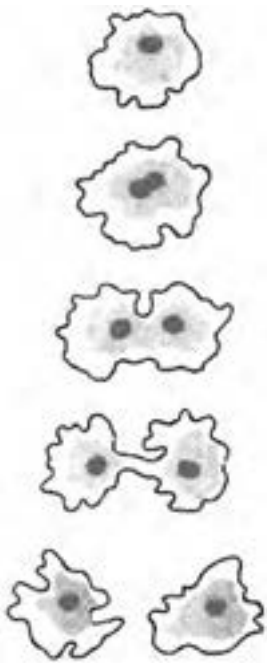
۲_ Andrew Wiles

لگاریتم

اختراع لگاریتم در دنیا، یک شگفتی کامل بود. هیچ‌یک از کارهای قبلی به اختراع آن کمک نکرده بود و هیچ‌یک از آن‌ها ورودش را پیش بینی نکرده بودند. لگاریتم به تنهایی افکار انسان را ناگهان متوجه خود کرد بدون آن‌که از کارهای دیگر اندیشمندان بهره بگیرد و یا آن‌که مسیرهای شناخته شده‌ی تفکر ریاضی را دنبال کند. لورد مولتون^۱، ۱۹۱۵

۳-۱- پیدایش

روش تکثیر آمیب‌ها بسیار جالب است. زمانی که یک سلول آمیب به اندازه‌ی مشخصی می‌رسد، به دو نیم تقسیم می‌شود، سپس حدوداً یک روز طول می‌کشد تا دو آمیب به وجود آمده به اندازه‌ی رشد کنند که باز تقسیم شوند و تبدیل به چهار آمیب گردند و به همین ترتیب تعداد آن‌ها مرتب افزایش می‌یابد.



این نحوه‌ی افزایش از این جهت جالب است که آمیب‌ها با نصف شدن تکثیر می‌شوند! تعداد آمیب‌ها در پایان هفته از جدول (۱) به دست می‌آید که بستگی به زمان دارد. با دقت در این جدول می‌بینیم که سطر دوم (تعداد آمیب‌ها) یک دنباله‌ی توانی است، یعنی یک دنباله‌ی هندسی که هر جمله‌ی آن دو برابر جمله‌ی قبلی است. با این حال، سطر اول (زمان) یک دنباله‌ی حسابی است که در آن هر جمله یکی بیشتر از جمله‌ی قبلی است. نکته‌ی جالبی به وسیله‌ی جان‌نپر ریاضیدان اسکاتلندی در اوایل قرن هفدهم در

۱- Lord Moulton

جدول (۱)

روز زمان	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...
تعداد آمیب‌ها	۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	...

مورد این دو دنباله مطرح شد. اگر دو عدد ۴ و ۱۶ از سطر پایین را در نظر بگیریم، حاصل ضرب آن‌ها جمله‌ی دیگری از دنباله‌ی هندسی سطر دوم خواهد بود، یعنی

$$16 \times 4 = 64$$

که جمله‌های متناظر این اعداد در دنباله‌ی حسابی سطر اول به ترتیب ۲، ۴ و ۶ هستند و این همان نکته‌ی جالب است.

جدول (۲)

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	...
۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲	۱۰۲۴	...

یعنی حاصل ضرب اعداد دنباله‌ی هندسی با حاصل جمع اعداد دنباله‌ی حسابی متناظر است. حال حاصل ضرب چند عدد دیگر را در نظر می‌گیریم و نتیجه را مشاهده می‌کنیم. مثال ۱: برای پیدا کردن حاصل ضرب $10 \times 24 = 240$ ، اعداد متناظر ۸ و ۱۲۸ را در سطر اول پیدا می‌کنیم. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، ۳ متناظر با ۸ و ۷ متناظر با ۱۲۸ است و

$$128 \times 3 = 384$$

که 10×24 با عدد ۱۰ در دنباله‌ی اولی متناظر است. دقت کنید که ۱۰ همان $10 + 0$ است. حال نتایج به دست آمده را کلی‌تر بیان می‌کنیم.

ضرب در دنباله‌ی دوم با جمع در دنباله‌ی اول متناظر است.

با توجه به آنچه گذشت، می‌بینیم که اگر نخواهیم ضرب کنیم، می‌توانیم به جای آن با استفاده از دنباله‌ی سطر اول جمع کنیم. اعداد دنباله‌ی حسابی ردیف اول، لگاریتم اعداد نظیرشان در دنباله‌ی ردیف دوم هستند.

جدول (۳)

لگاریتم: x ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ...

اعداد: y ۱ ۲ ۴ ۸ ۱۶ ۳۲ ۶۴ ۱۲۸ ۲۵۶ ۵۱۲ ۱۰۲۴ ...

اعداد دنباله‌ی هندسی را می‌توانیم به صورت توان‌هایی از ۲ بنویسیم:

لگاریتم: x ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ...

اعداد: y ۲^۰ ۲^۱ ۲^۲ ۲^۳ ۲^۴ ۲^۵ ۲^۶ ۲^۷ ۲^۸ ۲^۹ ۲^{۱۰}

در واقع اعداد دنباله‌ی هندسی بالا، برابر با ۲ به توان‌های اعداد دنباله‌ی حسابی فوق هستند،

یعنی

$$y = 2^x \quad x = \log_2 y$$

و یا به بیانی دیگر، جمله‌های دنباله‌ی حسابی، لگاریتم جمله‌های متناظر خود در دنباله‌ی توان‌های دو (هندسی) هستند. یعنی y نماینده‌ی عدد در دنباله‌ی هندسی و x معرف لگاریتم آن در مبنای ۲ است.

مثال ۲:

$$\begin{array}{rcccccc} \text{اعداد} & ۱۶ & \times & ۳۲ & = & ۵۱۲ \\ & ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ & \times & ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ & = & ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \\ \text{لگاریتم} & ۴ & + & ۵ & = & ۹ \end{array}$$

فعالیت ۳-۱

با استفاده از ماشین حساب، جدول لگاریتم در مبنای ۲ را تا ۲^{۲۶} ادامه دهید. سپس به

سؤالات زیر پاسخ دهید:

حاصل ضرب‌های زیر را با مراجعه به جدول پیدا کنید. یک رابطه‌ی جمع نشان دهید که

حاصل را بدون ضرب کردن به دست دهد.

(الف) ۱۲۸×۲۵۶ :

(ب) ۱۰۲۴×۲۰۴۸ :

$$\text{پ) } 32 \times 131072 ;$$

$$\text{ت) } 16 \times 512 \times 4096 ;$$

از لگاریتم‌ها می‌توان برای به توان رساندن اعداد نیز استفاده کرد.

مثال ۳: باز هم دنباله‌ی توان‌های ۲ را در نظر بگیرید و به نمونه زیر توجه کنید:

$$\text{اعداد: } 32 \times 32 \times 32 \times 32 = (32)^4 = 1048576$$

.

$$\text{لگاریتم: } 5 + 5 + 5 + 5 = 4 \times 5 = 20$$

تمرین ۱: با استفاده از روش فوق و جدولی که خود تهیه کرده‌اید، حاصل

عبارت‌های زیر را به دست آورید:

$$\text{الف) } (256)^3 ;$$

$$\text{ب) } (64)^5 ;$$

$$\text{پ) } (1024) ;$$

لگاریتم y در پایه‌ی ۲ عددی است که باید ۲ را به آن توان برسانیم تا y حاصل شود. یعنی تساوی یا معادله‌ی توانی را می‌توان به کمک لگاریتم تغییر شکل داد.

مثال ۴: اگر $2^x = 32$ ، مقدار x را با توجه به تعریف لگاریتم پیدا کنید.

حل: با توجه به تعریف لگاریتم،

$$2^x = 32 \quad x = \log_2 32$$

با مراجعه به جدول (۳)، مقدار x برابر با ۵ است. در واقع،

$$2^x = 2^5$$

و چون پایه‌ها مساوی هستند پس نماها باهم برابرند یعنی $x = 5$.

جدول (۳) را می‌توان برای توان‌های هر عدد دیگری تهیه کرد و لگاریتم اعداد را در مبنای

(پایه‌های) مختلف حساب نمود. جدول (۴) لگاریتم اعداد در مبنای ۵ را نشان می‌دهد:

جدول (۴)

لگاریتم: x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	...
اعداد: y	۱	۵	۲۵	۱۲۵	۶۲۵	۳۱۲۵	...

اعداد دنباله‌ی هندسی را می‌توانیم به صورت توان‌هایی از ۵ بنویسیم:

لگاریتم: x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	...
اعداد: y	۵ ^۰	۵ ^۱	۵ ^۲	۵ ^۳	۵ ^۴	۵ ^۵	...

که اعداد دنباله‌ی هندسی بالا، برابر با ۵ به توان‌های اعداد دنباله‌ی حسابی فوق هستند یعنی

$$y = 5^x \quad x = \log_5 y$$

مثال ۵: با توجه به جدول (۴)، $5^3 = 125$ که معادل است با:

$$\log_5 125 = 3$$

به طور کلی، لگاریتم y در پایه‌ی b ، عددی است که b باید به توان آن عدد برسد تا y حاصل شود:

$$\log_b y = x \quad b^x = y \quad ; \quad y > 0, \quad b > 0, \quad b \neq 1$$

تمرین

۱- تساوی‌های نمایی (توانی) را با استفاده از تعریف لگاریتم تغییر شکل دهید.

(الف) $11^2 = 121$ (ب) $2^{10} = 1024$

(پ) $5^x = 625$ (ت) $0/5^y = 0/25$

(ث) $10^{-3} = 0/001$ (ج) $a^y = 1000$

(ج) $p^r = q$ (ح) $7^3 = 343$

(خ) $8^x = 4096$

۲- تساوی‌های زیر را به شکل نمایی (توانی) تبدیل کنید.

(الف) $3 = \log_6 216$ (ب) $0 = \log_4 1$

(پ) $-2 = \log_{10} 0/01$ (ت) $y = \log_2 8$

$$y = \log_b a \quad (\text{ج}) \qquad 5 = \log_5 3125 \quad (\text{ث})$$

۳- پایه‌ی (مبنا) لگاریتم‌های زیر را پیدا کنید.

$$\log_{\square} 36 = 2 \quad (\text{ب}) \qquad \log_{\square} 8 = 3 \quad (\text{الف})$$

$$\log_{\square} 25 = -2 \quad (\text{ت}) \qquad \log_{\square} 1 = -1 \quad (\text{پ})$$

$$\log_{\square} 1 = 0 \quad (\text{ج}) \qquad \log_{\square} 1 = 1 \quad (\text{ث})$$

۴- عددی را که لگاریتم آن داده شده است، پیدا کنید.

$$\log_4 \square = 4 \quad (\text{ب}) \qquad \log_{16} \square = 2 \quad (\text{الف})$$

$$\log_{10} \square = 9 \quad (\text{ت}) \qquad \log_3 \square = -1 \quad (\text{پ})$$

$$\log_5 \square = 4 \quad (\text{ج}) \qquad \log_{11} \square = 3 \quad (\text{ث})$$

۵- تساوی‌نمایی معادله‌های زیر را بنویسید و سپس مقدار y را تعیین کنید.

$$y = \log_{25} 625 \quad (\text{ب}) \qquad y = \log_2 64 \quad (\text{الف})$$

$$y = \log_3 81 \quad (\text{ت}) \qquad y = \log_{10} 10000 \quad (\text{پ})$$

۶- هریک از لگاریتم‌های زیر را تعیین کنید.

$$\log_{13} 169 = \square \quad (\text{ب}) \qquad \log_2 256 = \square \quad (\text{الف})$$

$$\log_9 59049 = \square \quad (\text{ت}) \qquad \log_{10} 1 = \square \quad (\text{پ})$$

$$\log_3 243 = \square \quad (\text{ج}) \qquad \log_7 343 = \square \quad (\text{ث})$$

۳-۲- لگاریتم اعشاری

با توجه به این که دستگاه شمارش ما دهدهی (اعشاری) است، جدول لگاریتم در مبنای 10 بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. در نتیجه تکیه این بخش بر لگاریتم اعشاری است.

x لگاریتم: ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ...

y اعداد: ۱۰^۰ ۱۰^۱ ۱۰^۲ ۱۰^۳ ۱۰^۴ ۱۰^۵ ۱۰^۶ ۱۰^۷ ۱۰^۸ ۱۰^۹ ۱۰^{۱۰} ...

که رابطه‌ی $y = 10^x$ با توجه به این دو دنباله نوشته می‌شود.

y معرّف یک عدد و x معرف لگاریتم اعشاری (لگاریتم در مبنای 10) آن است. بین لگاریتم در مبنای 10 و دستگاه شمارش اعشاری ارتباط صریحی وجود دارد. مثلاً لگاریتم $1,000,000,000$ برابر با 9 است زیرا $10^9 = 1,000,000,000$ در ضمن، می‌دانیم که تعداد صفرهای حاصل ضرب دو

عددی که به صورت توان‌های ده هستند برابر تعداد صفرهای دو عدد است و نیاز به استفاده از لگاریتم‌ها برای محاسبه‌ی چنین حاصل ضرب‌هایی نیست. با این حال ارزش جدول بالا وقتی بارز می‌شود که اعداد، توان‌های صحیح ده نباشند. در این صورت، باید بتوانیم فاصله‌های خالی اعداد از 10^0 تا 10^1 را در ردیف سوم جدول (۵) پر کنیم.

جدول (۵)

لگاریتم: x	°	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱
اعداد: y	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	10^1
اعداد: y	10^0	$10^?$	$10^?$	$10^?$	$10^?$	$10^?$	$10^?$	$10^?$	$10^?$	10^1

با توجه به تعریف، لگاریتم‌های توان‌های صحیح 10^0 همان توان‌های صحیح 10^0 هستند. در نتیجه با توجه به روش نوشتن اعداد به صورت نماد علمی یعنی $a \times 10^n$ با شرط $10^0 < a < 10^1$ ، فقط به لگاریتم‌های اعداد بین ۱ و 10^1 نیاز داریم که این اعداد، همان توان‌های کسری 10^0 هستند.

۱-۲-۳- برای رسیدن به لگاریتم اعشاری: یک الگوریتم

۱- یک عدد کوچک مثلاً 10^1 را انتخاب می‌کنیم که از یک بزرگ‌تر باشد اما نه خیلی بزرگ‌تر! و لیستی از توان‌های آن تهیه می‌کنیم:

$$1, 2, 3, \dots, 24, 25, \dots$$

اگر بخواهیم دو عدد a و b را در هم ضرب کنیم، هر کدام از آن‌ها را با یکی از توان‌های تقریب می‌زنیم. (نماد تقریباً است)

مثال ۶: اگر $a = 10^8$ و $b = 10^7$ ، آنگاه

$$a \cdot b = 10^8 \times 10^7 = 10^{8+7} = 10^{15}$$

که می‌توانیم برای پیدا کردن آن، به لیستی که تهیه کرده‌ایم، مراجعه کنیم.

مثال ۷: با توجه به مقادیر a و b در مثال ۶ $\frac{a}{b}$ را پیدا می‌کنیم

$$\frac{a}{b} = \frac{10^8}{10^7} = 10^{8-7} = 10^1$$

۱- اولین حرف الفبای یونانی که آلفا تلفظ می‌شود.

مثال ۸: با توجه به مقدار a در مثال ۶، a^{2° را به دست می آوریم

$$a^{2^\circ} \cdot (1^\circ)^{2^\circ} = 34^\circ$$

۲- برای هماهنگی این ایده با نماد معمولی اعشار، . را یک توان کسری از 1° انتخاب

می کنیم.

مثال ۹: . را $10^{\frac{1}{32}}$ انتخاب می کنیم (چرا؟). پس فقط به لیستی شامل

$2^\circ, 3^\circ, \dots, 31^\circ$ نیاز داریم، زیرا $1^\circ = 32^\circ$. و ضرب اعداد در 1° و یا تقسیم آن ها بر 1°

تنها با اضافه یا کم کردن صفر و یا حرکت دادن ممیز اعشاری انجام می گیرد. به عنوان مثال،

$$3000 \cdot 10000 = 0/3 \text{ و } 3000 \cdot 10 = 30, \quad 3000 \times 10 = 30000$$

با این کار، می توانیم فاصله ی خالی بین 1° و 10^1 را در جدول (۵) پر کنیم.

فعالیت ۳-۲

$$. \quad 32 = (10^{\frac{1}{32}})^{32} = ?$$

و

$$. \quad 16 = (10^{\frac{1}{32}})^{16} = ?$$

۳- برای به دست آوردن اعدادی که بین نقاط به دست آمده توسط خودمان قرار می گیرند، یا

از ماشین حساب معمولی استفاده می کنیم و یا مقدار تقریبی آن ها را از روی نمودار به دست

می آوریم. عدد 10^1 را در ماشین حساب وارد می کنیم و سپس با پنج بار فشار دادن دکمه ی $\sqrt{\quad}$

$10^{\frac{1}{32}}$ را پیدا می کنیم زیرا

$$\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}} = 3/162$$

$$\sqrt{\sqrt{1^{\circ}}} = \dots 1^{\circ \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = 1^{\circ \frac{1}{4}} \quad \text{یا} \quad \sqrt{1^{\circ \frac{1}{2}}} = 1^{\circ \frac{1}{4}} = 1/778$$

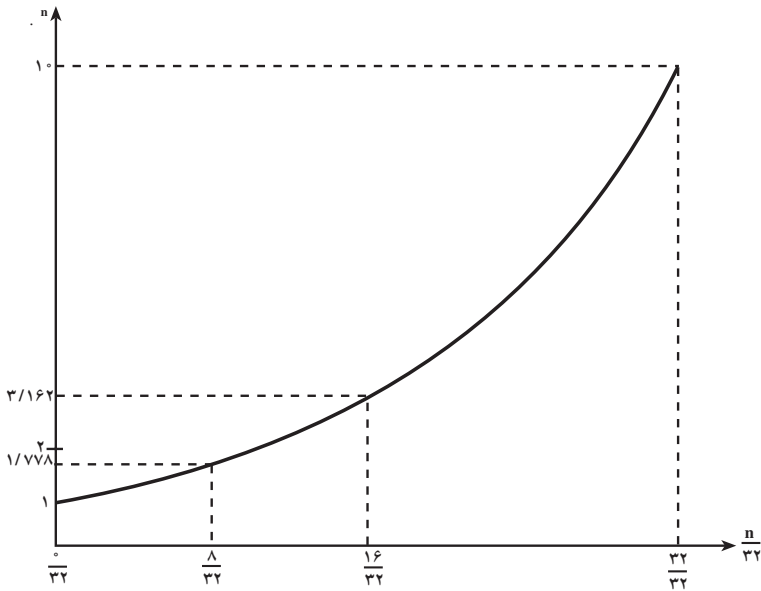
$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{1^{\circ}}}} = \dots 1^{\circ \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = ?$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{1^{\circ}}}}} = \dots 1^{\circ \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = ?$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{1^{\circ}}}}}} = \dots 1^{\circ \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = ?$$

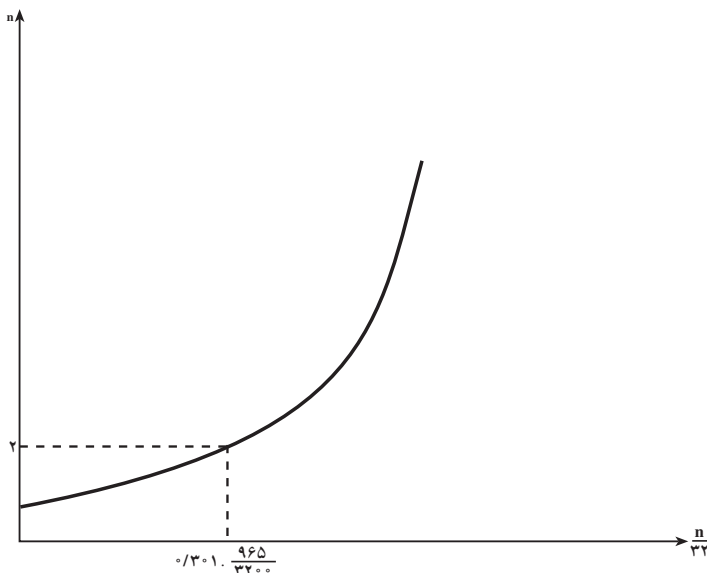
با این اطلاعات، منحنی را رسم می‌کنیم. سپس با توجه به مقدار توان‌های کسری 1° ، مقادیر

می‌آوریم. برای خلاصه‌نویسی، توان‌های 2 تا 32 را به وسیله‌ی ماشین حساب به دست می‌آوریم. برای خلاصه‌نویسی، توان‌های n را می‌نامیم و برای $32 < n$. جدول را تا سه رقم اعشار تکمیل می‌کنیم.



مثال ۱۰: برای به دست آوردن لگاریتم ۲، مقدار ۲ را روی محور y ها پیدا می کنیم. آنگاه خطی موازی محور افقی رسم می کنیم تا نمودار را قطع نماید. سپس از نقطه‌ی تلاقی خطی به موازات محور عمودی رسم می کنیم تا محور x ها یعنی محور لگاریتم‌ها را در نقطه‌ای قطع کند. نقطه تلاقی با محور x ها همان لگاریتم ۲ یعنی $\frac{965}{3200}$ است که برابر $0/301$ است:

$$\log 2 = 0/301$$



در واقع، در مثال 10° با مراجعه به جدول (۶)، مقدار $\log 2$ را با تقریب مطلوبی به دست آوردیم. یعنی، مقدار ۲ را در ستون n . جستجو کردیم. مقدار ۲ بین $1/911$ و $2/53$ و لگاریتم‌های معادل آن‌ها بین $9/33$ و $10/33$ بود. با این حال، چون ۲ نزدیک‌تر به $2/53$ بود، در نتیجه مقدار لگاریتم آن‌ها نیز به $9/33$ نزدیک‌تر بود. با چند بار آزمایش کردن، تقریب خوبی برای لگاریتم ۲ که همان $0/301$ است به دست آوردیم. به همین ترتیب لگاریتم‌های ۳ الی ۹ را نیز به دست می‌آوریم، یعنی اعداد ۲ تا ۹ را برحسب توان‌های کسری 10° می‌نویسیم:

اعداد: y	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
اعداد: 10°	10°	$10^\circ/301$	$10^\circ/477$	$10^\circ/602$	$10^\circ/698$	$10^\circ/778$	$10^\circ/845$	$10^\circ/903$	$10^\circ/954$
لگاریتم: x	$0/301$	$0/477$	$0/602$	$0/698$	$0/778$	$0/845$	$0/903$	$0/954$	

۳-۳- لگاریتم و نماد علمی

برتری لگاریتم اعشاری نسبت به لگاریتم در مبنای مختلف ارتباط نزدیک آن با شیوه‌ی نوشتن اعداد به شکل نماد علمی است. جدول زیر با توجه به این ارتباط تهیه شده است که در آن ۲ به صورت توان کسری $10^\circ/301$ یعنی $10^\circ/301$ نوشته شده است.

جدول (۷)

اعداد به شکل اعشاری	اعداد به شکل نماد علمی	اعداد به صورت توان‌های کسری 10°		لگاریتم تقریبی اعداد
۲۰	2×10^1	$10^\circ/301 \times 10^1$	$10^\circ/301$	$1/301$
۲۰۰	2×10^2	$10^\circ/301 \times 10^2$	$10^\circ/301$	$2/301$
۲۰۰۰	2×10^3	$10^\circ/301 \times 10^3$	$10^\circ/301$	$3/301$
۲۰۰۰۰	2×10^4	$10^\circ/301 \times 10^4$	$10^\circ/301$	$4/301$

در صورت استفاده از ماشین حساب به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

نمایش دهنده	ترتیب عملیات
$4/301$	20000
	log

فعالیت ۳-۳

الف - با توجه به صفحه قبل، لگاریتم‌های زیر را به دست آورید.

$$۱- ۲,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰$$

$$۲- ۲ \times 10^{17}$$

جدول (۸)

اعداد به شکل اعشاری	اعداد به شکل نماد علمی	اعداد به صورت توان‌های کسری ۱۰		لگاریتم اعداد
۵,۰۰۰	5×10^4	$10^{0/699} \times 10^4$	$10^{4/699}$	$4/699$
۵۰۰,۰۰۰	5×10^5	$10^{0/699} \times 10^5$	$10^{5/699}$	$5/699$
۵,۰۰۰,۰۰۰	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
۵۰,۰۰۰,۰۰۰	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

ب - با توجه به جدول (۸) به قسمت‌های ۱، ۲ و ۳ پاسخ دهید:

۱- جدول (۸) را کامل کنید؛

۲- چه عددی دارای لگاریتم $17/699$ است؟

۳- چه عددی دارای لگاریتم $28/699$ است؟

تمرین ۳: جدول (۹) را با مراجعه به جدول (۶) یا مستقیماً به وسیله ماشین حساب کامل

کنید:

اگر لگاریتم عدد را داشته باشیم و بخواهیم خود عدد را به وسیله ماشین حساب پیدا کنیم،

به ترتیب زیر عمل می‌نماییم:

نمایش	ترتیب عملیات
$7/998$	$0/9031$ <input type="text" value="INV"/> <input type="text" value="log"/>

۱- Inverse به معنای معکوس تابع است.

در بعضی ماشین حساب‌ها، به جای دکمه‌ی INV از دکمه‌ی $2ndF$ استفاده می‌کنند.

جدول (۹)

اعداد به شکل اعشاری	اعداد به شکل نماد علمی	اعداد به صورت توان‌های کسری ۱۰°		لگاریتم اعداد
۱۲۱,۰۰۰	$۱/۲۱ \times ۱۰^5$	$۱۰^{-۰/۰۸۲} \times ۱۰^5$	$۱۰^{۰/۰۸۲}$	$۵/۰۸۲$
۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	$۳/۵ \times ۱۰^1$	$۱۰^{-۰/۵۴۴} \times ۱۰^1$	$۱۰^{۰/۵۴۴}$	$۱/۵۴۴$
<input type="checkbox"/>	۴×۱۰^0	$۱۰^{-۰/۶۰۲} \times ۱۰^0$	$۱۰^{۰/۶۰۲}$	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$۲/۹۰۳$
<input type="checkbox"/>	$۰.۶/۰۲ \times ۱۰^{۰۲۳}$	$۱۰^{-۰/۷۷۸} \times ۱۰^{۰۲۳}$	$۱۰^{۰.۲۳/۷۷۸}$	$۲۳/۷۷۸$

* این عدد به نام عدد آواگادرو معروف است که در شیمی استفاده‌ی زیادی دارد. عدد آواگادرو تعداد مولکول‌ها در ۱۸ گرم آب یا یک مولکول از هر ماده است.

با توجه به مثال‌ها و تمرین‌های بالا، دیدیم که با وجود نماد علمی و با به‌دست آوردن توان‌های اعشاری ۱۰° یعنی با پرکردن فاصله‌ی بین ۱۰° تا ۱۰^1 جدول (۶) می‌توانیم لگاریتم تمام اعداد را به‌دست آوریم. قسمت صحیح لگاریتم، توان‌های ده‌اعدادی هستند که به شکل نماد علمی نوشته شده‌اند. قسمت کسری لگاریتم را می‌توان با مراجعه به جدول (که طریق به‌دست آوردن آن را دیدیم) پیدا کنیم. در ضمن چون قسمت غیرتوانی نماد علمی همیشه کمتر از ۱۰° است، در نتیجه به جدول لگاریتم برای اعداد بزرگ‌تر از ۱۰° نیازی نداریم.

۳-۵- اثبات روابط لگاریتمی

بنابر تعریف لگاریتم

$$10^x = y \quad x = \log_{10} y$$

اثبات قضیه‌ی حاصل ضرب را قبلاً به طور تجربی در تمرین ۲ و در جدول‌های (۸) و (۹) دیدیم. حال با استفاده از تعریف لگاریتم که درستی آن را پذیرفته‌ایم، به وسیله‌ی استدلال استنتاجی، قضیه‌ی حاصل ضرب را به طور دقیق اثبات می‌کنیم.

قضیه‌ی ۱: برای هر دو عدد حقیقی و مثبت a و b ,

$$\log_{10} ab = \log_{10} a + \log_{10} b$$

اثبات: اگر $\log_{10} a = x_1$ و $\log_{10} b = x_2$ آنگاه:

$$a = 10^{x_1} \quad (1) \quad \text{و} \quad b = 10^{x_2} \quad (2)$$

از ضرب دو رابطه‌ی (۱) و (۲) به دست می‌آوریم:

$$ab = 10^{x_1} \times 10^{x_2} = 10^{x_1 + x_2}$$

با توجه به تعریف لگاریتم

$$\log_{10} ab = x_1 + x_2$$

از رابطه‌ی (۱) و (۲) مقادیر x_1 و x_2 را جایگزین می‌کنیم

$$\log ab = \log a + \log b$$

و حکم ثابت می‌شود.

قضیه‌ی ۲: نشان دهید که برای $a > 0$ ، $\log a^n = n \log a$.

اثبات: این قضیه در واقع تعمیم قضیه‌ی ۱ است زیرا:

$$\log a^n = \log \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ بار}} = \underbrace{\log a + \log a + \dots + \log a}_n$$

در نتیجه

$$\log a^n = n \log a$$

تمرین ۴: با استفاده از استقرای ریاضی، قضیه‌ی ۲ را اثبات کنید.

تمرین ۵: ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی و مثبت a و b ,

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

۱- این قضیه برای هر دو عدد حقیقی برقرار است اما در این جا اثبات محدود به توان‌های صحیح مثبت است.

مثال ۱۰: با استفاده از قضیه‌ی ۱، مقدار $\log 5 + \log 20$ را محاسبه می‌کنیم.

حل: $\log a + \log b = \log ab$

پس $\log 5 + \log 20 = \log 5 \times 20 = \log 100 = 2$

تمرین ۶: به طور کلی، قضیه‌های ۱ و ۲ برای لگاریتم در هر مبنایی درست است. دلیل درستی را بررسی کنید.

سه قضیه‌ی زیر، محاسبات با لگاریتم را آسان می‌کنند.

قضیه‌ی ۳: $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$

قضیه‌ی ۴: $\log_c a^n = n \log_c a$

قضیه‌ی ۵: $\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$

مثال ۱۱: با استفاده از سه قضیه‌ی فوق، رابطه‌ی $\log\left(\frac{x^2 y}{z}\right)$ را تبدیل کنید.

حل:

طبق قضیه‌ی ۳ داریم

(۱) $\log\left(\frac{x^2 y}{z}\right) = \log(x^2 y) - \log z$

طبق قضیه‌ی ۱

(۲) $\log(x^2 y) = \log x^2 + \log y$

طبق قضیه‌ی ۲

(۳) $\log x^2 = 2 \log x$

با جایگزینی (۳) و (۲) در (۱) نتیجه می‌شود که

$\log\left(\frac{x^2 y}{z}\right) = 2 \log x + \log y - \log z$

مثال ۱۲: عبارت $\log(\sqrt[3]{a} \sqrt{b})$ را تبدیل کنید.

حل:

$\log(\sqrt[3]{a} \sqrt{b}) = \log(a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}})$

طبق قضیه‌ی ۱: $= \log a^{\frac{1}{3}} + \log b^{\frac{1}{2}}$

طبق قضیه‌ی ۲: $= \frac{1}{3} \log a + \frac{1}{2} \log b$

مثال ۱۳: لگاریتم‌های زیر را به یک لگاریتم تبدیل کنید:

$$A = \log \sqrt{P} - \log \sqrt{4P} + \log\left(\frac{1}{4} P^2\right) + \log 4$$

$$A = \log\left(\frac{\sqrt{P} \cdot \frac{1}{4} P^2 \cdot 4}{\sqrt{4P}}\right) \quad \text{حل: طبق قضیه ی ۳}$$

$$A = \log\left(\frac{P^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4} P^2 \cdot 4}{2P^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$A = \log\left(\frac{1}{4} P^2 \cdot 4\right)$$

$$A = \log P^2$$

مثال ۱۴: معادله‌ی زیر را با شرط $q > 0$ و برای x حل کنید:

$$\log x - \frac{1}{4} \log(pq) = -\frac{1}{4} \log(p/q)$$

$$\log x - \frac{1}{4} \log p - \frac{1}{4} \log q = -\frac{1}{4} \log p + \frac{1}{4} \log q \quad \text{حل:}$$

$$\log x = \frac{1}{4} \log q + \frac{1}{4} \log q = \log q$$

در نتیجه

$$x = q$$

به دلیل راحت‌تر بودن محاسبات با لگاریتم اعشاری (دهدهی) می‌توانیم لگاریتم در مبنای ۱۰ بکنیم. دیگر را تبدیل به لگاریتم اعشاری (لگاریتم در مبنای ۱۰) بکنیم.

$$\text{قضیه ی ۶: اگر } x > 0 \text{ آنگاه } \log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

اثبات: $\log_a x$ را مساوی y قرار می‌دهیم

$$\log_a x = y \quad (۴)$$

$$a^y = x$$

طبق تعریف لگاریتم اگر $a = b$ آنگاه $\log a = \log b$ در نتیجه

$$\log(a^y) = \log x$$

$$y \log a = \log x \quad (5)$$

چون به دنبال $y = \log_a x$ هستیم، پس (5) را بر حسب y می نویسیم

$$y = \frac{\log x}{\log a}$$

و از (4) مقدار y را جایگزین می کنیم

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

و اثبات کامل می شود.

مثال 15: $\log_3 17 = \frac{\log 17}{\log 3}$. با استفاده از ماشین حساب، این مقدار را محاسبه می کنیم:

نمایش	ترتیب عملیات
$2/578$	$17 \log \div 3 \log =$

مسائل

1- با استفاده از سه قضیه ی 3، 4 و 5، عبارات زیر را تبدیل کنید:

$$\log(a^3 b^5) \quad \text{(الف)}$$

$$\log[(a+b)(a-b)] \quad \text{(ب)}$$

$$\log(mr^{-2}) \quad \text{(پ)}$$

$$\log\left(\frac{1}{a^2 b^3 c^4}\right) \quad \text{(ت)}$$

$$\log \sqrt[3]{\frac{a^2 b}{c^2}} \quad \text{(ث)}$$

$$\log(\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{b}\sqrt[5]{c}) \quad \text{ج}$$

$$\log\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{b}\sqrt[4]{a^3}}\right) \quad \text{ج}$$

$$\log\left(\frac{a^2}{b^2c}\right) \quad \text{ح}$$

۲- به یک لگاریتم تبدیل کنید :

$$5 \log a - 2 \log b + 3 \log c \quad \text{الف}$$

$$\frac{1}{4} \log(ab) - \frac{3}{5} \log(a^2b) \quad \text{ب}$$

$$2 \log(x+y) - 3 \log(x-y) \quad \text{پ}$$

$$\log pq - \log 2q \quad \text{ت}$$

۳- معادلات لگاریتمی زیر را برای متغیر x حل کنید :

$$\log 27 = 3 \log x \quad \text{الف}$$

$$\log x + 2 \log 4 = 2 \log 12 \quad \text{ب}$$

$$\log(p-q) = \log(p^2 - q^2) - \frac{1}{4} \log x \quad \text{پ}$$

۳-۶ کاربردهای لگاریتم: مقیاس سنجش زلزله و صدا

در سال ۱۳۶۹، زلزله‌ی شدیدی در شهر رودبار ایران به وقوع پیوست که متأسفانه باعث تلفات جانی بسیاری شد. مرکز زلزله شناسی دانشگاه تهران، شدت زلزله را بین ۷/۲ تا ۷/۶ ریشتر اعلام کرد.

اصولاً وقتی که رسانه‌ها خبر وقوع زلزله‌هایی با قدرت بیش از ۵ ریشتر را گزارش می‌کنند،

مردم هراسان شده، نگران تلفات احتمالی آن می‌گردند. این در حالی است که اخبار وقوع زلزله‌هایی با قدرت ۳/۵ الی ۴ ریشتر خیلی نگران‌کننده نیستند، زیرا قدرت تخریبی آن‌ها پایین است. چرا؟ چگونه اختلاف بین ۳/۵ تا ۷/۲ باعث بالا بردن قدرت تخریب تا این اندازه می‌شود؟ به طور طبیعی، این سؤال پیش می‌آید که واحد سنجش شدت زلزله چه ماهیتی دارد که افزایش چند واحد آن این‌گونه قدرت تخریب را بالا می‌برد؟

جالب است بدانید که مقیاس ریشتر که برای تعیین شدت زلزله به کار برده می‌شود، بیانگر این است که با افزایش هر واحد ریشتر، قدرت تخریب ده برابر می‌شود. به عنوان مثال، زلزله‌ای با قدرت ۶ ریشتر ده بار شدیدتر از زلزله‌ای با قدرت ۵ ریشتر و ۱۰۰ بار شدیدتر از زلزله‌ای با قدرت ۴ ریشتر است.

فعالیت ۳-۴

الف - اگر برای زلزله‌ای با شدت ۴ ریشتر، شدت نسبی یک واحد را در نظر بگیریم، جدول زیر را کامل کنید:

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱۰	۱	شدت نسبی
۹	۸	۷	۶	۵	۴	واحد ریشتر

- ۱- چگونه شدت نسبی و واحد ریشتر از لحاظ شدت قابل مقایسه هستند؟
 - ۲- چگونه زلزله‌ای با قدرت ۹ ریشتر با زلزله‌ای با قدرت ۷ ریشتر قابل مقایسه است؟
حتماً متوجه شدید که اعداد مقیاس ریشتر لگاریتمی هستند!
 - ب- با دانستن اینکه اعداد مقیاس ریشتر لگاریتمی هستند، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:
 - ۱- لگاریتم چه عددی صفر است؟
 - ۲- بعید است که زلزله‌ای با قدرت ۲ ریشتر احساس شود. لگاریتم چه عددی ۲ است؟
 - ۳- زلزله‌ای با قدرت ۷/۲۵ ریشتر اگر در نزدیکی محل پرجمعیتی اتفاق بیفتد فاجعه‌آمیز است. لگاریتم چه عددی ۷/۲۵ است؟
- به نکته‌ای که در مجله‌ی دانستنی‌ها شماره‌ی ۱۰ سال شانزدهم - اردیبهشت ۱۳۷۴ نوشته

شده است دقت کنید :

زراخانه‌ی نیروهای طبیعی...
زمین لرزه = ۵۰۰۰۰۰ بمب اتمی

زمین لرزه‌ای به قدرت ۱۰
درجه در مقیاس ریشتر، معادل ۱۰
میلیارد تن انفجار تی.ان. تی انرژی
آزاد می‌کند. بمب هیروشیما معادل
۲۰۰۰۰ تن تی.ان. تی بود. به ناحق
زمین لرزه‌ها را تخریب‌کننده‌ترین
پدیده‌های طبیعی به شمار می‌آورند.
آمار نشان می‌دهند که گردبادها و
طوفان‌ها و سیل‌ها، خسارات مالی و
جانی سنگین‌تری به بار می‌آورند.

تمرین

۱- اولین فیلم انیمیشن در تاریخ سینما، فیلم سفیدبرفی و هفت کوتوله بود. مدت زمان فیلم ۸۲ دقیقه بود و همچنان که در مورد فیلم‌های انیمیشن مدرن صحت دارد، در هر ثانیه، ۲۴ تصویر و مجموع تعداد تصویرهایی که بر پرده ظاهر شد، ۲۴۰۰۰ بود.
با استفاده از لگاریتم، تعداد تقریبی تصویرهایی را که در فیلم سفیدبرفی و هفت کوتوله به کار برده شده بود پیدا کنید.

۲- ۲ در یک سال، تقریباً $۱۰^۵ \cdot ۴/۲$ کیلوگرم گیاه در زیر هر کیلومتر مربع از سطح اقیانوس می‌روید. همچنان که حدود $۱۰^۸ \cdot ۳/۶$ کیلومتر مربع زمین نیز به وسیله‌ی اقیانوس پوشیده شده است. با استفاده از لگاریتم، وزن تقریبی گیاههایی را که در اقیانوس‌های سطح کره‌ی زمین در یک سال می‌رویند مشخص کنید و مراحل کار خود را یادداشت کنید.

۳- ۶- ۱- مقیاس ریشتر: مقدار انرژی آزاد شده برحسب ژول که توسط مهیب‌ترین زلزله‌های دنیا تا به حال ثبت شده است، حدود $۱۰^۰$ میلیارد برابر انرژی آزاد شده توسط زلزله‌ی خفیفی است که به سختی قابل احساس است. در طی $۱۵^۰$ سال گذشته، افراد از کشورهای

۱ و ۲- این دو مسأله از کتاب زاکوب، ۱۹۸۲ صفحه ۲۱۶ گرفته شده است.

مختلف، مقیاس‌های متفاوتی برای اندازه‌گیری و مقایسه‌ی قدرت زلزله تهیه کرده‌اند. در سال ۱۹۳۵، چارلز ریشر، زلزله‌شناس آمریکایی، یک مقیاس لگاریتمی برای سنجش قدرت زلزله تهیه کرد که هنوز مورد استفاده است و به دلیل اهمیت، به نام خود او معروف گشته است.

زلزله‌ای با قدرت کمتر از $4/4^{\circ}$ ریشر قابل احساس نیست. انرژی آزاد شده توسط زلزله‌ای با قدرت بسیار کم به عنوان مبنای استاندارد مقایسه برای سنجش قدرت زلزله‌ها در نظر گرفته شده است که برابر است با

$${}^1 E_0 = 10^{4/4}$$

آنگاه قدرت زلزله از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$${}^2 M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$$

جدول (۱۱)

قدرت تخریب	قدرت زلزله در مقیاس ریشر
ضعیف	M. 4/5
متوسط	4/5. M. 5/5
زیاد	5/5. M. 6/5
بسیار زیاد	6/5. M. 7/5
بزرگ‌ترین	M. 7/5

که در آن E انرژی آزاد شده به وسیله‌ی زلزله، برحسب ژول است. جدول (۱۱) قدرت تخریب زلزله‌های مختلف را در مقیاس ریشر نشان می‌دهد:

مثال ۱۶: زلزله‌ی سال ۱۹۰۶ سانفرانسیسکو در حدود $5/96 \times 10^{16}$ ژول انرژی آزاد کرد. زلزله آن چنان شدید بود که حتی خیابان‌های شهر را نابود کرد، طوری که عملاً، شهر سانفرانسیسکو از نو ساخته شد. قدرت زلزله در مقیاس ریشر چقدر بود؟

حل: از رابطه‌ی $M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$ استفاده می‌کنیم و M را حساب می‌کنیم

$$M = \frac{2}{3} \log \frac{5/96 \times 10^{16}}{10^{4/4}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{3} \log(5/96 \times 10^{11/6}) \\
 &= \frac{2}{3} (\log 5/96 + \log 10^{11/6}) \\
 &= \frac{2}{3} (0.775 + 11/6)
 \end{aligned}$$

$$M = 8/25$$

مثال ۱۷: شدت زلزله‌ی سال ۱۳۶۹ رودبار ۷/۲ الی ۷/۶ ریشتر گزارش شد. مقدار تقریبی انرژی آزاد شده برحسب ژول را پیدا کنید.

$$M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$$

حل:

که در آن $M = 7/2$ ، $E_0 = 10^{4/4}$ و E مجهول است. بنابراین

$$\begin{aligned}
 7/2 &= \frac{2}{3} \log \frac{E}{10^{4/4}} \\
 &= \frac{2}{3} (\log E - \log 10^{4/4}) \\
 &= \frac{2}{3} (\log E - 4/4) \\
 &= \frac{2}{3} \log E - \frac{2}{3} \times 4/4 \\
 7/2 &= \frac{2}{3} \log E - 2/933 \quad \text{و}
 \end{aligned}$$

یا

$$\frac{2}{3} \log E = 7/2 + 2/933 = 10/13,$$

و در نتیجه

$$\log E = \frac{10/13}{\frac{2}{3}} = 15/2,$$

برای محاسبه‌ی E یا از دکمه‌ی y^x ماشین حساب استفاده کنید که چون

$$E = 10^{15/2}$$

$$E = 1/584 \times 10^{15}$$

یا از تابع عکس لگاریتم استفاده کنید :

ترتیب عملیات	نشان دهنده
$1/584$	$1/584 \times 10^{15}$
INV	
log	

مقدار E را می‌توانیم با مراجعه به جدول لگاریتم به دست آوریم

$$E = 10^{15/2} = 10^{15} \times 10^{0/2}$$

و در جدول به دنبال عددی می‌گردیم که لگاریتم آن $0/2$ است که مقدار تقریبی آن عدد $1/584$ است، یعنی

$$E = 1/584 \times 10^{15}$$

تمرین ۷: همین مثال را با فرض اینکه شدت زلزله‌ی رودبار $7/6$ ریشتر باشد، انجام دهید.

۳-۶-۲- شدت صدا: گوش انسان قادر به شنیدن صداهایی با شدت‌های غیر قابل تصور است. بلندترین صدایی که گوش یک انسان سالم (بدون صدمه رسیدن به پرده‌ی گوش) قادر به شنیدن آن است، شدتی معادل یک تریلیون (10^{12}) برابر شدت کوتاه‌ترین صدایی که همان انسان می‌تواند بشنود دارد. مقیاس دسی بل^۲ نیز یک مقیاس لگاریتمی برای سنجش شدت صدا است که به احترام الکساندر گراهام بل، مخترع تلفن (۱۹۲۲-۱۸۴۷)، به نام او نامگذاری شده است. مقیاس دسی بل چنین تعریف می‌شود

$$D = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

که در آن D برابر سطح دسی بل صدا، I نشان دهنده‌ی شدت صدا بر حسب وات در هر مترمربع ($\frac{W}{m^2}$) و I_0 شدت کمترین صدای قابل شنیدن توسط یک انسان نسبتاً سالم و جوان است. مقدار استاندارد شده‌ی I_0 برابر 10^{-12} وات در هر مترمربع است. جدول (۱۲) شدت بعضی از صداهای آشنا را نشان می‌دهد.

۱- در بعضی ماشین حساب‌ها به جای دکمه‌ی INV از دکمه‌ی 2ndF استفاده می‌شود.

جدول (۱۲)

شدت صدا $\frac{W}{m^2}$	منبع صدا
$1/0 \times 10^{-12}$	در آستانه‌ی شنیدن
$5/2 \times 10^{-10}$	نجوا
$3/2 \times 10^{-6}$	مکالمه‌ی معمولی
$8/5 \times 10^{-4}$	ترافیک سنگین
$3/2 \times 10^{-3}$	مته‌ی سوراخ کردن سنگ
10×10^0	در آستانه‌ی درد
$8/3 \times 10^2$	هواپیمای جت با موتور سوخت

مثال ۱۸: تعداد واحدهای دسی بل را که از صدای نجوا مانندی با شدت $5/2 \times 10^{-10}$ وات در هر مترمربع ایجاد می‌شود پیدا کنید.

حل: D را از فرمول $D = 10 \log \frac{I}{I_0}$ حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 D &= 10 \log \frac{5/2 \times 10^{-10}}{10^{-12}} \\
 &= 10 \log(5/2 \times 10^2) \\
 &= 10 (\log 5/2 + \log 10^2) \\
 &= 10 (0.716 + 2)
 \end{aligned}$$

$$D = 27/16 \quad \text{دسی بل}$$

مقیاس لگاریتمی

چون لگاریتم هر عدد در مبنای به غیر از یک – افزایشی بسیار کندتر از خود آن عدد دارد، از لگاریتم‌ها برای ایجاد مقیاس‌های راحت‌تری برای مقایسه استفاده می‌شود.

مدل‌سازی ریاضی

مدل به معنی نمونه و الگویی است که براساس آن واقعیتی را مجسم می‌کنیم. اسباب‌بازی‌ها، نمونه‌های آشنا از مدل‌هایی هستند که کودکان از طریق آن‌ها می‌توانند دنیای واقعی را تجسم و درک کنند و به تصورات خود عینیت بخشند. درحقیقت، انسان‌ها در مراحل مختلف زندگی برای درک واقعیت‌ها ناگزیر از مدل‌سازی هستند. یک نمونه‌ی جالب مدل‌سازی کره‌ی جغرافیایی است که در تشریح و توضیح مختصات جغرافیایی زمین مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در شروع آموزش ریاضیات برای درک بهتر بسیاری از مفاهیم از مدل‌سازی استفاده می‌شود. مثلاً برای تدریس مفهوم عدد، نمایش اعداد حقیقی روی محور و نمایش نقطه در دستگاه مختصات دکارتی از مدل‌سازی بهره می‌گیریم. و این روند تا مراحل بالاتر آموزش هم‌چنان ادامه دارد.

مدل‌های فیزیک نیوتنی و فیزیک نسبیت اینشتین نیز نمونه‌هایی از مدل‌سازی قوانین طبیعت هستند. فیزیک نیوتنی مدلی از جهان ارائه می‌کند که اگرچه کامل و بی‌نقص نیست اما در تبیین بسیاری از پدیده‌های طبیعی مفید است. با این حال، این مدل در مورد حرکت ذراتی که سرعتی نزدیک به سرعت نور دارند پاسخگو نیست و مدل ریاضی نسبیت اینشتین در این زمینه رهگشا است. هدف این فصل، ارائه‌ی مدل‌سازی ریاضی چند مسأله از زندگی واقعی و حل آن‌ها است.

۴-۱- مسائل رشد^۱

فعالیت ۴-۱

مریم و دوستانش به حفظ محیط زیست اهمیت زیادی می‌دهند و اخبار مربوط به تحولات کره‌ی مسکون را با دقت دنبال می‌کنند. در روز اول مهر، مریم ادعا کرد که در خبر آمده است «لایه‌ی

ازن زمین به سرعت در حال از بین رفتن است و خطر جدی، زندگی ساکنان کره‌ی زمین را در ده سال آینده تهدید می‌کند!» مریم تلفنی این خبر را به دو نفر از دوستانش گفت و از هریک از آن‌ها خواست که خبر را تا روز بعد، به دو نفر دیگر اطلاع دهند. روز دوم، هریک از این دو نفر، خبر را به دو نفر دیگر رساند یعنی در روز دوم مهر، چهار نفر دیگر خبر را شنیدند و در روز سوم هشت نفر دیگر به آن‌ها که خبر را شنیده بودند، اضافه شدند. اگر خبر به همین ترتیب پخش شود، در روز دهم مهر چند نفر خبر را می‌شنوند؟ تا روز دهم، مجموعاً چند نفر خبر را خواهند شنید؟ برای یافتن پاسخ، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

با توجه به جدول (۱)، می‌بینیم که سرعت پخش یا رشد خبر چقدر بوده است!

جدول (۱)

روز: n	تعداد افرادی که خبر را در روز n ^{ام} می‌شنوند.	تعداد کل افرادی که تا روز n ^{ام} خبر را شنیده‌اند — مریم هم جزء این عده است.
قبل از شروع به پخش خبر، تنها مریم آن را شنیده است.	۱	۱
۱	۲	۳
۲	۴	۷
۳	۸	۱۵
۴	۱۶	۳۱
۵	۳۲	۶۳
۶	۶۴	۱۲۷
۷	۱۲۸	۲۵۵
۸	۲۵۶	۵۱۱
۹	۵۱۲	۱۰۲۳
۱۰	۱۰۲۴	۲۰۴۷

تمرین ۱: اگر مریم از دوستانش خواسته بود که هر پنج دقیقه یک بار خبر را به اطلاع دو نفر دیگر برسانند، چند دقیقه طول می‌کشید تا ۲۰۴۷ نفر خبر را بشنوند؟

اگر تعداد افرادی که در پایان روز بیستم، بیست و هشتم یا هر روز دیگر از خبر آگاهی پیدا می‌کنند مورد نظر باشد، قطعاً باید به دنبال راه میان‌بری بگردیم و گزینه محاسبات، طولانی، وقت‌گیر و کسل‌کننده می‌شوند. به همین منظور، جدول (۱) را برحسب توان‌های ۲ بازنویسی می‌کنیم. شما هم جای علامت سؤال‌ها را با استفاده از ماشین حساب، پر کنید:

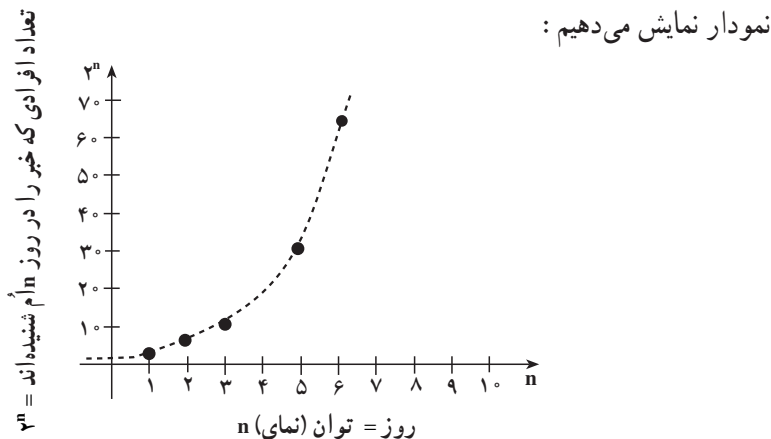
جدول (۲)

روز: n	تعداد افرادی که در روز nم خبر را شنیده‌اند.	تعداد کل افرادی که تا روز nم خبر را شنیده‌اند — مریم هم جزء این عده است.
قبل از شروع به پخش خبر، تنها مریم آن را شنیده است.	$1 = 2^0$	$1 = 2^{0+1} - 1$
۱	$2 = 2^1$	$3 = 2^{1+1} - 1$
۲	$4 = 2^2$	$7 = 2^{2+1} - 1$
۳	$8 = 2^3$	$15 = 2^{3+1} - 1$
۱۰	$1024 = 2^{10}$	$2047 = 2^{10+1} - 1$
۱۱	$2048 = 2^{11}$	$4095 = 2^{11+1} - 1$
؟	۶۵۵۳۶	؟
؟	؟	۵۲۴۲۸۷
۲۰	2^{20}	$2^{20+1} - 1$
۲۸	2^{28}	$2^{28+1} - 1$
n	2^n	$2^{n+1} - 1$

با دقت در جدول، مشاهده می‌کنیم که با گذشت یک روز، تعداد شنوندگان خبر در آن روز دو برابر روز قبل می‌شوند و تعداد کل افراد (ستون سوم) تقریباً دو برابر تعداد شنوندگان خبر در آن روز می‌شوند. این مشاهده، رابطه‌ی بین دو کمیت یا دو متغیر را به ما نشان می‌دهد یعنی تعداد شنوندگان

خبر در هر روز، تابعی از آن روز است. رابطه‌ی بین تعداد روزها و تعداد شنوندگان خبر در آن روز، یک تابع نمایی است، زیرا رشد تعداد افراد شنونده‌ی خبر، به صورت توان‌ها یا نماهای ۲ است.

۴-۱-۱ نمودار رشد نمایی: الگویی را که در ستون دوم جدول مشاهده کردیم به صورت



شکل ۱- تعداد افرادی که در روز n ام خبر را شنیده‌اند.

نمودار توان‌های دو، نمونه‌ای از یک تابع نمایی است و تصویر فوق رابطه‌ی بین n و 2^n را نشان می‌دهد. این رابطه را می‌توانیم به صورت $b = 2^n$ نیز نمایش دهیم. در واقع، روابطی از نوع $b = a^n$ که در آن a بزرگ‌تر از یک است ($a > 1$) شکلی مشابه با این نمودار دارند. حرف a معرف پایه و حرف n معرف نما یا توان است.

مثال ۱: با توجه به نمودار فوق، می‌توانیم نماهای کسری ۲ را تقریب بزنیم. مثلاً برای به دست آوردن مقدار $b = 2^{\frac{7}{2}}$ ، چون $\frac{7}{2}$ یعنی $\frac{3}{5}$ بین ۳ و ۴ است، در نتیجه مقدار $2^{\frac{7}{2}}$ نیز بین 2^3 و 2^4 یا بین ۸ و ۱۶ است. پس مقدار تقریبی $2^{\frac{7}{2}}$ برابر ۱۲ است.

مثال ۲: اگر بخواهیم بدانیم که چه توانی از ۲ مساوی ۷۵ است، به نمودار مراجعه کرده، جواب تقریبی $2^{\frac{6}{2}}$ را به دست می‌آوریم زیرا ۷۵ بین ۶۴ و ۱۲۸ یعنی 2^6 و 2^7 است:

$$2^6 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$$

$$64 \cdot 75 \cdot 128$$

یعنی n بین ۶ و ۷ است و چون ۷۵ به ۶۴ نزدیک‌تر است، پس n به شش نزدیک‌تر است. (این دو مثال را مقایسه کنید.)

تمرین ۲: با استفاده از نمودار :

الف) مقدار تقریبی n را در رابطه $2^n = 56$ پیدا کنید.

ب) مقدار تقریبی $2^{\frac{17}{3}}$ را به دست آورید.

تمرین ۳: قسمت‌های الف) و ب) از تمرین ۲ چه رابطه‌ای با لگاریتم دارند؟ توضیح دهید.

فعالیت ۲-۴

فرض کنیم که هزینه‌ی تحصیل عمومی از سال ۱۳۷۰ خورشیدی با آهنگ^۱ سالانه‌ی ۱۰ درصد^۲ رو به افزایش بوده است و این روند تقریباً به همین ترتیب ادامه پیدا می‌کند. اگر در سال ۱۳۷۰ که میلاد به کلاس اول رفت، هزینه‌ی تحصیل^۳ او ۱۸۰۰۰ تومان بوده باشد، این هزینه در دوره‌ی پیش‌دانشگاهی (پس از ۱۲ سال) یعنی در سال ۱۳۸۲ چه قدر خواهد بود؟ برای پاسخ به این سؤال، دو مسیر مختلف را در نظر می‌گیریم :

مسیر ۱: هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان یک سال چنین است :

$$a = 10\% + \text{هزینه‌ی اولیه} \quad (\text{هزینه‌ی اولیه})$$

اگر هزینه‌ی اولیه را یک تومان فرض کنیم آن‌گاه :

$$a = 1 + \frac{10}{100} \times 1$$

$$a = 1 + 0/1$$

$$a = 1/1$$

هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال ۱۳۷۰

در پایان سال ۱۳۷۱، هزینه‌ی تحصیل میلاد $1/1$ هزینه‌ی تحصیل سال قبل او، یعنی $1/1 \times 1/1$ است زیرا $(1/1)(1/1) = (0/1) + (1/1)$. در سال سوم، هزینه‌ی تحصیل میلاد $1/1$ هزینه‌ی سال قبل او یعنی

$$(1/1 \times 1/1) \times 1/1$$

۱- Rate (نرخ)

۲- آهنگ رشد سالانه ۱۰ درصد یک حالت فرضی است. برای محاسبه‌ی هزینه واقعی از اطلاعات بانک مرکزی

استفاده نمایید.

۳- هزینه‌ی تحصیل شامل لوازم تحریر، کتاب و هزینه‌ی رفت و آمد مدرسه است.

است. اگر هزینه‌های تحصیل میلاد را در پایان هر سال به‌طور منظم بنویسیم، می‌توانیم هزینه‌ی تحصیل او را در پایان سال دوازدهم حدس بزنیم و سپس محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} \text{هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال اول} &= 1/1 = (1/1)^1 \\ \text{هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال دوم} &= (1/1) \times (1/1) = (1/1)^2 \\ \text{هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال سوم} &= (1/1 \times 1/1) \times (1/1) = (1/1)^3 \\ \text{هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال چهارم} &= (1/1 \times 1/1 \times 1/1) \times (1/1) = (1/1)^4 \\ \text{هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال پنجم} &= (1/1 \times 1/1 \times 1/1 \times 1/1) \times (1/1) = (1/1)^5 \\ \text{هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال دوازدهم} &= (1/1 \times 1/1 \times \dots \times 1/1) \times (1/1) = (1/1)^{12} \end{aligned}$$

۱۱ بار

اگر هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان یک سال، یعنی $1/1$ را a بنامیم، هزینه‌ی تحصیل او پس از $t = 12$ به $(1/1)^{12}$ می‌رسد. این مقدار را b می‌نامیم که نشان‌دهنده‌ی رشد هزینه‌ی تحصیلی میلاد پس از گذشت $t = 12$ دوره‌ی زمانی است. با توجه به آن‌چه که در این فعالیت انجام دادیم، روابط زیر را به‌دست آوردیم

$$(1/1)^{12} = b$$

یا

$$\boxed{a^t = b}$$

a = یک به اضافه‌ی درصد افزایش (فاکتور رشد در یک واحد زمانی)؛

t = دوره‌ی زمانی؛

b = فاکتوری که مقدار اولیه در آن ضرب می‌شود تا هزینه را در t دوره‌ی زمانی به دست دهد

(فاکتور رشد در t دوره‌ی زمانی).

رابطه‌ی فوق را با این فرض که هزینه‌ی اولیه یک تومان بود به دست آوردیم. چون هزینه‌ی

اولیه، 18000 تومان است، هزینه‌ی تحصیل میلاد در سال دوازدهم با ضرب هزینه‌ی اولیه (18000)

تومان) در فاکتور رشد در 12 دوره‌ی زمانی، یعنی $b = (1/1)^{12}$ به دست می‌آید

$(1/1)^{12} \times \text{هزینه‌ی اولیه} = \text{هزینه‌ی تحصیل میلاد در سال دوازدهم}$

$$= 18000 \times (1/1)^{12}$$

برای محاسبه‌ی عبارت فوق یا از طرفین لگاریتم می‌گیریم و یا با استفاده از تابع نمایی y^x در

ماشین حساب علمی، مقدار $(1/1)^{12}$ را به دست می‌آوریم و سپس در 18000 ضرب می‌کنیم در نتیجه

$$\text{هزینه‌ی تحصیل در سال دوازدهم} = 18000 \times 3/138 = 56491/71078$$

تمرین ۴- با استفاده از لگاریتم، هزینه‌ی تحصیل میلاد در سال دوازدهم را به دست آورید.

مسیر ۲- به کمک ماشین حساب، هزینه‌ی تحصیل میلاد را در هر سال با استفاده‌ی متوالی

از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم:

$$\text{هزینه در شروع سال} + \text{هزینه در شروع سال} = \text{هزینه‌ی تحصیل در پایان هر سال}$$

$$(1) \quad 1370 \quad \text{هزینه‌ی تحصیل در پایان اولین سال} : 1370 = 18000 + 0/1(18000) = 19800$$

$$(2) \quad 1371 \quad \text{هزینه‌ی تحصیل در پایان دومین سال} : 1371 = 19800 + 0/1(19800) = 21780$$

$$(3) \quad 1372 \quad \text{هزینه‌ی تحصیل در پایان سومین سال} : 1372 = 21780 + 0/1(21780) = 23958$$

$$(4) \quad 1381 \quad \text{هزینه‌ی تحصیل در پایان دوازدهمین سال} : 1381 = 51356 + 0/1(51356) = 56491/70$$

با دقت در چگونگی رشد هزینه در محاسبات فوق، می‌توانیم مراحل بالا را به صورت دیگری بازنویسی کنیم

$$(1-1) \quad \text{هزینه‌ی تحصیل در پایان اولین سال تحصیلی} = 19800 = 18000 \cdot (1 + 0/1) = 18000 \cdot (1/1)^1$$

$$(2-2) \quad \text{هزینه‌ی تحصیل در پایان دومین سال تحصیلی} = 21780 = 19800 \cdot (1 + 0/1) = 19800 \cdot (1/1)^1,$$

از رابطه‌ی ۱-۱، مقدار ۱۹۸۰۰ را در رابطه‌ی ۲-۲ جایگزین می‌کنیم.

$$2, \quad \text{هزینه‌ی تحصیل در پایان دومین سال} = 18000 \cdot (1/1)^1 (1/1)^1 = 18000 \cdot (1/1)^2,$$

رابطه‌ی (۳) را نیز بازنویسی می‌کنیم

$$\text{هزینه‌ی تحصیل در پایان سومین سال} = 21780 \cdot (1 + 0/1)$$

$$= 18000 \cdot (1/1)^2 (1/1)$$

$$= 18000 \cdot (1/1)^3,$$

با همین استدلال، هزینه‌ی تحصیل میلاد در سال دوازدهم را حدس می‌زنیم

$$2, \quad \text{هزینه‌ی تحصیل در پایان دوازدهمین سال} = 18000 \cdot (1/1)^{12},$$

می‌توانیم به جای هزینه‌ی اولیه یعنی ۱۸۰۰۰ تومان، A_0 را قرار دهیم و مراحل فوق را از نو بنویسیم

$$A_0 = 18000$$

$$A_1 = 18000 + 18000 \cdot (0/1) = 18000 \cdot (1/1)$$

یا

$$A_1 = A_0 + A_0(0/1)$$

$$A_1 = A_0(1/1) \quad (5)$$

به طور مشابه

$$A_2 = A_1 + A_1(0/1) = A_1(1/1) \quad (6)$$

$$A_3 = A_2 + A_2(0/1) = A_2(1/1) \quad (7)$$

با همین استدلال،

$$A_{12} = A_{11}(1/1)$$

مقدارهای A_1 و A_2 را از (5) و (6) به دست آورده و در (7) جایگزین می‌کنیم

$$A_1 = A_0(1/1)$$

$$A_2 = A_1(1/1) = A_0(1/1)(1/1) = A_0(1/1)^2$$

$$A_3 = A_2(1/1) = A_0(1/1)^2(1/1) = A_0(1/1)^3$$

به همین ترتیب A_{12} را به دست می‌آوریم

$$A_{12} = A_0(1/1)^{12}$$

و در حالت کلی

$$A_t = A_0(1/1)^t$$

که در آن t تعداد سال‌هاست.

اگر در حالت کلی، آهنگ رشد هزینه را r در نظر بگیریم، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$A_t = A_0(1+r)^t$$

که در آن:

$$A_0 = \text{هزینه‌ی اولیه؛}$$

$$r = \text{آهنگ رشد سالانه‌ی هزینه؛}$$

$$t = \text{تعداد سال‌ها؛}$$

$$A_t = \text{هزینه‌ی انباشته شده بعد از } t \text{ سال؛}$$

اختلاف این روش با روش مسیر ۱ در آن است که در این جا هزینه‌ی انباشته شده بعد از t سال

یعنی A_t را مستقیماً به دست آوردیم در حالی که در مسیر ۱ ابتدا b یعنی فاکتور رشد در t را

محاسبه کردیم و سپس با ضرب هزینه‌ی اولیه یعنی A_0 در آن، A_t را حساب کردیم که در آن

$$b = a^t = (1+r)^t$$

a = آهنگ یا فاکتور رشد در یک سال (رشد سالانه)؛

b = آهنگ یا فاکتور رشد در t سال؛

t = تعداد سال‌ها؛

مثال ۳: متخصصان بر این باور هستند که زمین قابل کشت و زرع کوهی مسکون حداکثر

می‌تواند 40 میلیارد نفر را غذا دهد^۱. در شروع سال 1990 میلادی، جمعیت تقریبی کوهی زمین $5/2$ میلیارد نفر بوده است. اگر جمعیت به‌طور نمایی و با ضریب ثابت 2% در سال رشد کند، چه زمانی جمعیت به 40 میلیارد نفر خواهد رسید.

حل: این مسأله را از هر دو مسیر پیشنهادی در فعالیت قبل حل می‌کنیم.

مسیر ۱: با توجه به این که جمعیت به‌طور نمایی رشد می‌کند، پس با استفاده از رابطه‌ی $a^t = b$ ،

زمان خواسته شده را حساب می‌کنیم:

$$a = 1 + \frac{2}{100}$$

$$a = 1/02$$

یا

فاکتور رشد در t سال یعنی b برابر است با جمعیت در t سال آینده تقسیم بر جمعیت در سال

1990 (زمان شروع)

$$b = \frac{40,000,000,000}{5/2 \times 1,000,000,000} = \frac{40 \times 10^9}{5/2 \times 10^9} = 7/692$$

با دانستن a و b ، تنها مجهول رابطه‌ی $a^t = b$ یعنی زمان t را محاسبه می‌کنیم:

$$(1/02)^t = 7/692$$

$$\log(1/02)^t = \log 7/692$$

$$t(\log 1/02) = \log 7/692$$

با مراجعه به جدول لگاریتم و یا به کمک ماشین حساب، مقادیرهای فوق را پیدا می‌کنیم:

$$t(0/0086) = 0/886$$

$$t = \frac{0/886}{0/0086} = 103/02$$

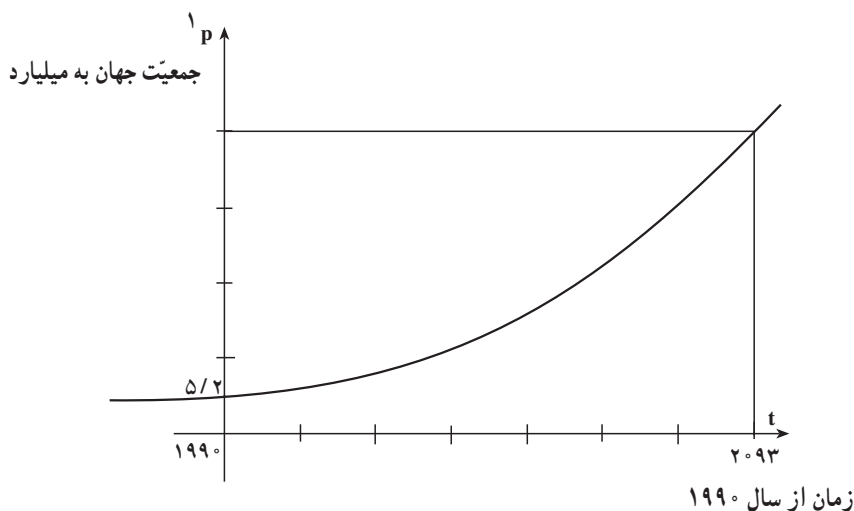
۱- مطمئناً با پیشرفت صنعت و تکنولوژی، راه‌های گوناگون دیگری برای تهیه‌ی غذا در کوهی زمین پیدا خواهد شد.

یعنی جمعیت کره‌ی زمین به طور تقریبی در سال

۱۹۹۰. ۱۰۳. ۲۰۹۳

به ۴۰ میلیارد نفر خواهد رسید.

در این مسأله یک تابع نمایی با پایه‌ی $۱/۰۲$ وجود دارد که نشان دهنده‌ی آهنگ رشد جمعیت در هر سال است. این تابع به این دلیل نمایی نامیده می‌شود که متغیر t در نما یا توان قرار دارد.



شکل ۲- جمعیت تقریبی جهان: رشد نمایی

مسیر ۲: داده‌های مسأله یعنی

$$A_t . 40 \times 10^9$$

$$A_0 . 5/2 \times 10^9$$

$$r . 2\% . \frac{2}{100} . 0/02$$

را در رابطه‌ی $A_t . A_0(1. r)^t$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$40 \times 10^9 . 5/2 \times 10^9 (1. 0/02)^t$$

یا

$$40 . 5/2 (1/02)^t$$

از طرفین لگاریتم می‌گیریم

$$\begin{aligned} \log 4^0 &= \log_{5/2}(1/0.2)^t, \\ \log(4 \times 1^0) &= \log_{5/2} + \log(1/0.2)^t \\ \log 4 + \log 1^0 &= \log_{5/2} + t \log 1/0.2 \end{aligned} \quad (8)$$

با مراجعه به جدول لگاریتم، یا با استفاده از ماشین حساب، مقدار لگاریتم‌های فوق را به دست می‌آوریم

$$\log 4 = 0.602 \quad \text{و} \quad \log_{5/2} = 0.716 \quad \text{و} \quad \log 1/0.2 = 0.0086$$

سپس با جای‌گذاری آن‌ها در رابطه‌ی (۸)، مقدار t را پیدا می‌کنیم

$$0.602 + 1 = 0.716 + t \times 0.0086$$

$$1/602 - 0.716 = 0.0086t$$

$$t = \frac{1/602 - 0.716}{0.0086} = \frac{0.886}{0.0086} = 103.02$$

در شکل ۲، مشاهده می‌شود که هر چه زمان به جلو می‌رود، جمعیت سریع‌تر و سریع‌تر رشد می‌کند و این ویژگی یک تابع نمایی است. این نمودار نشان می‌دهد که حتی اگر در ابتدا، یک تابع نمایی آهسته آهسته رشد کند، با گذشت زمان، این رشد سریع‌تر و سریع‌تر خواهد شد. شاید آگاهی از این موضوع به ما کمک کند تا بهتر با مشکلات ازدیاد جمعیت آشنا شویم!

در فعالیت قبلی، اگر رشد جمعیت کره‌ی زمین را از سال ۱۹۹۰ به بعد با آهنگ رشد $1/0.2$ و در سال‌های مختلف حساب کنیم به نتایج جالبی می‌رسیم. به محاسبات زیر توجه کنید.

جمعیت کره‌ی زمین پس از گذشت ۳، ۳۵، ۵۰، ۶۶، ۷۰ و ۱۰۵ سال را از سال ۱۹۹۰ به بعد و با آهنگ رشد سالانه‌ی ۲ درصد حساب می‌کنیم

$${}^2 P_t = P_0 (1+r)^t \quad (9)$$

$$P_0 = 5/2 \text{ میلیارد} \quad \text{شروع سال } 1990 \quad (10)$$

$$P_{30} = 5/2 (1/0.2)^{30} = 9/419 \text{ میلیارد} \quad (11)$$

$$P_{35} = 5/2 (1/0.2)^{35} = 10/399 \text{ میلیارد} \quad (12)$$

$$P_{50} = 5/2 (1/0.2)^{50} = 13/996 \text{ میلیارد} \quad (13)$$

۱- با تبدیل $\log 4^0$ به $\log 4 + \log 1^0$ ، ارتباط بین لگاریتم‌گیری با نماد علمی بهتر دیده می‌شود.

۲- Growth rate

۳- در این رابطه به جای A_1 و A_2 ، از نمادهای P_1 و P_2 که معرف جمعیت (Population) هستند، استفاده می‌کنیم.

$$P_{66} = 5/2(1/0.2)^{66} = 19/213 \text{ میلیارد} \quad (14)$$

$$P_{70} = 5/2(1/0.2)^{70} = 20/797! \quad 5/2 \times 4 \text{ میلیارد} \quad (15)$$

$$P_{105} = 5/2(1/0.2)^{105} = 41/593. \quad 5/2 \times 8 \text{ میلیارد} \quad (16)$$

در محاسبات فوق، مشاهده می‌کنیم که رابطه‌های (۱۲)، (۱۵) و (۱۶) از ویژگی خاصی برخوردار هستند. رابطه‌ی (۱۲) نشان می‌دهد که پس از گذشت ۳۵ سال، جمعیت کره‌ی زمین به دو برابر جمعیت اولیه آن (شروع سال ۱۹۹۰) می‌رسد. رابطه‌ی (۱۵) نشان‌دهنده‌ی چهاربرابری جمعیت کره‌ی زمین پس از گذشت ۷۰ سال یعنی 2×35 سال است. رابطه‌ی (۱۶) حاکی از هشت برابر شدن جمعیت کره‌ی زمین پس از گذشت ۱۰۵ سال یعنی 3×35 سال است. این یافته‌ها را در جدولی منظم می‌کنیم تا رابطه‌ی بین آن‌ها را بهتر ببینیم:

جدول (۳)

تعداد سال‌ها t	تعداد دوره‌ی زمانی T	جمعیت کره‌ی زمین
۳۵	۱	$5/2 \times 2^1$
۷۰	۲	$(5/2 \times 2) \times 2 = 5/2 \times 4$
۱۰۵	۳	$(5/2 \times 2 \times 2) \times 2 = 5/2 \times 8$

جمعیت کره‌ی زمین در هر دوره‌ی زمانی^۱، یعنی هر ۳۵ سال یک‌بار، به دو برابر می‌رسد. این دوره‌ی زمانی (۳۵ سال) را زمان دو برابر شدن^۲ جمعیت کره‌ی زمین می‌نامیم.

زمان دو برابر شدن یک تابع نمایی رشد، زمانی است که مقدار اولیه دو برابر شود. هر تابع نمایی رشد دارای یک زمان دو برابر شدن ثابت است.

می‌توانیم به جای آهنگ رشد سالانه‌ی جمعیت، آهنگ رشد ماهانه و حتی آهنگ رشد روزانه را به دست آوریم که به واقعیت نیز نزدیک‌تر است. مسأله‌ی قبلی را با توجه به آهنگ رشد ماهانه بررسی می‌کنیم. چون در رابطه‌ی

$$P_t = P_0(1+r)^t$$

۱- Time period

۲- Doubling time

r آهنگ رشد سالانه است. در نتیجه آهنگ رشد ماهانه $\frac{r}{12}$ خواهد بود. به عنوان مثال، جمعیت کره‌ی زمین در ۳۵ سال آینده با توجه به جمعیت اولیه $5/2$ میلیارد نفری در سال 1990 و قراردادن زمان برحسب ماه عبارت است از:

$$P_{35} = 5/2 \left(1 + \frac{0.02}{12}\right)^{12 \times 35} = 10/465 \text{ میلیارد}$$

درحالی که اگر آهنگ رشد سالانه را در نظر بگیریم، در ۳۵ سال آینده، جمعیت کره زمین تقریباً دو برابر یعنی $P_{35} = 10/399$ میلیارد می‌شود که کم‌تر از تخمین جمعیت با آهنگ رشد ماهانه است.

بهتر است برای مقایسه‌ی دقیق‌تر، جمعیت دنیا را با در نظر گرفتن آهنگ رشد روزانه نیز بررسی کنیم. در چنین وضعی، به جای $r = 0.02$ ، $\frac{r}{365}$ و یا $\frac{0.02}{365}$ را قرار می‌دهیم، در این صورت:

$$P_{35} = 5/2 \left(1 + \frac{0.02}{365}\right)^{365 \times 35} = 10/471$$

مشاهده می‌کنیم که آهنگ رشد روزانه‌ی جمعیت دقیق‌تر از آهنگ رشد ماهانه و باز هم دقیق‌تر از آهنگ رشد سالانه است. به طور کلی، اگر تقسیم‌بندی باز هم کوچک‌تری از سال را در نظر بگیریم، دقت ما بالاتر می‌رود. اگر سال را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم، رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت.

$$P_t = P_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

۲-۴- مسائل زوال^۱

فعالیت ۴-۳

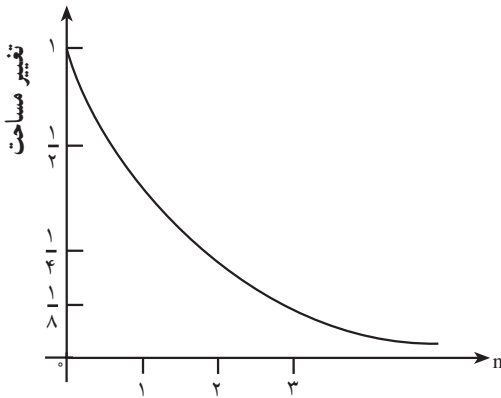
یک صفحه کاغذ سفید را در دست بگیرید و آن را تا بزنید. دوباره کاغذ تاخورده را تای جدید بزنید و این تازدن‌ها را تا آن جایی که می‌توانید ادامه دهید. بعد از اولین تا زدن، دو ناحیه به وجود می‌آید که مساحت هر یک نصف مساحت اولیه است. در دومین تا زدن، چهار ناحیه ایجاد می‌شود که مساحت هر کدام از آن‌ها نصف مساحت قبلی یعنی $\frac{1}{4}$ مساحت اولیه است. جدول (۴) چگونگی تغییر تعداد ناحیه‌هایی که بر اثر تازدن‌های متوالی ایجاد می‌شوند و چگونگی تغییر مساحت‌های آن ناحیه‌ها را بررسی می‌کند:

^۱ - Decay

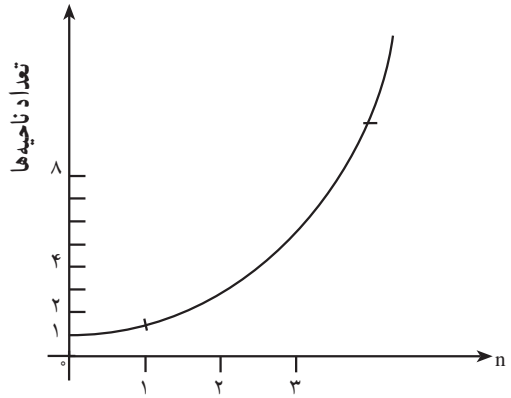
جدول (۴)

تعداد نازدها n	تعداد ناحیه‌ها	چگونگی تغییر مساحت ناحیه‌ها
۰	$1 = 2^0$	$1 = \frac{1}{2^0} = \left(\frac{1}{2}\right)^0$
۱	$2 = 2^1$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1$
۲	$4 = 2^2$	$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$
۳	$8 = 2^3$	$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$
n	2^n	$\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

با توجه به داده‌های جدول بالا، دو نمودار زیر را رسم می‌کنیم:



شکل ۴- زوال



شکل ۳- رشد

همان‌طور که در دو نمودار دیده می‌شود، هم‌چنان که تعداد ناحیه‌ها بر اثر تا کردن‌های متوالی بیشتر و بیشتر می‌شود، مساحت ناحیه‌ها کمتر و کمتر می‌شود! در واقع، تعداد ناحیه‌ها به طور نمایی رشد می‌کند، مساحت ناحیه‌ها به طور نمایی رو به زوال می‌رود. با بررسی عمیق‌تر نمودار (۴) مشاهده می‌کنیم که فاکتور زوال $a = \frac{1}{2}$ است که از یک کوچک‌تر است در حالی که در نمودار (۳) فاکتور رشد $a = 2$ است که از یک بزرگ‌تر است.

۴-۲-۱- چگونگی تعیین قدمت سنگواره (زوال کربن)

فعالیت ۴-۴

کربن به وسیله‌ی موجودات زنده جذب می‌شود. نسبت ایزوتوپ‌های C^{12} ، C^{13} و C^{14} در موجودات زنده ثابت است. با این حال، به محض این که موجودات زنده بمیرند، جذب ایزوتوپ C^{14} به وسیله‌ی آن‌ها متوقف می‌شود و C^{14} موجود در آن‌ها شروع به زوال می‌کند. دانستن این که با چه سرعتی C^{14} روبه زوال می‌رود، به ما فرصت می‌دهد تا قدمت موجودات را پیدا کنیم و این فن (تکنیک) وسیله‌ی قدرتمندی برای باستان‌شناسان است که به آن آزمایش C^{14} گفته می‌شود. لازم است گفته شود که ۵۷۰۰ سال طول می‌کشد تا مقدار ایزوتوپ C^{14} به نصف مقدار اولیه‌ی خود برسد.

مثال ۴: کربن یک استخوان فسیل شده شامل تنها ۲۰ درصد مقدار معمولی C^{14} است. می‌خواهیم قدمت استخوان را تخمین بزنیم.

حل: می‌دانیم که ۵۷۰۰ سال طول می‌کشد تا مقدار ایزوتوپ C^{14} کربن به نصف کاهش یابد. این زمان، نیم‌عمر و ۵۷۰۰ سال، یک دوره‌ی زمانی برای زوال C^{14} در کربن نامیده می‌شود. در واقع، ما به دنبال پیدا کردن دوره‌ی زمانی مشخصی هستیم که با گذشت آن، مقدار ایزوتوپ C^{14} کربن به ۲۰٪ می‌رسد. الگوی زیر می‌تواند راهنمای ما باشد:

جدول (۵)

دوره‌ی زمانی	تعداد سال‌ها	مقدار C^{14} باقی‌مانده	درصد مقدار باقی‌مانده
۱	۵۷۰۰	$\frac{1}{2}$	۵۰٪
۲	$۵۷۰۰ \times ۲ = ۱۱۴۰۰$	$(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$	۲۵٪
۳	$۵۷۰۰ \times ۳ = ۱۷۱۰۰$	$(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$	۱۲/۵٪

با مشاهده‌ی جدول درمی‌یابیم که در مدتی بیشتر از دو دوره‌ی زمانی و کم‌تر از سه دوره‌ی زمانی، مقدار C^{14} به ۲۰ درصد مقدار اولیه‌ی خود می‌رسد. اکنون که زمان تقریبی را پیدا کردیم، با دانستن این که میزان C^{14} در کربن به صورت نمایی روبه زوال می‌رود و با استفاده از

۱- ایزوتوپ‌های کربن دارای تعداد پروتون‌ها و الکترون‌های مساوی (۶) هستند ولی تعداد نوترون‌های آن‌ها متفاوت

است. این تعداد در C^{12} ، C^{13} و C^{14} به ترتیب برابر ۶، ۷ و ۸ است.

رابطه‌ی $\mathbf{a}^T = \mathbf{b}$ ، زمان دقیق را پیدا می‌کنیم
فاکتور زوال در یک دوره‌ی زمانی

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{b} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

فاکتور زوال در T دوره‌ی زمانی

در نتیجه

$$\left(\frac{1}{2}\right)^T = \frac{1}{5}$$

(۱)

رابطه‌ی (۱) مدلی مناسب برای به‌دست آوردن T است. با استفاده از (۱) و به‌کارگیری روش‌های محاسباتی متنوع، می‌توانیم مقدار T و سپس $t = 5700 \cdot T$ را پیدا کنیم.
روش ۱: لگاریتم گرفتن از دو طرف (۱)

$$T \log \frac{1}{2} = \log \frac{1}{5}$$

$$T(-0/301) = -0/698$$

$$T = \frac{-0/698}{-0/301}$$

$$T = 2/322$$

چون هر دوره‌ی زمانی برای زوال مقدار C^{14} در کربن 5700 سال است، در نتیجه زمان دقیق برابر است با

$$t = 5700 \times T = 5700 \times 2/322$$

$$t = 13235/4$$

یعنی استخوان فسیلی که شامل تنها 20 درصد C^{14} است قدمتی برابر با $13235/4$ سال دارد.

روش ۲: استفاده از نمودار توان‌های کسری 10 (فصل لگاریتم)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^T = \frac{1}{5}$$

(۲)

دو طرف (۲) را به صورت معکوس می‌نویسیم (به چه دلیل؟):

$$2^T = 5 \quad (3)$$

با توجه به نمودار جدول مذکور، مقادیر ۲ و ۵ را برحسب توان‌های کسری 1° می‌نویسیم

$$5 = 1^{\circ/699} \quad , \quad 2 = 1^{\circ/301}$$

و آن‌ها را در (۳) جایگزین می‌کنیم

$$1^{\circ/301} \#^T = 1^{\circ/699} \quad (4)$$

$$1^{\circ/301} T = 1^{\circ/699}$$

چون پایه‌ها در (۴) با هم برابرند، در نتیجه توان‌ها نیز با هم مساویند

$$0/301 T = 0/699 \quad (5)$$

$$T = \frac{0/699}{0/301}$$

تعداد دوره‌های زمانی لازم برای رسیدن C^{14} به 20% مقدار اولیه برابر است با

$$T = 2/322$$

و مدت زمان برحسب سال برابر است با

$$t = 5700 \cdot T = 5700 \times 2/322$$

$$t = 13235/4$$

می‌بینیم که زمان دقیق به زمان تقریبی که در جدول (۵) به دست آوردیم، یعنی بین ۲ و ۳ دوره‌ی زمانی بسیار نزدیک است.

فعالیت ۴-۵

مسئله: برای بیهوش کردن یک سگ، 30 میلی‌گرم داروی سدیم پنتوباریتال برای هر یک کیلوگرم وزن بدن لازم است. اگر دارو به طور نمایی در بدن روبه‌زوال برود، با در نظر گرفتن نیم‌عمر دارو که 4 ساعت است، تقریباً چه مقدار دارو برای بیهوش نگه‌داشتن این سگ 20 کیلوگرمی به مدت 45 دقیقه لازم است؟

حل: کلید اصلی حل این مسأله، دانستن زوال نمای دارو در بدن است به این معنا که بعد از هر دوره‌ی زمانی (۴ ساعت) دارو به نصف مقدار اولیه‌ی خود در بدن می‌رسد و ادامه‌ی نصف شدن‌ها همان زوال نمایی است.

در ضمن، باید بدانیم ۴۵ دقیقه چه نسبتی از یک دوره‌ی زمانی ۴ ساعتی است:

$$۴۵ \text{ دقیقه} = \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۱۶}$$

یا $\frac{۴۵}{۴ \times ۶۰} = \frac{۹}{۴ \times ۱۲} = \frac{۳}{۴ \times ۴} = \frac{۳}{۱۶}$ دوره‌ی زمانی

با توجه به داده‌های مسأله، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

جدول (۶)

مقدار داروی باقی مانده بر حسب توان‌های $\frac{۱}{۴}$	تعداد ساعت‌ها	دوره‌ی زمانی
$(\frac{۱}{۴})^{\frac{۳}{۱۶}}$	$\frac{۳}{۱۶} \times ۴$	$\frac{۳}{۱۶}$
$(\frac{۱}{۴})^1$	۱×۴	۱
$(\frac{۱}{۴})^2$	۲×۴	۲

داده‌های مسأله یعنی

$$\frac{۱}{۴} = \text{فاکتور زوال در یک واحد زمانی} = \frac{۱}{۴}$$

$$b = \text{فاکتور زوال در } \frac{۳}{۱۶} \text{ واحد زمانی} = b$$

$$۰/۱۸۷۵ = \frac{۳}{۱۶} = t = \text{دوره‌ی زمانی مورد نظر}$$

را در رابطه‌ی $a^t = b$ قرار می‌دهیم. آنگاه

$$(۰/۵)^{۰/۱۸۷۵} = b$$

$$(\frac{۱}{۴})^{\frac{۳}{۱۶}} = b.$$

یا

(۶)

رابطه‌ی (۶) مدل مناسبی را برای پیدا کردن فاکتور زوال در $\frac{3}{16}$ واحد زمانی به دست می‌دهد. برای انجام محاسبات، راحت‌ترین کار استفاده از ماشین حساب علمی است: با توجه به وزن بدن سگ که ۲۰ کیلوگرم است، مقدار دارویی که در هر لحظه تا پایان عمل باید در بدن سگ وجود داشته باشد تا او را بیهوش نگه دارد، برابر $600 = 20 \times 30$ میلی‌گرم است. در واقع، مقدار داروی بیهوشی لازم برای مدت عمل باید بیش از 600 میلی‌گرم تا پایان عمل در بدن باشد. با محاسبات فوق، مقدار فاکتور زوال در $\frac{3}{16}$ دقیقه که همان دوره‌ی زمانی است را نیز پیدا کرده‌ایم

$$b = 0.878$$

تنها مجهول مسأله، مقدار داروی لازم در حین عمل است؛ یعنی چه مقدار سدیم پنتوباریتال باید به بدن سگ تزریق شود تا با توجه به فاکتور زوال $b = 0.878$ ، هم‌چنان 600 میلی‌گرم دارو در بدن باقی بماند.

$$600 = 0.878 \times \text{مقدار داروی مورد نیاز برای تزریق}$$

$$\text{مقدار داروی مورد نیاز برای تزریق} = \frac{600}{0.878}$$

$$\boxed{\text{مقدار داروی مورد نیاز برای تزریق} = 683.37}$$

تمرین ۵: با روش‌های دیگر، از جمله مراجعه به جدول لگاریتم، محاسبات فوق را انجام دهید.

مسائل

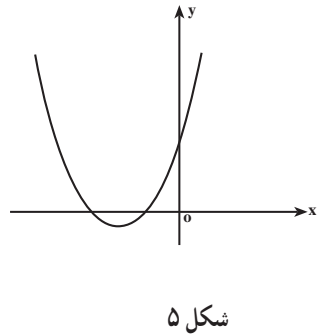
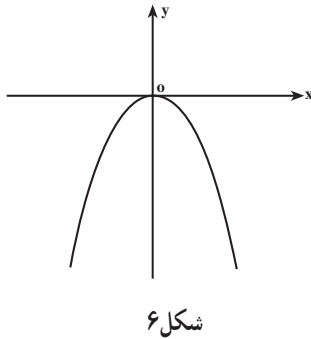
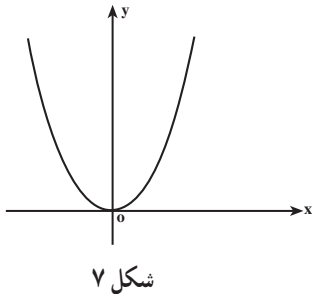
- اگر آهنگ رشد جمعیت در کشوری $1/2\%$ در سال باشد، چند سال طول می‌کشد تا جمعیت دو برابر شود؟ (جواب را با تقریب یک رقم اعشار بنویسید)
- از یکی از آرامگاه‌های سومریان، یک ظرف سفالی با قدمت ۴۵ قرن یافت شده است. این قدمت با توجه به شواهد تاریخی است. برای تأیید آن، یک آزمایش C^{14} روی آن انجام شد. انتظار دارید چند درصد از کربن C^{14} اولیه، باقی مانده باشد؟
- ایزوتوپ هیدروژن 3H که نیمه عمر آن $12/3$ سال است در طبقات بالایی جو تشکیل می‌شود و همراه باران به زمین می‌آید. اگر میزان این ایزوتوپ در چوب یک کشتی قدیمی 10% همان

ایزوتوپ در چوب یک کشتی جدید مشابه باشد، سن آن را تقریب بزنید.
 ۴- معلوم شده است که میزان کربن C^{14} موجود در درختانی که توسط یخچال‌های متحرک عصر چهارم یخبندان نابود شده‌اند، ۲۷٪ میزان کربن C^{14} در درختان زنده است. درباره‌ی تاریخ شروع این عصر یخبندان چه می‌توانید بگویید؟

۴-۳- بهینه‌سازی

دامنه‌ی مسائل بهینه‌سازی سیار وسیع است، با این حال، در این کتاب، مسائلی از بهینه‌سازی را مطرح می‌کنیم که با دانستن رفتار و خصوصیات توابع درجه‌ی دوم قابل بررسی باشند.

فعالیت ۴-۶



- ۱- از منحنی‌های بالا کدام یک ماکزیمم و کدام یک می‌نیمم دارند؟
- ۲- توابع $y = x^2 + 1$ و $y = -x^2 + 3$ را رسم کنید و وجود ماکزیمم و می‌نیمم را بررسی کنید.
- ۳- توابع $y = 2x^2 + 2x + 1$ و $y = -x^2 + 2x + 1$ را رسم کنید و وجود ماکزیمم و می‌نیمم را بررسی کنید.

۴- از سؤال‌های ۱ تا ۳ چه نتیجه‌ای درباره‌ی ماکزیمم و می‌نیمم تابع درجه‌ی دوم

برای دو حالت $a > 0$ و $a < 0$ می‌گیرید؟

- ۵- اگر a ، سهمی رو به بالا است یا رو به پایین؟ تابع ماکزیمم دارد یا می‌نیمم؟ اگر a ، سهمی رو به بالا است یا رو به پایین؟ تابع ماکزیمم دارد یا می‌نیمم؟
- ۶- اگر $a = 0$ ، در مورد ماکزیمم و می‌نیمم تابع چه می‌توان گفت؟
- ۷- طول نقطه‌ای را که در آن تابع ماکزیمم یا می‌نیمم دارد تعیین کنید.
- ۸- مقدار ماکزیمم یا می‌نیمم تابع f را تعیین کنید و سپس مختصات نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم آن را بنویسید.

- ۹- آیا جواب سؤال‌های ۵ تا ۸ برای هر تابع درجه‌ی دوم درست است؟ چرا؟
- ۱۰- آیا می‌توانید بدون قلم و کاغذ، نمودار و نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم هر تابع درجه‌ی دوم را تصور کنید؟ جواب خود را توجیه کنید.

- ۱۱- بدون استفاده از قلم و کاغذ نقاط ماکزیمم یا می‌نیمم توابع زیر را پیدا کنید:

$$f(x) = 4x^2 - 3x \quad (\text{الف})$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 1 \quad (\text{ب})$$

- ۱۲- آیا تابع درجه‌ی دومی وجود دارند که هم ماکزیمم و هم می‌نیمم داشته باشند؟ توضیح دهید.

فعالیت ۴-۷

۴-۴- بازاریابی

بخش تحقیقات و بازاریابی یک شرکت، پس از تحقیق و بررسی وضعیت بازار در مورد یک کالای جدید که توسط شرکت تولید می‌شود، معادله‌ی تقاضا را با توجه به این که بر اثر افزایش قیمت، تقاضا کم می‌شود، مدل‌سازی ریاضی کرده به مدیریت ارائه می‌کند:

$$x = 6000 - 30P \quad (1)$$

که در آن x تعداد واحد کالایی است که مصرف کنندگان در یک ماه خرید می‌کنند و P (برحسب تومان) قیمت هر واحد کالا است. همچنین بخش مالی شرکت، هزینه‌ی تمام شده‌ی تولید کالای جدید را با معادله‌ی زیر به مدیریت شرکت ارائه کرده است.

$$C = 72000 + 60x \quad (2)$$

۱- Price

۲- Cost

که در آن ۷۲۰۰۰ تومان هزینه‌ی ثابت تولید مربوط به دستگاه‌ها، استهلاک و هزینه‌های مشابه است و ۶۰ تومان هزینه‌ی متغیر تولید هر واحد کالا مربوط به دستمزد کارگر، مواد اولیه، انبارداری و حمل و نقل است. با توجه به قیمت کالا، یعنی p و تعداد واحد کالای تولید شده، x ، معادله‌ی درآمد از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\text{(قیمت هر واحد کالا)} \times \text{(تعداد واحد کالا)} = \text{درآمد}$$

$$R = x \times p \quad \text{: معادله‌ی درآمد} \quad (۳)$$

رابطه‌ی (۲)، هزینه‌ی C را به عنوان تابعی از x بیان می‌کند و رابطه‌ی (۱)، تقاضای x را بعنوان تابعی از p مشخص می‌نماید.

مدیر شرکت درصدد پیدا کردن مقدار تولیدی بود که بیشترین سود را عاید شرکت نماید. به همین منظور، بخش تحقیقات مشغول مطالعه گردید تا راهی پیدا کند که شرکت به سود ماکزیمم برسد. اولین حدس آن‌ها این بود که سود ماکزیمم وقتی عاید می‌شود که درآمد شرکت ماکزیمم گردد. اکنون به بررسی این حدس می‌پردازیم و سطح تولیدی را می‌یابیم که درآمد را ماکزیمم کند.

۴-۱- ماکزیمم کردن درآمد: برای اینکار لازم است تابع درآمد را برحسب x بسازیم.

معادله (۱) را بصورت

$$۳۰p = ۶۰۰۰ - x$$

می‌نویسیم و p را برحسب x محاسبه می‌کنیم:

$$p = \frac{۶۰۰۰ - x}{۳۰}$$

$$p = ۲۰۰ - \frac{۱}{۳۰}x$$

یا

p را در (۳) جایگزین می‌کنیم:

$$R(x) = x\left(۲۰۰ - \frac{۱}{۳۰}x\right)$$

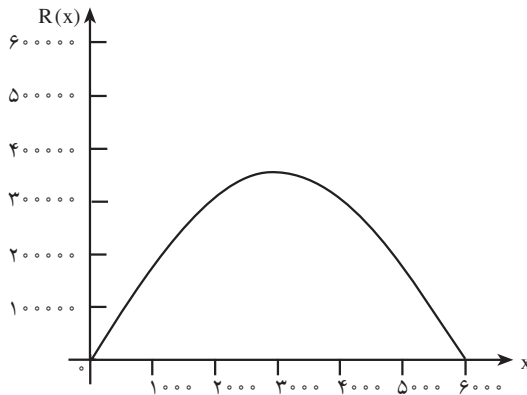
بنابراین مدل ریاضی به صورت زیر تبدیل می گردد :

$$R(x) = 200x - \frac{1}{300}x^2$$

با قرار دادن $R(x) = 0$ محل تلاقی نمودار تابع $R(x)$ را با محور x ها محاسبه می کنیم که مقادیر زیر به دست می آید

$$x = 0, \quad x = 6000$$

نمودار تابع درجه ی دوم $R(x)$ به صورت زیر است :



شکل ۸- نمودار تابع $R(x)$

از طرف دیگر طول نقطه رأس سهمی برابر است با :

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{2 \times (-\frac{1}{300})} = 3000$$

طول این نقطه از روی نمودار نیز محاسبه می شود. نمودار محور x ها را در دو نقطه $O = (0, 0)$ و $A = (6000, 0)$ قطع می کند. طول رأس سهمی وسط این دو نقطه است. بنابراین :

$$x = \frac{0 + 6000}{2} = 3000$$

و ماکزیم درآمد بر حسب تومان برابر است با

$$\begin{aligned} R(3000) &= 200(3000) - \frac{1}{30}(3000)^2 \\ &= 600000 - 300000 \\ &= 300000 \end{aligned}$$

$R(3000) = 300000$	بیشترین درآمد بر حسب تومان
--------------------	----------------------------

اما آیا این مقدار درآمد، سود را ماکزیم خواهد کرد؟ به بررسی این سؤال می پردازیم.

۴-۲-۴ ماکزیم کردن سود: با توجه به هدف شرکت ماکزیم کردن تابع سود

هزینه - درآمد = سود

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

مورد نظر است. برای این کار، با استفاده از رابطه ی (۲) می توان نوشت:

$$P(x) = (200x - \frac{x^2}{30}) - (72000 + 60x)$$

$$= \frac{-x^2}{30} + 140x - 72000$$

که تابعی درجه دوم است. در نتیجه، با توجه به علامت ضریب x^2 ، تابع دارای ماکزیمی است که همواره در رأس سهمی اتفاق می افتد بنابراین:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(140)}{2(-\frac{1}{30})} = \frac{70}{\frac{1}{30}}$$

$x = 2100$

$$P(2100) = \frac{-(2100)^2}{30} + 140(2100) - 72000$$

$$= \frac{-4410000}{30} + 2940000 - 72000$$

$$= -147000 + 2940000 - 72000 = 75000$$

۱- Profit

بیشترین سود برحسب تومان

$P(x) = 75000$ ماکزیمم

همچنین، شرکت باید قیمت فروش هر واحد کالا را به گونه‌ای تعیین کند تا سود ماکزیمم گردد. با استفاده از معادله‌ی (۴) می‌توان قیمت هر واحد کالا را به دست آورد:

$$P(2100) = 2000 - \frac{1}{30}(2100)$$

$$= 2000 - 70$$

$$= 1930$$

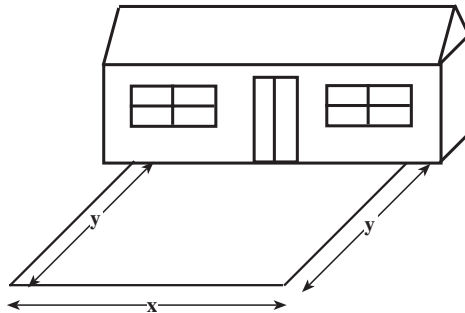
قیمت هر واحد کالا برحسب تومان

تمرین: در حالت اول که درآمد ماکزیمم بود، سود را محاسبه کنید و آن را با سود ماکزیمم

مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

فعالیت ۴-۸

جنگلبانی می‌خواهد محوطه‌ی مستطیل شکلی جلوی محل سکونت خود بسازد. برای این منظور، مقدار 100 مترمربع سیم توری به ارتفاع یک متر برای حصارکشی سه طرف محوطه در اختیار دارد. طول و عرض محوطه‌ی مستطیل شکل را چگونه انتخاب کند تا مساحت محصور شده ماکزیمم شود؟ برای حل این مسأله، می‌توان از شکل فرضی زیر کمک گرفت:



شکل ۹- مسأله جنگلبان

کمیت‌های متغیر، طول و عرض و مساحت محوطه هستند. که آن‌ها را به ترتیب x ، y و A نامگذاری می‌کنیم. سپس رابطه‌ی بین متغیرها را بررسی می‌کنیم. چون جنگلبان فقط 100 مترمربع سیم توری دارد، پس محیط محوطه مورد نظر او 100 متر است:

$$\text{محیط محوطه} = 100 = y + x + y$$

یا

$$100 = x + 2y \quad (1)$$

رابطه‌ی دیگری که بین متغیرها وجود دارد مربوط به مساحت محوطه است. چون محوطه مستطیل شکل است پس:

$$A = x \cdot y \quad (2)$$

از رابطه‌ی (۱)، x را بر حسب متغیر y به دست آورده و در رابطه‌ی (۲) جایگزین می‌کنیم
 $x = 100 - 2y$

و اگر رابطه‌ی اخیر را در (۲) جایگزین کنیم داریم

$$A = (100 - 2y)y$$

$$= 100y - 2y^2$$

بنابراین

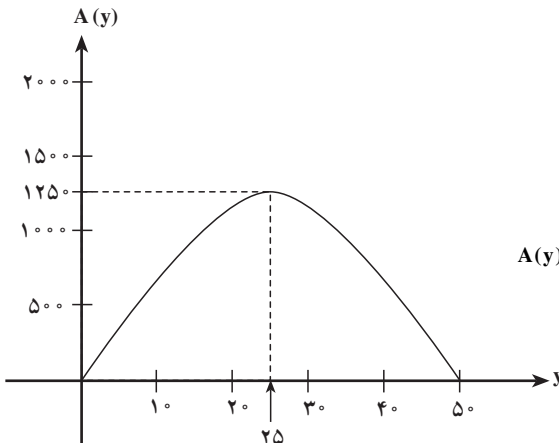
$$A(y) = 100y - 2y^2$$

چون هدف پیدا کردن طول و عرض محوطه به طریقی است که مساحت ماکزیمم شود، در نتیجه باید ماکزیمم تابع

$$A(y) = 100y - 2y^2$$

را به دست آورد.

تابع $A(y)$ در $y = 0$ و $y = 50$ مساوی صفر می‌شود (این مقادیر را خودتان به دست آورید)



شکل ۱۰- نمودار تابع $A(y) = 100y - 2y^2$

رأس سهمی نقطه‌ی ماکزیمم تابع است. چون

$$y = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-2)} = 25$$

طول رأس سهمی

پس مقدار ماکزیمم تابع برابر است با :

$$\begin{aligned} A(25) &= 100(25) - 2(25)^2 \\ &= 2500 - 1250 \\ &= 1250 \text{ مترمربع} \end{aligned}$$

مسائل

۱- هرگاه در یک جریب زمین ($4047m^2$)، ۲۰، درخت گردو با فاصله‌ی مساوی از هم کاشته شوند، پس از رشد کافی در یک سال از هر درخت ۶۰ کیلوگرم گردو برداشت خواهد شد. برای هر درخت اضافی که کاشته شود، ۲ کیلوگرم از میانگین سالانه محصول درختان کم می‌گردد. برای به‌دست آوردن بیشترین محصول گردو در هر جریب چند درخت اضافه باید کاشته شود؟ در این صورت چه قدر محصول گردو برداشت می‌شود؟

۲- یک شرکت x واحد کالا در هفته تولید کرده و به فروش می‌رساند. تابع هزینه و تابع تقاضای هفتگی با معادلات زیر داده شده است :

$$C(x) = 5000 + 2x \text{ تابع هزینه}$$

$$x = 1000 - 10P \text{ تابع تقاضا}$$

(الف) چند واحد کالا تولید کند و با چه قیمتی بفروشد تا بیشترین درآمد به‌دست آید؟

(ب) چند واحد کالا تولید کند و با چه قیمتی بفروشد تا بیشترین سود به‌دست آید؟

(پ) آیا بیشترین سود زمانی رخ می‌دهد که درآمد هم ماکزیمم گردد؟

۳- یک ویژگی از اعداد حقیقی: بعضی از اعداد کوچک‌تر از مربع خودشان هستند مثلاً

۲ کوچک‌تر از $4 = 2^2$ است و بعضی از اعداد بزرگ‌تر از مربع خودشان هستند مانند $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{9}$ اعداد صفر و یک برابر مربع خودشان می‌باشند. ولی هر عدد حقیقی بین صفر و یک همواره از مربع خودش کوچک‌تر است. عددی بین ۰ و ۱ بیابید که اختلافش با مربع آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

۴- جعبه‌ی درباز: یک کارخانه ساخت وسایل بسته‌بندی می‌خواهد جعبه‌های درباز بسازد.

ورقه‌هایی که در اختیار کارخانه است 18×18 می‌باشد. می‌خواهیم ابعاد جعبه‌ها را طوری تعیین

کنیم که بیشترین حجم را داشته باشند. برای این کار چند برگ کاغذ شطرنجی 18×18 تهیه کنید و هر بار یک مربع به ضلع $2, 1$ و ... واحد از چهار گوشه‌ی کاغذ بردارید و کناره‌ها را تا کنید سپس حجم را با شمارش تعداد مکعب‌هایی که در آن جا می‌گیرد و یا با روش محاسبه‌ی حجم مکعب، محاسبه کنید و در جدول زیر بنویسید.

الف) حجم ماکزیمم چه قدر است؟ ابعاد مربوط به حجم ماکزیمم چه قدر است؟

جدول (۷)

ضلع مربع بریده شده	۱	۲	۳
حجم			

ب) اگر طول ضلع مربع بریده شده را x بگیریم اندازه‌ی ابعاد جعبه چه قدر است؟

پ) حجم را برحسب x بیان کنید. تابع از درجه‌ی چند است؟

ت) نقاط جدول را روی یک دستگاه مختصات رسم کرده و آن‌ها را با منحنی همواری به هم

وصل کنید.

احتمال مقدماتی

در گفت و شنودهای روزمره، معمولاً از شانس وقوع پیشامدها سخن می‌گوییم. مثلاً از شانس برنده شدن تیم فوتبال مورد علاقه‌ی خود یا از شانس بارندگی در یکی از ماه‌های تابستان حرف می‌زنیم. گاهی به جای شانس از کلمه‌ی احتمال استفاده می‌شود.

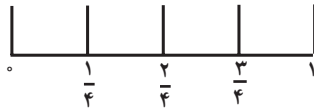
اصطلاحات شانس و احتمال در توصیف پدیده‌هایی به کار می‌روند که نمی‌توان نتیجه‌ی آنها را پیش از وقوع به‌طور قطع تعیین کرد زیرا نسبت به آنچه رخ خواهد داد اطمینان نداریم: نمی‌دانیم آیا تیم فوتبال مورد علاقه‌ی ما در بازی برنده خواهد شد؟ آیا در روز خاصی از تابستان بارندگی خواهیم داشت؟ در مقابل، پدیده‌هایی وجود دارند که می‌توان نتیجه‌ی آنها را از پیش به‌طور قطع تعیین نمود: مطمئن هستیم که فردا خورشید دوباره طلوع خواهد کرد یا اگر به جای، شکر اضافه کنیم انفجار رخ نخواهد داد. در این گونه موارد به نتیجه‌ی پیشامد مطمئن هستیم.

احتمال به چه کار می‌آید؟ شاید مهمترین کاربرد احتمال کمک به تصمیم‌گیری در جریان زندگی روزمره باشد. اگر دونده‌ای بدانند که شانس او در به‌دست آوردن مدال طلا اندک است، ممکن است تصمیم بگیرد با جدیت بیشتری تمرین کند. اگر بدانید شانس اینکه یک داروی گیاهی معینی بیماری شما را برطرف سازد اندک است، ممکن است تصمیم بگیرید که از آن دارو استفاده نکنید. اگر احتمال زیادی بدهید که باران خواهد بارید و قصد بیرون رفتن از منزل را داشته باشید، با خود یک چتر یا بارانی همراه می‌برید. در انواع تصمیم‌گیری‌های صنعتی، علمی، اجتماعی و شخصی، احتمال دخالت دارد. مثلاً مدیران صنایع تولیدی به دانستن احتمال سودآوری محصول جدید یا احتمال بی‌عیب و نقص بودن قطعه‌ی ساخته شده علاقه‌مند هستند.

پدیده‌هایی که می‌توان نتیجه‌ی آنها را پیش از وقوع به‌طور قطع تعیین کرد
پدیده‌های قطعی و پدیده‌هایی که نمی‌توان نتیجه‌ی آنها را پیش از وقوع به‌طور قطع
معین نمود، پدیده‌های تصادفی نامیده می‌شوند.

تمرین

۱- برای آشنایی بیشتر با پدیده‌های تصادفی، درباره‌ی هر کدام از پیشامدهای زیر فکر کنید. ببینید وقوع کدام یک محتمل‌تر است و شانس وقوع کدام، اندک. از مقیاس عددی زیر استفاده کنید و به هر پیشامد برحسب میزان شانس وقوعی که برای آن حدس می‌زنید، عددی بین 0 و 1 نسبت دهید. 0 را به پدیده‌های غیرممکن و 1 را به پدیده‌های قطعی نسبت دهید.



الف) طی این هفته دست کم یک روز در مدرسه غیبت خواهید داشت؛

ب) یک روز در این هفته برای صبحانه کره و عسل خواهید خورد؛

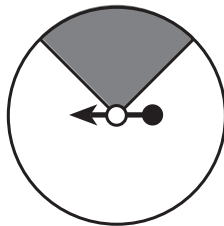
پ) در شهر شما در ماه تیر برف می‌بارد؛

ت) خورشید فردا طلوع خواهد کرد؛

ث) انسان می‌تواند دو ماه بدون آب زندگی کند؛

ج) اولین بچه‌ای که بعد از این لحظه به دنیا خواهد آمد پسر است.

۲- مطابق شکل زیر، عقربه‌ای که در مرکز صفحه لولا شده، صفحه را به دو ناحیه قرمز و سفید تقسیم کرده است. این صفحه همراه با عقربه‌ی لولا شده به آن‌را صفحه عقربه می‌گوییم.



صفحه‌ی عقربه

الف) اگر عقربه را بچرخانید و سپس رها کنید آیا شانس این که نوک عقربه روی هر کدام از این ناحیه‌ها بایستد یکسان است؟ اگر هست چرا؟ اگر نیست بیشتر احتمال می‌دهید که روی کدام ناحیه بایستد؟ چرا؟

ب) آیا می‌توانید با اطمینان بگویید که اگر عقربه را 100 بار بچرخانید لااقل یک بار نوک عقربه روی ناحیه‌ی قرمز قرار می‌گیرد؟

پ) آیا امکان دارد با 100 بار چرخاندن باز هم نوک عقربه روی ناحیه‌ی قرمز

قرار نگیرد؟

۳- به بعضی از پیشامدهایی که ممکن است در زندگی شما رخ دهند فکر کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید :

(الف) سه پیشامد قطعی را نام ببرید.

(ب) سه پیشامد غیرممکن را نام ببرید.

(پ) سه پیشامد را نام ببرید که به وقوع آن خوش بین هستید.

(ت) سه پیشامد را نام ببرید که شانس وقوع آن‌ها کم باشد.

۵-۱- آزمایش‌های تصادفی

بسیاری از پدیده‌ها و اتفاقات در زندگی روزانه شانس یا تصادفی هستند. یعنی نتیجه‌ی آن‌ها را از پیش به طور قطع نمی‌دانیم اما شاید بتوانیم همه‌ی نتایج ممکن را فهرست کنیم. با مشاهده و بررسی تعداد دفعاتی که هر کدام از آن نتایج رخ می‌دهد، می‌خواهیم به پیشامدها عددی را نسبت دهیم که معرف شانس یا احتمال وقوع آنها هستند.

پدیده‌ی ساده‌ای را در نظر می‌گیریم: داور یک بازی فوتبال می‌خواهد با پرتاب کردن یک سکه، تعیین کند که در شروع بازی، توپ در اختیار کدام یک از دو تیم باشد. آیا سکه به «پشت» می‌نشیند یا به «رو»؟ نمی‌توانیم نتیجه‌ی پرتاب را از پیش تعیین کنیم ولی می‌دانیم که فقط دو نتیجه وجود خواهد داشت. می‌توانیم با پرتاب مکرر یک سکه، و مشاهده‌ی نتیجه‌ی حاصل از آن، نتایج ممکن آزمایش پرتاب سکه را بررسی کنیم. در علم احتمال، به عملی که برای جمع‌آوری داده‌ها صورت می‌پذیرد، آزمایش می‌گوییم و اگر نتیجه‌ی این آزمایش را از پیش نتوان به طور قطع معین کرد، آن را آزمایش تصادفی می‌نامیم. آزمایش پرتاب سکه یک آزمایش تصادفی است زیرا پیش از پرتاب سکه نمی‌توان به طور قطع معین کرد که «رو» خواهد آمد یا «پشت». با این حال، تمام نتایج ممکن در این آزمایش همین دو تا هستند.

مجموعه‌ی همه‌ی نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای آن نامیده می‌شود.

۱- آن طرفی از سکه را که عدد روی آن نوشته شده است «رو» و طرف دیگر را «پشت» می‌نامیم.

فعالیت ۵-۱

یک سکه را ۵۰ بار پرتاب کنید و نتایج این آزمایش تصادفی را در جدولی همانند جدول زیر گردآوری کنید.

جدول (۱)

	خط نشان	تعداد کل
رو		
پشت		
کل		۵۰

هر بار که سکه را پرتاب می‌کنید نتیجه را با یک علامت، زیر ستون «خط نشان» ثبت کنید و در انتها آن‌ها را بشمارید و عدد حاصل را زیر ستون «تعداد کل» یادداشت کنید.

۱- نسبت تعداد دفعاتی که سکه «رو» آمده است به تعداد کل پرتاب‌ها، یعنی ۵۰ را به دست

آورید؛

به عبارت دیگر کسر

$$\text{نسبت «روها»} = \frac{\text{تعداد روها}}{\text{تعداد پرتاب‌ها}}$$

را حساب کنید.

۲- نسبت پرتاب‌هایی که «پشت» آمده است را نیز مانند قسمت ۱ حساب کنید.

۳- نتیجه‌ی آزمایش خود را با نتایجی که دیگر دانش‌آموزان کلاس به دست آورده‌اند مقایسه

کنید. آیا در نتایج تفاوتی به چشم می‌خورد؟

۴- آیا نتایج این آزمایش، همان چیزی بود که شما انتظار داشتید؟

نسبت «رو»هایی که در آزمایش پرتاب سکه به دست آمد همان فراوانی نسبی است.

اگر در 50° بار پرتاب سکه، ۱۶ بار «رو» ظاهر شود، عدد $\frac{16}{50}$ یعنی فراوانی نسبی تعداد «رو»ها،

تخمین احتمال یا شانس مشاهده‌ی «رو» در این آزمایش نامیده می‌شود. بنابراین از فراوانی نسبی برای تخمین احتمال استفاده می‌کنیم. ممکن است تعداد روهای که شما مشاهده کرده‌اید عدد دیگری باشد، در این صورت تخمین شما هم برای احتمال به دست آوردن «رو» متفاوت خواهد بود. اعداد مختلفی که با انجام فعالیت ۵-۱ برای تعداد روها به دست آورده‌اید، تخمین‌های مختلفی برای تعداد روها خواهد بود. بنابراین، تخمین احتمال رخ دادن یک نتیجه ممکن است از آزمایشی به آزمایش دیگر فرق کند.

گاهی تخمین احتمال بدون انجام آزمایش تقریباً غیرممکن است. برای مثال اگر بخواهید احتمال این که در یک تقاطع ماشین‌ها از سمت چپ وارد شوند را تخمین بزنید، باید تعدادی از ماشین‌ها را مشاهده کنید و ببینید چند تا از آن‌ها از سمت چپ وارد می‌شوند. اگر از 50° ماشینی که مشاهده کرده‌اید 20° تای آن‌ها از سمت چپ وارد تقاطع شوند، تخمین احتمال $\frac{20}{50} = 0.4$ خواهد بود.

تخمین احتمال معمولاً برای یک یا چند نتیجه از مجموعه‌ی نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی به کار می‌رود. این نتایج خاص، زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای آزمایش تصادفی را تشکیل می‌دهند که آن را پیشامد می‌نامیم. تاکنون اصطلاح پیشامد را به معنای اتفاقات روزمره و طبیعی به کار برده‌ایم ولی از این پس معنای اخیر آن مورد نظر است. تخمین احتمال پیشامد E را می‌توان با کسر

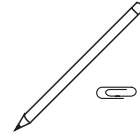
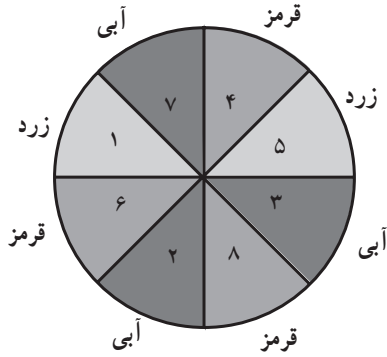
$$P(E) = \frac{\text{تعداد نتایج مشاهده شده که در } E \text{ هستند}}{\text{تعداد کل مشاهدات در آزمایش}}$$

تعریف کرده‌ایم همان فراوانی نسبی است. بنابراین اگر یک سکه را 50° بار پرتاب کنیم و ۱۶ بار «رو»

$$\text{بیاید، } E \text{ عبارت است از پیشامد «رو آمدن» و } P(E) = \frac{16}{50} = 0.32$$

فعالیت ۵-۲

مطابق شکل، یک صفحه عقربه را به هشت قسمت مساوی تقسیم کنید، به جای عقربه‌ی چرخان می‌توانید یک گیره‌ی کاغذ بردارید و آن را حول مدادی که نوک آن را در مرکز صفحه عقربه



قرار داده‌اید، بچرخانید. قسمت‌ها را شماره‌گذاری کنید و آن‌ها را با سه رنگ قرمز، زرد و آبی، رنگ کنید. عقربه را 30° بار بچرخانید و هر بار رنگی را که نوک عقربه روی آن می‌ایستد یادداشت کنید. اگر عقربه روی یک خط ایستاد، دوباره آن را بچرخانید تا روی یکی از قسمت‌ها قرار گیرد. حال به کمک داده‌هایی که به دست آورده‌اید به سؤالات زیر پاسخ دهید :

۱- در این 30° بار آیا ایستادن روی رنگ قرمز محتملتر است یا زرد؟ چرا؟
 ۲- در این 30° بار آیا ایستادن روی رنگ آبی محتملتر است یا قرمز؟ چرا؟
 ۳- اگر یک دفعه‌ی دیگر عقربه را بچرخانید، احتمال ایستادن نوک عقربه روی رنگ زرد را تخمین بزنید !

۴- اگر یک دفعه‌ی دیگر عقربه را بچرخانید، احتمال ایستادن نوک عقربه روی رنگ آبی را تخمین بزنید !

۵- اگر این عقربه را 90° بار دیگر بچرخانید، انتظار شما از ایستادن عقربه روی رنگ آبی چه عددی است؟

۶- اعدادی را که به دست آورده‌اید با آنچه دیگر دانش‌آموزان کلاس به دست آورده‌اند مقایسه کنید و تعداد کل رنگ‌های قرمز، آبی و زرد مشاهده شده توسط کل کلاس را یادداشت کنید و مجدداً به سؤالات ۱ تا ۵ پاسخ دهید.

فعالیت ۵ - ۳

یک تاس^۱ را ۶۰ بار پرتاب کنید و ببینید چه عددی ظاهر می‌شود. نتایج را در جدول زیر یادداشت کنید. مانند قبل مقابل هر عدد به ازای هر بار ظاهر شدن، یک خط در سطر خط‌نشان بکشید.

جدول (۲)

	تعداد ۱	تعداد ۲	تعداد ۳	تعداد ۴	تعداد ۵	تعداد ۶
خط نشان						
کل						

- حال به کمک داده‌هایی که به دست آورده‌اید به سؤالات زیر پاسخ دهید :
- ۱- آیا در این پرتاب‌ها، همه‌ی شش عدد را مشاهده کرده‌اید؟ آیا انتظار داشتید در ۶۰ بار پرتاب، هر یک از اعداد لااقل یک بار ظاهر شود؟ توضیح دهید ؛
 - ۲- احتمال ظاهر شدن عدد ۵ را تخمین بزنید ؛
 - ۳- احتمال ظاهر شدن عدد ۴ را تخمین بزنید ؛
 - ۴- پاسخ سؤال‌های ۲ و ۳ را مقایسه کنید ؛
 - ۵- احتمال ظاهر شدن عدد زوج را تخمین بزنید. این پاسخ را با پاسخ سؤال ۳ مقایسه کنید ؛
 - ۶- احتمال ظاهر شدن عدد بزرگتر از ۴ را تخمین بزنید ؛
 - ۷- اگر تاس را ۱۰۰ بار دیگر پرتاب کنید، چند بار ظاهر شدن عدد ۵ را انتظار می‌کشید؟
 - ۸- نتایجی را که ۱۰ نفر از دانش‌آموزان کلاس به دست آورده‌اند در جدولی مطابق جدول (۳) گردآوری کنید.

۱- تاس مکعبی است که روی وجوه آن اعداد ۱ تا ۶ نوشته شده است.

جدول (۳)

جدول مرکب						
تعداد ۶	تعداد ۵	تعداد ۴	تعداد ۳	تعداد ۲	تعداد ۱	نفر
						الف
						ب
						پ
						ت
						ث
						ج
						چ
						ح
						خ
						د

- ۹- با استفاده از داده‌های به‌دست آمده توسط این ۱۰ نفر؛
 الف) احتمال ظاهر شدن عدد ۵ را تخمین بزنید و جواب را با پاسخ سؤال ۲ مقایسه کنید؛
 ب) احتمال ظاهر شدن عدد ۴ را تخمین بزنید و پاسخ را با پاسخ سؤال ۳ مقایسه کنید؛
 پ) احتمال ظاهر شدن عدد زوج را تخمین بزنید. این پاسخ را با پاسخ سؤال ۵ مقایسه کنید.

فعالیت ۵ - ۴

مدادتان را بردارید و آماده‌ی یادداشت کردن یک عدد شوید. آماده‌اید! بی درنگ یکی از اعداد بین ۱ تا ۴ را یادداشت کنید. سپس در جدول زیر تعداد دانش‌آموزان کلاس خود را که یکی از اعداد ۱ تا ۴ را انتخاب کرده‌اند بنویسید.

جدول (۴)

۱	۲	۳	۴
---	---	---	---

۱- هر عدد چند بار انتخاب شده است؟

۲- فراوانی نسبی کدامیک از این اعداد بزرگ تر است؟

۳- اگر از بین اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴، فراوانی انتخاب عدد ۳ بیشتر از بقیه باشد، بنا بر تجربه احتمال این که شخصی خارج از کلاس شما عدد ۳ را برگزیند برابر فراوانی نسبی ۳ است. به کمک جدول فوق این احتمال را برای همه‌ی اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ تخمین بزنید.

۴- احتمال اینکه دانش‌آموزان اعداد یکی از ۱، ۲ و ۴ را انتخاب کرده باشند پیدا کنید.

تمرین ۱: در صورت وجود، دو تا از سینماهای شهر خود را انتخاب کنید^۱. یکی را (الف) بنامید و دیگری را (ب). حال از تعدادی از دانش‌آموزان مدرسه‌ی خود پرسید که به کدام یک از این سینماها رفته‌اند. توجه کنید که این دانش‌آموزان را به تصادف از میان دانش‌آموزان مدرسه انتخاب کنید. تعداد آن‌هایی را که به هر کدام از این سینماها رفته‌اند یا نرفته‌اند در جدول زیر ثبت کنید :

جدول (۵)

	به (ب) رفته است	به (ب) نرفته است	تعداد کل
به (الف) رفته است			
به (الف) نرفته است			
تعداد کل			

اکنون دانش‌آموزی را انتخاب کنید که از او پرسیده‌اید. براساس داده‌هایی که از دانش‌آموزان مورد سؤال به دست آورده‌اید :

الف) احتمال این که او به سینمای (الف) رفته باشد را تخمین بزنید ؛

ب) احتمال این که او به سینمای (ب) رفته باشد را تخمین بزنید ؛

پ) احتمال این که او اصلاً به هیچ کدام از این دو سینما نرفته باشد را تخمین

بزنید ؛

ت) اگر ۱۰۰ دانش‌آموز در مدرسه‌ی شما وجود داشته باشند که از آن‌ها

پرسیده‌اید، انتظار دارید چند نفر از آن‌ها به هر دو سینما رفته باشند؟

۱- اگر در شهر شما سینما وجود ندارد، می‌توانید دو شبکه‌ی تلویزیونی را انتخاب کنید.

۵-۲- احتمال نظری

در هر بار پرتاب سکه^۱ فقط دو نتیجه‌ی ممکن وجود دارد و شانس ظاهر شدن آن‌ها یکسان است، یعنی احتمال آمدن «رو» در پرتاب سکه، $\frac{1}{2}$ است و می‌نویسیم:

$$P(r) = \frac{1}{2}$$

به همین صورت احتمال آمدن «پشت» نیز $\frac{1}{2}$ است. در مورد پرتاب تاس، ۶ نتیجه‌ی ممکن برای اعدادی که ظاهر می‌شوند وجود دارد که شانس ظاهر شدن آن‌ها نیز برابر است. از این رو، احتمال مشاهده‌ی عدد ۳ در پرتاب یک تاس $\frac{1}{6}$ است.

مثال ۱: فرض کنید می‌خواهیم پیشامد «آمدن عدد زوج» را پیدا کنیم. سه تا از شش نتیجه‌ی ممکن یعنی اعداد ۲، ۴ و ۶ در این پیشامد قرار دارند. بنابراین احتمال آمدن عدد زوج $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ است. اگر نتایج آزمایشی، هم شانس و E یک پیشامد مربوط به این آزمایش باشد، احتمال E را به صورت

$$P(E) = \frac{\text{تعداد عناصر } E}{\text{تعداد کل عناصر}} = \frac{m}{n} \quad (1)$$

تعریف می‌کنیم. از این تعریف فقط وقتی استفاده می‌کنیم که نتایج آزمایش هم شانس هستند.

به هریک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی یک برآمد و به احتمال‌هایی که به کمک آنچه به‌طور ایده‌آل باید رخ دهد تعیین می‌گردند و داده‌های حاصل از آزمایش در آن نقش ندارند، احتمال نظری گفته می‌شود.

در حل مسائل احتمال ابتدا مجموعه‌ی همه‌ی برآمدهای ممکن آزمایش تصادفی را می‌یابیم؛ سپس پیشامدی که احتمال آن خواسته شده است را به صورت زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای معین می‌کنیم؛ در نهایت احتمال نظری آن پیشامد را به کمک قوانین احتمال به دست می‌آوریم. در

۱- منظور، سکه‌ی سالم است.

۲- از این پس قرار می‌گذاریم که به جای $P(\{\circ\})$ بنویسیم $P(\circ)$ ، به همین صورت به جای $P(\{\circ, \circ\})$ می‌نویسیم $P(\circ, \circ)$.

حالتی که برآمدها هم شانس هستند، احتمال نظری از رابطه‌ی (۱) به دست می‌آید. توجه کنید که ممکن است برآمدهای یک آزمایش تصادفی هم شانس نباشند.

احتمال نظری آمدن «رو» در یکبار پرتاب سکه $\frac{1}{4}$ است، اما وقتی سکه‌ای را 5° بار پرتاب می‌کنیم (فعالیت ۵-۱) معمولاً به طور دقیق ۲۵ «رو» به دست نمی‌آوریم. فراوانی نسبی «رو» در آزمایش 5° بار پرتاب سکه حتی از دانش‌آموزی به دانش‌آموز دیگر متفاوت است. اگر تعداد پرتاب‌ها به جای 5° بار، 1000 بار می‌بود، فراوانی نسبی نزدیک‌تر به $\frac{1}{4}$ می‌شد و عددهایی که دانش‌آموزان مختلف به دست می‌آوردند، تفاوت چندانی با هم نمی‌کرد. اگر آزمایش‌های تصادفی به دفعات زیاد تکرار شوند، احتمال تجربی به دست آمده به احتمال نظری نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. با استفاده از احتمال نظری، می‌توان احتمال وقوع پیشامد در دراز مدت را به دو طریق حدس زد:

۱- اگر بتوانیم احتمال نظری یک پیشامد را معین کنیم، می‌توانیم از آن برای اندازه‌گیری احتمال پیشامدها استفاده کنیم؛

۲- اگر نتوانیم احتمال نظری یک پیشامد را معین کنیم، باید آزمایش را انجام دهیم و با تعیین فراوانی نسبی وقوع آن پیشامد، احتمال وقوع آن را تخمین بزنیم.

فعالیت ۵-۵

- در فعالیت ۵-۲، چون صفحه عقربه را به هشت ناحیه‌ی برابر تقسیم کردیم، ایستادن عقربه روی ناحیه‌های مختلف هم شانس است. با استفاده از تعریف احتمال نظری:
- ۱- احتمال اینکه عقربه در ناحیه‌ی شماره‌ی ۳ بایستد را بیابید؛
 - ۲- احتمال اینکه عقربه در ناحیه‌ای با شماره‌ی زوج بایستد را بیابید؛
 - ۳- احتمال اینکه عقربه روی ناحیه‌ی آبی رنگ بایستد چقدر است؟
 - ۴- عقربه را 40 بار بچرخانید و فراوانی برآمدها را در جدول زیر ثبت کنید:

جدول (۶)

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	کل
تعداد دفعات مشاهده									۴۰

۵- فراوانی نسبی دفعاتی که عقربه در 40° بار چرخش در ناحیه‌ی شماره‌ی ۳ می‌ایستد چقدر است؟

۶- فراوانی نسبی دفعاتی که عقربه در 40° بار چرخش، در ناحیه‌ی زوج می‌ایستد چقدر است؟ نتیجه را با پاسخ سؤال ۲ مقایسه کنید.

۷- فراوانی نسبی آبی‌های مشاهده شده در این 40° بار چرخش چقدر است؟ نتیجه را با پاسخ سؤال ۳ مقایسه کنید؛

۸- سؤال‌های ۵، ۶ و ۷ تخمین‌های احتمال را به دست می‌دهند. اگر به جای 40° بار چرخش، عقربه را 4000° بار بچرخانیم، در آن صورت احتمال‌های نظری را در سؤال‌های ۱، ۲ و ۳ با احتمال‌های تجربی مقایسه کنید.

فعالیت ۵ - ۶

۱- هر کدام از ارقام 0 تا 9 را روی 10° کارت جداگانه بنویسید. آنگاه کارت‌ها را در یک جعبه قرار دهید و درهم بریزید. سپس بدون آنکه داخل جعبه را نگاه کنید، دست خود را داخل جعبه ببرید و یک کارت را بیرون بیاورید. احتمال اینکه عدد روی کارت الف) ۱ باشد چقدر است؟

ب) زوج باشد چقدر است؟ (صفر را عدد زوج بگیری)

پ) بزرگتر از ۷ باشد چقدر است؟

ت) بر ۳ بخش پذیر باشد چیست؟ (صفر هم بر ۳ بخش پذیر است.)

۲- اگر عدد روی kartی که از جعبه بیرون کشیده‌اید صفر نباشد آن را به داخل جعبه برگردانید و مجدداً kartی را بیرون آورید. آنقدر این کار را تکرار کنید تا عدد روی کارت بیرون آمده صفر نباشد. عدد روی این کارت را یادداشت کنید. حال کارت را به داخل جعبه برگردانید و جعبه را تکان دهید. کارت دیگری را بیرون بکشید و عدد روی آن را سمت راست عدد قبلی بنویسید تا یک عدد دو رقمی به دست آید. احتمال اینکه این عدد

الف) به ۳ ختم شود چقدر است؟

ب) زوج باشد چقدر است؟

عددهایی که به این صورت انتخاب می‌گردند، **عددهای تصادفی** نام دارند و شانس انتخاب شدن این عددها، با یکدیگر برابر است. عددهای تصادفی اغلب در انتخاب **نمونه‌های تصادفی** مورد استفاده قرار می‌گیرند. مثلاً فرض کنید ۱۰ دوست صمیمی دارید و می‌خواهید یکی از آن‌ها را به بازی بسکتبال دعوت کنید. می‌توانید آن‌ها را با شماره‌های ۰ تا ۹ شماره‌گذاری کنید و یک عدد را به تصادف از بین ۰ تا ۹ انتخاب کرده، آنگاه آن دوست خود که همان شماره را به او داده‌اید برای دعوت به بازی برگزینید.

تمرین ۲: اگر عددهای حاصل از تکرار آزمایش‌های فعالیت ۵-۶ را به دنبال هم بنویسیم، یک دنباله ۲۵۰ رقمی به ازای ۲۵۰ بار انتخاب عدد به دست می‌آید:

۰۳۲۲۲۳۳۹۹۵۱۱۲۷۳۸۵۰۳۰۳۲۵۰۱۷۸۷۰۰۰۲...

این اعداد تصادفی را در جدولی به صورت زیر مرتب می‌کنیم. نمونه‌ی از این جدول را در زیر می‌بینید. که شامل ۲۵۰ رقم است و اعداد آن به ۵ ستون تقسیم شده‌اند تا بررسی آن‌ها راحت‌تر شود.

جدول (۷)

۰۳۲۲۲	۳۹۹۵۱	۱۲۷۳۸	۵۰۳۰۳	۲۵۰۱۷
۸۷۰۰۲	۶۱۷۸۹	۹۶۲۵۰	۹۹۳۳۷	۱۴۱۴۴
۶۸۸۴۰	۹۴۲۵۹	۰۱۹۶۱	۴۲۵۵۲	۹۱۸۴۳
۸۸۳۲۳	۲۸۸۲۸	۶۴۷۶۵	۰۸۲۴۴	۵۳۰۷۷
۵۵۱۷۰	۷۱۰۶۲	۶۴۱۵۹	۷۹۳۶۴	۵۳۰۸۸
۸۴۲۰۷	۵۲۱۲۳	۸۸۶۳۷	۱۹۳۶۹	۵۸۲۸۹
۰۰۰۲۷	۴۳۵۴۲	۳۷۰۳۰	۱۴۷۷۳	۷۳۰۸۷
۳۳۸۵۵	۰۰۸۲۴	۴۸۷۳۳	۸۱۲۹۷	۸۰۴۱۱
۵۰۸۹۷	۹۱۹۳۷	۰۸۸۷۱	۹۱۵۱۷	۱۹۶۶۸
۲۱۵۳۶	۳۹۴۵۱	۹۵۶۴۹	۶۲۵۵۶	۲۳۹۵۰

در جدولی از این نوع انتظار دارید

- ۱- چند تا ۱ ببینید؟
- ۲- چند رقم زوج ببینید؟
- ۳- چند رقم بزرگتر از ۷ ببینید؟
- ۴- چند رقم بخش پذیر بر ۳ ببینید؟

۵- تعداد ۱ها، تعداد رقم‌های زوج، تعداد رقم‌های بزرگتر از ۷ و تعداد رقم‌های بخش پذیر بر ۳ را در جدول فوق بشمارید. آیا فراوانی‌ها به اعدادی که انتظار دارید نزدیک هستند؟

تمرین ۳: صفحه‌ی مربوط به ماه فروردین را از یک تقویم دیواری جدا کنید و عددهای ۱ تا ۳۱ مربوط به روزهای آن را ببرید و دقت کنید که برش‌های شما هم‌اندازه باشند. آن‌ها را درون یک جعبه بریزید و کاملاً تکان دهید. قبل از انتخاب، احتمال این را بیابید که آن عدد:

(الف) ۱۷ باشد؛

(ب) یک عدد فرد باشد؛

(پ) یک رقمی باشد.

تمرین ۴: اکنون کارتی را از درون جعبه بیرون بکشید و عدد روی آن را یادداشت کنید. سپس آن را به داخل جعبه برگردانید و جعبه را مجدداً تکان دهید و کارتی را خارج کنید. این آزمایش را ۲۰ بار تکرار کنید.

(ت) بین این ۲۰ عدد انتخاب شده، نسبت اعداد فرد به کل اعداد را بیابید و نتیجه را با پاسخ سؤال (ب) مقایسه کنید؛

(ث) بین این ۲۰ عدد انتخاب شده، نسبت اعداد یک رقمی را بیابید و نتیجه را با پاسخ سؤال (ب) مقایسه کنید؛

(ج) اگر در یکی از شش ماه اول سال به دنیا آمده باشید، احتمال این که یکی از اعداد انتخاب شده از درون جعبه، همان روز تولد شما باشد چقدر است؟

(چ) اهمیت هم‌اندازه بردن عددهای تقویم در چیست؟

۵-۳- ارتباط بین فضای نمونه‌ای و احتمال نظری

در آزمایش پرتاب سکه فقط دو نتیجه یعنی «رو» و «پشت» وجود دارد، به همین دلیل فضای نمونه‌ای آن، تنها از دو عنصر تشکیل یافته است. فضای نمونه‌ای را معمولاً با علامت S نشان می‌دهند. بنابراین در آزمایش پرتاب سکه

$$S = \{ر، پ\}$$

حال فرض کنید به جای یک سکه، دو سکه به شماره‌های ۱ و ۲ را با هم پرتاب کنیم. این نیز یک آزمایش تصادفی است. فضای نمونه‌ای این آزمایش با آزمایش پرتاب یک سکه متفاوت است. هر کدام از دو سکه می‌تواند یا «رو» یا «پشت» بیاید. چون سکه‌ها را شماره‌گذاری کرده‌ایم «رو» یا «پشت» آمدن سکه‌ی اول با «رو» یا «پشت» آمدن سکه‌ی دوم تفاوت دارد. بنابراین، چهار برآمد وجود دارد: سکه‌ی اول و دوم هر دو «رو» بیایند، سکه‌ی اول و دوم هر دو «پشت» بیایند، سکه‌ی اول «رو» و سکه‌ی دوم «پشت» بیاید، سکه‌ی اول «پشت» و سکه‌ی دوم «رو» بیاید. به این ترتیب، فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب همزمان دو سکه همان حاصل ضرب دکارتی^۱ فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب یک سکه در خودش می‌شود:

$$S = \{(ر, ر), (ر, پ), (پ, ر), (پ, پ)\}$$

با استفاده از فضای نمونه‌ای، می‌توانیم احتمال‌های نظری پیشامدهای مختلف را حساب

کنیم. برای نمونه، چون فضای نمونه‌ای شامل ۴ عنصر است، احتمال آمدن (ر, ر) برابر $\frac{1}{4}$ است:

$$P(ر, ر) = \frac{1}{4}$$

یا احتمال آمدن یک رو و یک پشت، یعنی احتمال پیشامد

$$E = \{(ر, پ), (پ, ر)\}$$

برابر با $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ است.

فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب تاس عبارت است از

$$S = .۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶.$$

با استفاده از این فضای نمونه‌ای، پیشامد ظاهر شدن عدد بزرگتر از ۴ عبارت است از

$$E = . ۵, ۶.$$

که احتمال نظری آن $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ است.

این بار، دو تاس همگن یکی به رنگ سبز و دیگری به رنگ قرمز را همزمان پرتاب می‌کنیم. پرتاب هر یک از تاس‌ها، شش نتیجه دارد که همان ظاهر شدن اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ است. پس پرتاب دو تاس، ۳۶ برآمد خواهد داشت. یعنی فضای نمونه‌ای این آزمایش، حاصل ضرب دکارتی

۱- حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه‌ی A و B عبارت است از مجموعه‌ی همه‌ی زوج‌های مرتب‌های (x, y) که x در A

و y در B است یعنی.

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

فضای نمونه‌ای تاس سبز در فضای نمونه‌ای تاس قرمز است. در جدول (۸) همه‌ی برآمدهای این آزمایش تصادفی را فهرست کرده‌ایم:

جدول (۸)

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	تاس سبز
۱	(۱, ۱)	(۱, ۲)	(۱, ۳)	(۱, ۴)	(۱, ۵)	(۱, ۶)	
۲	(۲, ۱)	(۲, ۲)	(۲, ۳)	(۲, ۴)	(۲, ۵)	(۲, ۶)	
۳	(۳, ۱)	(۳, ۲)	(۳, ۳)	(۳, ۴)	(۳, ۵)	(۳, ۶)	
۴	(۴, ۱)	(۴, ۲)	(۴, ۳)	(۴, ۴)	(۴, ۵)	(۴, ۶)	
۵	(۵, ۱)	(۵, ۲)	(۵, ۳)	(۵, ۴)	(۵, ۵)	(۵, ۶)	
۶	(۶, ۱)	(۶, ۲)	(۶, ۳)	(۶, ۴)	(۶, ۵)	(۶, ۶)	

تاس قرمز

فضای نمونه‌ای آزمایش پرتاب دو تاس را می‌توان به صورت

$$S = \{(x, y) \mid x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ و } y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

نمایش داد. به دلیل همگنی تاس‌ها، برآمدهای این آزمایش هم شانس هستند. بنابراین، احتمال نظری هر برآمد $\frac{1}{36}$ است. با این اطلاعات می‌توانیم احتمال‌های پیشامدهای مختلف را حساب کنیم. مثلاً

احتمال این‌که اعداد ظاهر شده روی دو تاس یکسان باشند، یعنی احتمال پیشامد

$$E = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}.$$

$$\text{برابر با } \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ است.}$$

تمرین ۵: انتخاب عدد از میان ارقام ۰ تا ۹ (عددهای تصادفی) را در فعالیت ۶ به یاد بیاورید.

این بار فرض کنید به جای یک عدد، دو عدد به تصادف از میان ارقام ۰ تا ۹

انتخاب شده باشد. فضای نمونه‌ای این آزمایش و تعداد عناصر آن را معین کنید.

فعالیت ۵-۷

۱- فرض کنید دسته کلید شما، ۸ کلید دارد که یکی از آن‌ها مخصوص در اصلی منزل و یکی دیگر متعلق به درِ اتاق است. شب به منزل می‌رسید و برای باز کردن در، یکی از کلیدها را به تصادف انتخاب می‌کنید.

الف) احتمال اینکه بتوانید با کلید انتخابی در منزل را باز کنید چقدر است؟

ب) احتمال اینکه نتوانید با آن در منزل را باز کنید چه قدر است؟

۲- اگر با لمس کردن کلیدها، متوجه شوید که یکی از آن‌ها خیلی کوچکتر از کلید در اصلی و اتاق است، از این رو آن را کنار می‌گذارید و با یکی از کلیدهای باقیمانده در منزل را باز می‌کنید و وارد می‌شوید. سپس برای باز کردن درِ اتاق، یکی از آن‌ها را به تصادف برمی‌گزینید.

الف) احتمال اینکه این کلید درِ اتاق را باز کند چقدر است؟

ب) احتمال اینکه این کلید درِ اتاق را باز نکند چقدر است؟

۳- از مقایسه‌ی پاسخ قسمت‌های الف و ب سؤال‌های ۱ و ۲ چه نتیجه‌ای به دست می‌آورید؟ گاهی، در هنگام بررسی پیشامدها و احتمال‌های آن‌ها، احتمال رخ ندادن پیشامد نیز مورد نظر است. اگر E یک پیشامد باشد، پیشامد رخ ندادن E را E^c نشان می‌دهیم و آن را مکمل E می‌نامیم. E^c مکمل E نسبت به فضای نمونه‌ای S است، یعنی

$$E^c = S - E$$

شاید با انجام فعالیت ۵-۷، به رابطه‌ای که بین احتمال‌های یک پیشامد و مکمل آن وجود دارد پی برده باشید. حال با بررسی نتایج آزمایش‌هایی که در فعالیت‌های گذشته انجام داده‌اید، بار دیگر این رابطه را بررسی کنید.

جدول (۹)

آزمایش	E	P(E)	E^c	P(E^c)
پرتاب سکه	رو بیاید	$\frac{1}{2}$	رو نیاید	$\frac{1}{2}$
صفحه عقربه	روی آبی بایستد	$\frac{3}{8}$	روی آبی نایستد	$\frac{5}{8}$
پرتاب تاس	چهار بیاید	$\frac{1}{6}$	چهار نیاید	$\frac{5}{6}$
پرتاب تاس	بزرگتر از ۴	$\frac{2}{6}$	کوچکتر یا مساوی ۴	$\frac{4}{6}$

در هر یک از پیشامدهای زیر، E، را ملاحظه نمایید و احتمال E را با احتمال مکمل آن یعنی E&، مقایسه کنید. می بینید که

$$\frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1, \quad \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

یعنی مجموع این دو احتمال همواره برابر ۱ است. بنابراین، برای پیشامد E و مکمل آن E& همیشه

$$P(E) + P(E\&) = 1$$

مثال ۲: فرض کنید که گزارش‌های یک ایستگاه هواشناسی نشان می‌دهد که در ۱۲۰ روز، ۸۹ بار پیش‌بینی‌های وضع هوا درست بوده است. احتمال این که پیش‌بینی بعدی این ایستگاه درست نباشد، چقدر است؟

حل: اگر پیشامد این که پیش‌بینی درست باشد را با C و پیشامد این که پیش‌بینی درست نباشد را با C& نشان دهیم،

آنگاه مطابق داده‌های به‌دست آمده، $P(C) = \frac{89}{120}$. چون $P(C) + P(C\&) = 1$ ، پس

$$P(C\&) + \frac{89}{120} = 1 \quad \text{و در نتیجه}$$

$$P(C\&) = 1 - \frac{89}{120} = \frac{120 - 89}{120} = \frac{31}{120}$$

در هر دو مورد، دو کسر وجود دارد که مخرج آن‌ها برابر است و جمع صورت‌های آن‌ها برابر مخرج می‌شود:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{و} \quad 1 + 1 = 2$$

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1 \quad \text{و} \quad 3 + 5 = 8$$

$$\frac{89}{120} + \frac{31}{120} = 1 \quad \text{و} \quad 89 + 31 = 120$$

تمرین ۶: در آزمایش صفحه عقربه، احتمال ایستادن عقربه روی ناحیه‌ی زرد رنگ $\frac{2}{8}$

است. احتمال این که عقربه روی ناحیه‌ی زرد رنگ نایستد چقدر است؟

یکی از کاربردهای جالب احتمال پیشامد مکمل، حل مسأله‌ی روز تولد است. هر کس در یکی از ۳۶۵ روز سال (سال‌های کبیسه را که ۳۶۶ روز دارند در نظر نمی‌گیریم) به دنیا می‌آید. می‌خواهیم احتمال این که از میان ۵ نفر لااقل دو نفر در یک روز سال متولد شده باشند را بیابیم. بنابراین، E پیشامدی است که در جستجوی احتمال آن هستیم

لااقل دو نفر از ۵ نفر در یک روز سال به دنیا بیایند : E

به جای محاسبه‌ی $P(E)$ ، $P(E^c)$ را محاسبه می‌کنیم و آنگاه با کم کردن آن از ۱، $P(E)$ را به دست می‌آوریم :

روزهای تولد هر پنج نفر با هم متفاوت باشد E^c

چون هر کدام از این ۵ نفر می‌توانند در هر یک از ۳۶۵ روز سال به دنیا آمده باشند، فضای نمونه‌ای مربوط به تولد هر نفر، ۳۶۵ عضو دارد. در نتیجه طبق اصل اساسی شمارش (اصل ضرب)، فضای نمونه‌ای مربوط به ۵ نفر، $۳۶۵ \times ۳۶۵ \times ۳۶۵ \times ۳۶۵ \times ۳۶۵$ و یا به طور خلاصه $۳۶۵^۵$ عضو دارد. برای پیدا کردن تعداد عناصر E^c ، می‌دانیم که نفر اول در هر یک از ۳۶۵ روز سال می‌تواند متولد شده باشد. چون باید روز تولد نفر دوم با نفر اول متفاوت باشد، نفر دوم در ۳۶۴ روز باقیمانده به دنیا می‌آید. چون روز تولد نفر سوم باید متفاوت با روزهای تولد دو نفر قبلی باشد، نفر سوم در ۳۶۳ روز باقیمانده به دنیا خواهد آمد. به همین ترتیب نفر چهارم در ۳۶۲ روز دیگر و نفر آخر در ۳۶۱ روز بعدی. طبق اصل اساسی شمارش

$$E^c = ۳۶۱ \times ۳۶۲ \times ۳۶۳ \times ۳۶۴ \times ۳۶۵ = \text{تعداد اعضای } E^c$$

و

$$P(E^c) = \frac{۳۶۱ \times ۳۶۲ \times ۳۶۳ \times ۳۶۴ \times ۳۶۵}{(۳۶۵)^۵}$$

در نتیجه

$$P(E) = ۱ - P(E^c) = ۱ - \frac{۳۶۱ \times ۳۶۲ \times ۳۶۳ \times ۳۶۴ \times ۳۶۵}{(۳۶۵)^۵}$$

تمرین ۷: علی از دوستان خود درباره‌ی ورزش مورد علاقه‌ی آنان نظرخواهی کرد و درصد تعداد دوستانش را که به ورزش معینی علاقه‌مند بودند در جدولی به صورت صفحه‌ی بعد یادداشت کرد :

اگر علی با یکی دیگر از دوستانش برخورد کند و همین سؤال را از او بپرسد، احتمال این که ورزش مورد علاقه‌ی او

جدول (۱۰)

ورزش	درصد
فوتبال	۳۶
بسکتبال	۲۱
تنیس	۱۲
شنا	۵
کشتی	۵
تیراندازی	۴
ژیمناستیک	۴
دو	۱۳

- ۱ - بسکتبال باشد چه قدر است؟
- ۲ - فوتبال نباشد چه قدر است؟
- ۳ - تنیس باشد چه قدر است؟
- ۴ - تنیس نباشد چه قدر است؟

۵ - ۵ - پیشامدهای مرکب

گاهی یک پیشامد از دو یا چند پیشامد ساده تشکیل می‌شود. برای مثال، هر برآمد در آزمایش پرتاب دو سکه را به عنوان یک پیشامد در نظر گرفتیم، در صورتی که از برآمدهای دو سکه‌ی مختلف تشکیل یافته بود. این‌گونه پیشامدها، پیشامدهای مرکب نامیده می‌شوند.

پیشامدی که از برآمدهای دو یا چند آزمایش مختلف تشکیل شده باشد، پیشامد مرکب نامیده می‌شود.

فعالیت ۵ - ۸

- ۱- دو سکه‌ی متفاوت (مثلاً یک سکه‌ی ۱۰۰ ریالی و یک سکه‌ی ۵۰ ریالی) انتخاب کنید.
- ۲- دو سکه را ۵۰ بار پرتاب کنید. نتایج این پرتاب‌ها را با علامت خط‌نشان در جدولی همانند

جدول زیر علامت بزنید.

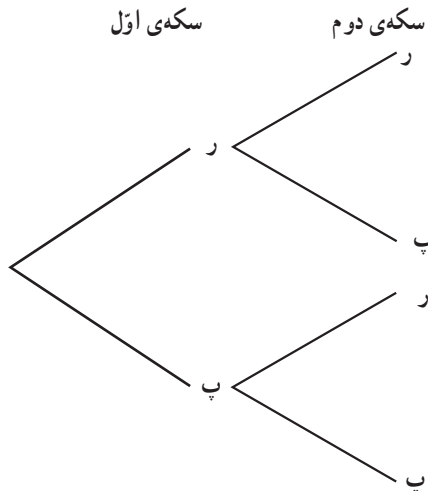
جدول (۱۱)

کل	دو پشت	یک رو و یک پشت	دورو
۵۰			

الف) در چه کسری از پرتاب‌ها «دو رو»، «دو پشت»، «یک رو و یک پشت» ظاهر می‌شود؟
ب) آیا انتظار چنین نتایجی را داشتید؟ اگر آری چرا و اگر نه چرا؟
پ) آیا سه پیشامد «دو رو آمدن»، «دو پشت آمدن» و «یک رو و یک پشت آمدن» هم‌شانس هستند؟

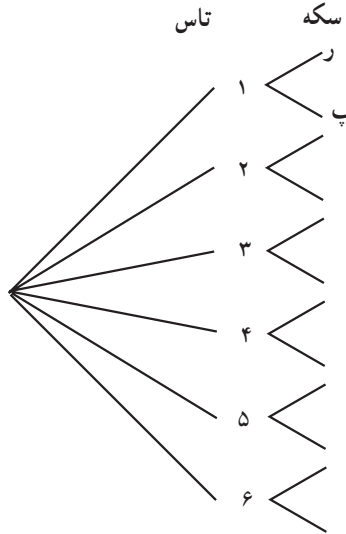
ت) احتمال ظاهر شدن یک رو و یک پشت را در پرتاب دو سکه چه قدر تخمین می‌زنید؟

برآمدهای پرتاب دو سکه را می‌توان از روش دیگری موسوم به نمودار درختی نیز به دست آورد: سکه‌ی اول یا «رو» می‌آید یا «پشت». حال اگر سکه‌ی اول «رو» آمده باشد در مقابل آن، سکه‌ی دوم می‌تواند «رو» یا «پشت» بیاید که نشان می‌دهد روی هم چهار برآمد برای این آزمایش ممکن است. نمایش مطلب فوق به شکل نمودار درختی و به صورت زیر است:



فعالیت ۵-۹

۱- ابتدا یک تاس و به دنبال آن، یک سکه پرتاب کنید. برآمدهای ممکن چیست؟ نمودار درختی زیر را که نشان دهنده‌ی برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی است کامل کنید:



الف) تاس به چند حالت می‌نشیند؟

ب) سکه به چند حالت می‌نشیند؟

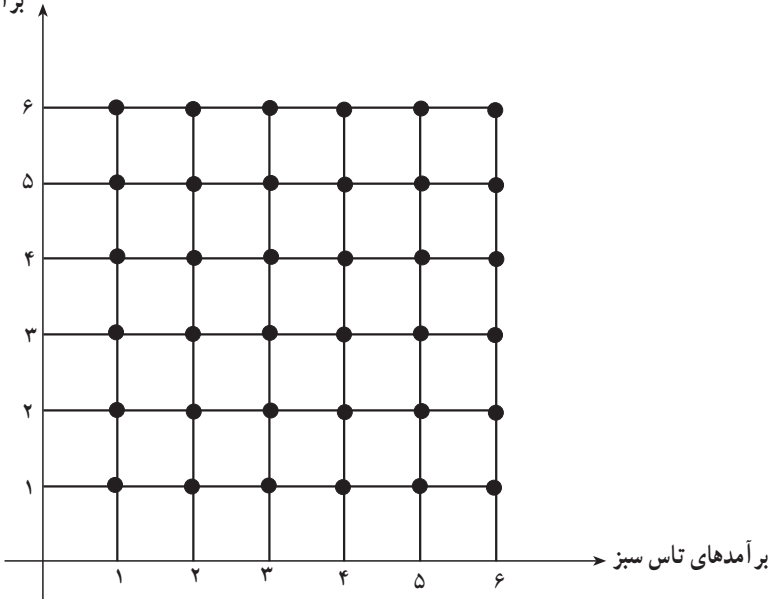
پ) این آزمایش (پرتاب تاس و به دنبال آن پرتاب سکه) چند برآمد ممکن دارد؟

ت) آیا رابطه‌ای بین پاسخ سؤال‌های الف، ب و پ وجود دارد؟

ث) آیا برآمدها هم شانس هستند؟

ج) احتمال این که در پرتاب تاس، عدد ۴ و در پرتاب سکه «رو» ظاهر شود چقدر است؟ در آزمایش پرتاب دو تاس سبز و قرمز، فضای نمونه‌ای دارای ۳۶ عضو بود، که همگی هم‌شانس بودند و برآمدهای ممکن را در یک جدول گردآوری کردیم. نمایش برآمدهای ممکن این آزمایش به صورت آرایه‌ای ۳۶ نقطه‌ای در صفحه نیز ممکن است. برآمدهای تاس سبز را روی محور افقی و برآمدهای تاس قرمز را روی محور قائم نمایش می‌دهیم. نقاط تلاقی خطوط عمودی و افقی در نقاط برآمدهای این تاس‌ها، برآمدهای ممکن این آزمایش را نشان می‌دهند.

برآمدهای تاس قرمز



فعالیت ۵ - ۱۰

به آرایه‌ی ۳۶ نقطه‌ای که برای نشان دادن برآمدهای پرتاب دو تاس سبز و قرمز به کار بردیم نگاه کنید.

۱- حول نقاط $(۱,۱)$ ، $(۲,۲)$ ، $(۳,۳)$ ، $(۴,۴)$ ، $(۵,۵)$ ، $(۶,۶)$ یک نوار رسم کنید. احتمال

اینکه اعداد ظاهر شده روی دو تاس با هم برابر باشند را به دست آورید؛

۲- حول نقاطی که نشان‌دهنده‌ی پیشامد «مجموع اعداد ظاهر شده = ۸» هستند، یک نوار

رسم کنید. توجه کنید که مثلاً نقاط $(۶,۲)$ و $(۲,۶)$ برآمدهای مجزا هستند. احتمال این که مجموع اعداد ظاهر شده روی دو تاس:

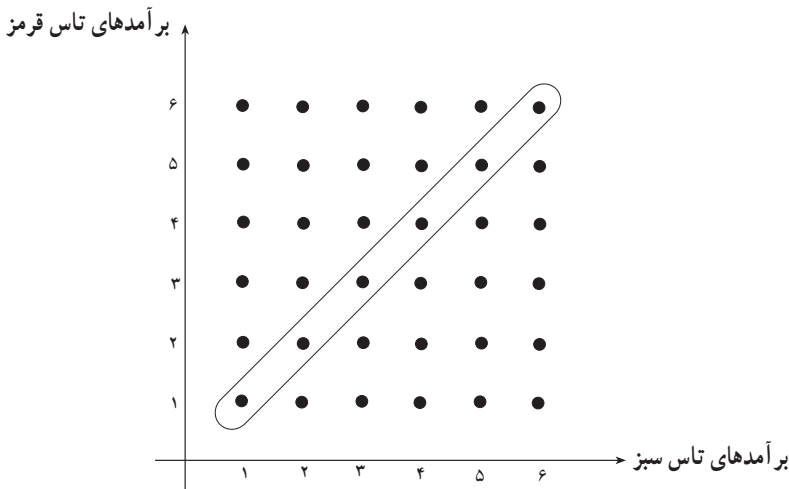
الف) ۸ باشد چه قدر است؟

ب) ۸ نباشد چه قدر است؟

پ) ۸ باشد و نیز این دو عدد با هم برابر باشند چه قدر است؟

۳- اگر اعداد ظاهر شده روی دو تاس برابر باشند. احتمال این که مجموع آن‌ها ۸ باشد چه قدر

است؟



در آزمایش‌های تصادفی، فوق، توانستیم به کمک نمودار درختی، برآمدهای آزمایش و تعداد آن‌ها را معین کنیم. برای تعیین تعداد برآمدهای ممکن یعنی تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای، کافی بود تعداد شاخه‌های انتهایی درخت را بشماریم. نتایج این آزمایش‌ها که در جدول (۸) گردآوری شده است، نشان می‌دهد که تعداد شاخه‌های انتهایی درخت را می‌توان با یک عمل ضرب به دست آورد. می‌توان به جای رسم کامل نمودار درختی مربوط به یک آزمایش مرکب و فهرست کردن تمام برآمدهای ممکن؛ با ضرب کردن، تعداد برآمدها را به دست آورد. که این عمل همان اصل اساسی شمارش (اصل ضرب) است. مثلاً اگر از شهر (الف) به شهر (ب) دو راه و از شهر (ب) به شهر (پ) سه راه موجود باشد، برای رفتن از شهر (الف) به شهر (پ) ۶ راه وجود خواهد داشت.

اگر عملی به m طریق ممکن و عمل دیگری به n طریق ممکن انجام گیرد، طبق اصل اساسی شمارش (اصل ضرب) دو عمل با هم به $m \times n$ طریق ممکن انجام خواهد گرفت.

تمرین ۸: صفحه‌ی عقربه‌ی A را به شش قطاع برابر با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ تقسیم می‌کنیم. صفحه‌ی عقربه‌ی B را نیز به ۸ قطاع برابر با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ تقسیم می‌کنیم. ابتدا عقربه‌ی مربوط به A و به دنبال آن عقربه‌ی مربوط به B را می‌چرخانیم.

(الف) تعداد برآمدهای ممکن چندتا است؟

(ب) آیا برآمدها همگی هم شانس هستند؟

(پ) احتمال اینکه عقربه‌ی A روی ناحیه‌ی ۳ و عقربه‌ی B روی ناحیه‌ی ۸ بایستد چه قدر است؟

منابع

- ۱- Adams, R.A. (1983). **Single variable calculus**. New York : Addison-Wesley Publishers Limited.
- ۲- Billstein, R.; Libeskind, S., Lott, J. (1984). **A problem solving approach to mathematics for elementary school teachers**. (3rd Ed.) Benjamin - Cummings Publishing Co.
- ۳- Devlin, K. (1994). **Mathematics the science of patterns**. Scientific American Library. Distributed by W. H. Freeman and Company.
- ۴- Hughes - Hallett, D.; Gleason, A. M. & et al. (1992). **Calculus: Produced by the consortium based at Harvard and Funded by a National Science Foundation Grant**. John Wiley & Sons, Inc.
- ۵- Hostetler, L. I. (1993). **Precalculus**. D. C. Heath and Company.
- ۶- Jacobs, H. R. (1982). **Mathematics: A human endeavor**. (2nd Ed.) W. H. Freeman.
- ۷- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. NCTM, Reston, Virginia.
- ۸- National Council of Teachers of Mathematics. (1993). **Patterns and functions: Addenda Series, Grades 5-8**. (4th printing). NCTM, Reston, Virginia.
- ۹- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). **Connecting Mathematics : Addenda Series , Grades 9-12**. NCTM, Reston, Virginia.
- ۱۰- National Research Council. (1990). **On the shoulders of Giants: New approach to numeracy**. by A. L. Steen (Ed.). National Academy Press, Washington, D.C.
- ۱۱- Polya, G. (1962). **Mathematical discovery (vol. I)**. John Wiley & Sons, INC.
- ۱۲- Polya, G. (1965). **Mathematical discovery (vol. I)**. John Wiley & Sons, INC.
- ۱۳- Quantitative Literacy Series (1987). **Exploring Probability**. Dale Seymour Publications.
- ۱۴- Sawyer, W. W. (1961). **Mathematician's delight**. (12th Ed.) Penguin Books.

۱۵- بختیاری، جواد. جوهره و ساختار هندسی خط نستعلیق.

۱۶- زنگنه، بیژن و همکاران. (۱۳۷۳). جبر و احتمال: نظام جدید آموزش متوسطه. دفتر

برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تهران.

۱۷- شهریاری، پرویز (مترجم). **خلاقیت ریاضی**، نوشته‌ی جرج پولیا، انتشارات فاطمی، (۱۳۷۲).

۱۸- واروسفل، آندره، اعداد و اسرار آن. ترجمه‌ی عباس کرکان، ۱۳۴۵، سازمان کتاب‌های

