

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی

سال سوم آموزش متوسطه

رشته‌های ادبیات و علوم انسانی - علوم و معارف اسلامی

وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف: دفتر تألیف کتابهای درسی ابتدایی و متوسطه نظری

نام کتاب: ریاضی - ۲۵۸/۶

مؤلفان: زهرا گویا، مریم گویا

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع: اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹

وبسایت: www.chap.sch.ir

رسام: هدیه بندار

صفحه‌آرا: مریم نصرتی

طراح جلد: مریم کیوان

ناشر: شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران - تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش)

تلفن: ۵-۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹-۳۷۵۱۵

چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ سیزدهم ۱۳۹۲

حق چاپ محفوظ است.

شابک ۹۶۴-۰۵-۰۹۹۳-۰ ISBN 964-05-0993-0



امام طلبه‌ها را به تحقیق و تتبع وادار می‌کردند. به شاگردان مجال می‌دادند تا نظرات خود را بیان کنند. اگر روزی در سر درس کسی اشکال نمی‌کرد، امام با حالت اعتراض می‌فرمودند :
«مگر اینجا مجلس ختم است که ساکت نشستہ اید».

فهرست مطالب

فصل اوّل

۱- تابع

۱

۱-۱- متغیر مستقل و متغیر وابسته؛

۶

دامنه و بُرد تابع

۱۲

۱-۲- نمایش تابع

۱۴

۱-۳- نماد تابع

۱۵

۱-۴- مقدار تابع

۱۸

۱-۵- محاسبه مقدار تابع

۲۱

۱-۶- عملیات با تابع‌ها

۲۶

۱-۷- رسم نمودار تابع

۲۷

۱-۷-۱- نمودار تابع خطی

۱-۷-۲- قاعده رسم نمودار

۳۰

تابع خطی

۳۷

۱-۸- خانواده تابع‌های خطی

۴۱

۱-۹- خانواده تابع‌های توانی

فصل دوم

۵۰

۲- معادله و تابع‌های درجه دوم

۵۲

۲-۱- تابع درجه دوم

۲-۲- تخمین جواب‌های معادلات

۵۲

درجه دوم

۵۴

۲-۳- حل معادله درجه دوم

۲-۳-۱- حل معادله درجه دوم با

استفاده از خاصیت

۵۷

ریشه زوج

۲-۳-۲- حل معادله درجه دوم

۵۹

به روش مربع کامل کردن

۲-۳-۳- فرمول حل معادله درجه

۶۲

دوم در حالت کلی

۷۰

۲-۴- معادله‌های کسری

۷۱

۲-۵- حل معادلات رادیکالی

۷۵

۲-۶- کاربردهای معادله درجه دوم

۲-۷- رسم نمودارهای تابع درجه

۸۲

دوم

۲-۷-۱- رأس سهمی و نقاط تلاقی

سهمی با محورهای

۸۸

مختصات

فصل سوم

۳- ترکیبیات

۹۶

۹۷

۳-۱- اصل اساسی شمارش

۱۰۵

۳-۲- انتخاب‌های مستقل و وابسته

۱۰۸

۳-۳- جایگشت

۳-۳-۱- جایگشت‌های r شیء

۱۱۳

از n شیء متمایز

۱۱۶

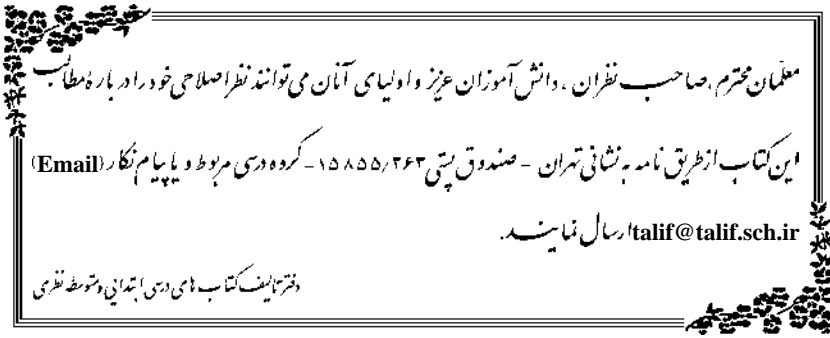
۳-۳-۲- جایگشت‌های متمایز

۱۲۰

۳-۴- ترکیب

۱۲۹

منابع



به نام خداوند جان و خرد کزین برتر اندیشه برنگذرد

پیشگفتار

در عصر حاضر، که به حق عصر دانایی لقب گرفته، گستره‌ای از اطلاعات گوناگون پیش روی هر یک از انسانها است. در چنین شرایطی، کسانی توان مقابله و رویارویی با جهان پیشرفته را دارند که دارای ذهنی بویا، متفکر و نقاد بوده و توانایی پردازش اطلاعات، انتخاب مفیدترین آنها از بین حجم وسیع اطلاعات در دسترس را داشته باشند تا بتوانند در زمان مناسب بهترین تصمیم ممکن را گرفته و از دور عقب ماندگی و ناآگاهی رها گردند.

دانش آموزان امروز که به عنوان نسل جوان جامعه ما در مدخل ورود به این عصر قرار گرفته اند باید بیاموزند و به خوبی بیاموزند تا از دانش و آگاهیهای روز بهره گرفته و توانایی تکنولوژیکی مناسبی فراهم نمایند تا قدرت رقابت با جهان توسعه یافته را در نوآوری و تولید داشته باشند. آنچه مسلم است از عوامل اصلی و زیربنایی پیشرفت در زمینه تکنولوژی، دانش ریاضی است. از این رو تمامی دانش آموزان نیازمند هستند که ریاضی بیشتر و اغلب متفاوت را فرا بگیرند. ریاضی ای که بتواند خواسته‌های افراد دارای علایق متفاوت، حتی آنهایی که غیرمتعارف اما مؤثر و عمیق می‌اندیشند و یا افراد متعلق به گروههای خاص (مانند نابینایان) را ارضا نماید.

ریاضی واقعی با داده‌های واقعی سر و کار دارد. داده‌هایی که اغلب غیرصریح، پیچیده و متنوع هستند. ریاضی واقعی مدل‌ساز پدیده‌های طبیعی است و تکنولوژی بستر مناسب چنین ریاضیاتی است. تکنولوژی فرصت توسعه مفاهیم ریاضی و گسترش انتخاب را ایجاد کرده و باعث توسعه مهارتهای کیفی می‌شود. برای مثال توانایی‌های حدسیه‌سازی، مدل‌سازی، استدلال کردن

به روشهای مختلف و حل مسأله در یک پارادایم تکنولوژیکی به خوبی قابل ایجاد هستند. در چنین پارادایمی یادگیری دیگر حفظ کردن، دریافت و پس دادن مطالب نیست. یادگیری به معنای درگیر شدن، ساختن، اشتباه کردن، دوباره ساختن و تولید دانش جدید است. برای ایجاد فرصتهای مناسب و متناسب با ریاضی بیشتر و متفاوت برای تمامی دانش‌آموزان بایستی کلاسهای درس ریاضی، دوباره نگری شده و تبدیل به اجتماعات یادگیری شوند. این دوباره‌نگری نیازمند توجه به فرهنگ ریاضی و فرهنگهای بومی است که در آن ریاضی تدریس می‌شود (بیشاب، دومین کنفرانس آموزش ریاضی).

تدریس مؤثر ریاضی نیازمند درک چیزهایی است که دانش‌آموزان می‌دانند و چیزهایی که نیاز به یادگیری آن دارند. پس از اطمینان از درک دانسته‌ها و نیازهای دانش‌آموزان، بایستی کوشید تا با به چالش انداختن و حمایت آنان، این گروه را در فرایند یادگیری سهیم نمود. به همین دلیل توصیه می‌شود تدریس از طریق حل مسأله، کار در گروههای کوچک، بحث همگانی در کلاس و نوشتن نقادانه (بازتابی) درباره موضوعهای بحث شده انجام گرفته و یا حتی الامکان فعالیتهای کتاب در گروههای کوچک به بحث همگانی گذاشته شود. بدین طریق دانش‌آموزان درگیر حل مسأله و انتخاب استدلال موجه‌تر از بین چند استدلال صحیح و یا انتخاب بهترین راه برای حل یک مسأله شده و این توانایی کیفی به تدریج در آنان ایجاد می‌گردد.

در این قرن، همه دانش‌آموزان متوسطه به‌طور فزاینده‌ای برای ورود به آموزش عالی، اشتغال و ایفای وظیفه شهروندی به ریاضیات متناسب با نیازهای خود احتیاج دارند. به همین دلیل کتاب حاضر به منظور توسعه دانش ریاضی و استمرار آموزش ریاضی دانش‌آموزان رشته علوم انسانی تدوین شده است. در تدوین مطالب، سعی بر این بوده است تا دانش‌آموزان با کاربردهای ریاضی در زندگی روزمره تا حدودی آشنا شده، بر ارزش ریاضی در زندگی خود پی برده و قادران راهگشاییهای ریاضی برای حل مسایل خود باشند. از این گذشته انتظار می‌رود بسیاری از مهارتهای کمی و کیفی ریاضی به‌طور ضمنی در دانش‌آموزان ایجاد شود که از آن جمله می‌توان به توانایی تصمیم‌گیری و انتخاب اشاره نمود.

در تألیف کتاب هدفهای زیر مورد توجه بوده است :

۱- ادامه آموزش ریاضی سال اول و دوم جهت حفظ تداوم یادگیری ریاضی، تعمیق آموخته‌ها، توسعه مفاهیم جدید متناسب با نیازهای رشته علوم انسانی و علوم و معارف اسلامی و ایجاد مبانی لازم برای یادگیری ریاضی پایه پیش‌دانشگاهی. مثالهای حل شده در کتاب و مجلات ریاضی به این هدف کمک می‌کند اما بخش مجلات ریاضی و زنگ تفریح ریاضی برای مطالعه

- علاقه‌مندان بوده و جهت طرح سؤالات امتحانی در نظر گرفته نشده است.
- ۲- آشنایی با مفاهیم پراستفاده ریاضی، تکنیکهای به‌کارگیری این مفاهیم و ایجاد مهارت‌های عملیاتی و کاربردی از طریق فعالیتهای مختلف.
- ۳- توجه به تفاوت‌های فردی با توجه به تنوع رشته‌های علوم انسانی و معارف اسلامی و تنوع دانش‌آموزانی که وارد این رشته‌ها می‌شوند.
- ۴- ایجاد علاقه و نگرش مثبت به ریاضی در دانش‌آموزان.
- ۵- افزایش توانایی حل مسأله از طریق طراحی فعالیتهای متنوع و باز - پاسخ برای رسیدن به درک رابطه‌ای.
- ۶- استفاده از تکنولوژی، به‌خصوص ماشین حساب، به‌عنوان پداگوژی، نه آنکه فقط ابزار محاسباتی برای افزایش مهارت‌های شناختی، مهارتی و نگرشی نسبت به ریاضی.
- ارزشیابی موفقیت تحصیلی باید به‌طور مستمر و براساس نوع فعالیتهای انجام شده توسط دانش‌آموزان در کلاس درس صورت پذیرد. البته ارزشیابی‌های پایانی نیز پاسخگوی بخشی از ارزشیابی جامع خواهد بود.
- کوتاه سخن اینکه ارزیابی باید حامی یادگیری ریاضیات مهمی باشد که دانش‌آموز یاد گرفته است و اطلاعات مفیدی، هم به معلمان و هم به دانش‌آموزان ارائه نماید.
- لازم به ذکر است که براساس نظرخواهی از معلمان گرامی، که به‌طور تصادفی انجام شده است و بازخوانی نوشته‌های اولیه توسط عده‌ای از دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز، جرح و تعدیلهایی در سرفصل برنامه‌های پیش‌بینی شده و مطالب تهیه شده صورت گرفته است و امیدواریم کتاب حاضر با خواسته‌ها و توقعات اکثریت افراد استفاده‌کننده همراستا باشد. با این وجود، از آنجا که برآورده کردن خواسته‌های همگان امکان‌پذیر نیست، امیدواریم کژیها و کاستیها را بر ما ببخشایند و با دیده اغماض بنگرند.
- از همه عزیزانی که به‌نحوی با این کتاب در ارتباطند، تقاضا داریم نقطه نظرات و انتقادات خود را مرقوم نموده و ما را از راهنماییهای خود بهره‌مند فرمایند.
- در پایان لازم می‌دانیم از راهنماییها و زحمات بی‌شائبه و گرانقدر و خالصانه سرکار خانم سهیلا غلام‌آزاد که در تمام مراحل تدوین کتاب حضور فعال داشته و مساعدت لازم را نمودند، تشکر و قدردانی کرده و برایشان آرزوی توفیق کنیم. مطمئناً بدون کمکهای مؤثر ایشان تدوین این کتاب میسر نمی‌شد.

تابع

ظهر گرم تابستان را به یاد آورید! وقتی که دوست دارید بعد از ظهر چرتی بزنید و صدای جیرجیرک‌ها مانع می‌شوند! شاید فکر کنید چرا جیرجیرک‌ها در روزهای گرم تابستان، از همیشه پُر سر و صداتر هستند و بیشتر جیرجیر می‌کنند؟ اگر به ویژگی ظهر گرم تابستان؛ که همان درجهٔ حرارت بالاست؛ توجه کنید، علت را یافته‌اید.

همین‌طور است! تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها، با درجهٔ حرارت متناسب است. یعنی هر چه هوا گرم‌تر باشد، تعداد جیرجیرِ جیرجیرک‌ها نیز، بیشتر می‌شود.



دانشمندان علوم تجربی، بین تعداد جیرجیر جیرجیرک‌ها در هر دقیقه و درجهٔ حرارت به سانتیگراد، رابطهٔ زیر را پیدا کرده‌اند.

$$n = 7/5C - 32$$

اگر تعداد جیرجیرها در هر دقیقه را با n و درجهٔ حرارت به سانتیگراد را با C نشان دهیم، آنگاه این رابطهٔ تجربی^۱ را می‌توانیم به صورت فرمول زیر بنویسیم:

$$n = 7/5C - 32 \quad (1)$$

فعالیت ۱-۱

۱- در گرمای ۱۶ درجهٔ سانتیگراد، تعداد جیرجیرها در هر دقیقه چندتاست؟

۲- در گرمای ۱۰ درجهٔ سانتیگراد، تعداد جیرجیرها در هر دقیقه چندتاست؟

جدول ۱

۳۲	۲۷	۲۱	۱۸	۱۶	۱۵	۱۰	۴	درجهٔ حرارت به سانتیگراد
					۸۰/۵			تعداد جیرجیر جیرجیرک‌ها در هر دقیقه

۳- اعداد به دست آمده در بندهای ۱ و ۲ را در جدول فوق بنویسید و جدول را

کامل کنید:

۴- در مورد تعداد جیرجیرها در چهار درجهٔ سانتیگراد چه می‌گویید؟

۵- در صفر درجهٔ سانتیگراد، آیا صدای جیرجیری از جیرجیرک‌ها شنیده

می‌شود؟

درست حدس زدید! نطق جیرجیرک‌ها در سرما خاموش می‌شود!

۶- به فرمول (۱) و جدول (۱) توجه بیشتری کنید. آیا می‌توانید برای هر درجهٔ

حرارت به سانتیگراد، تعداد جیرجیرهای متفاوتی پیدا کنید؟ دلیل خود را برای پاسخی

که می‌دهید، بنویسید.

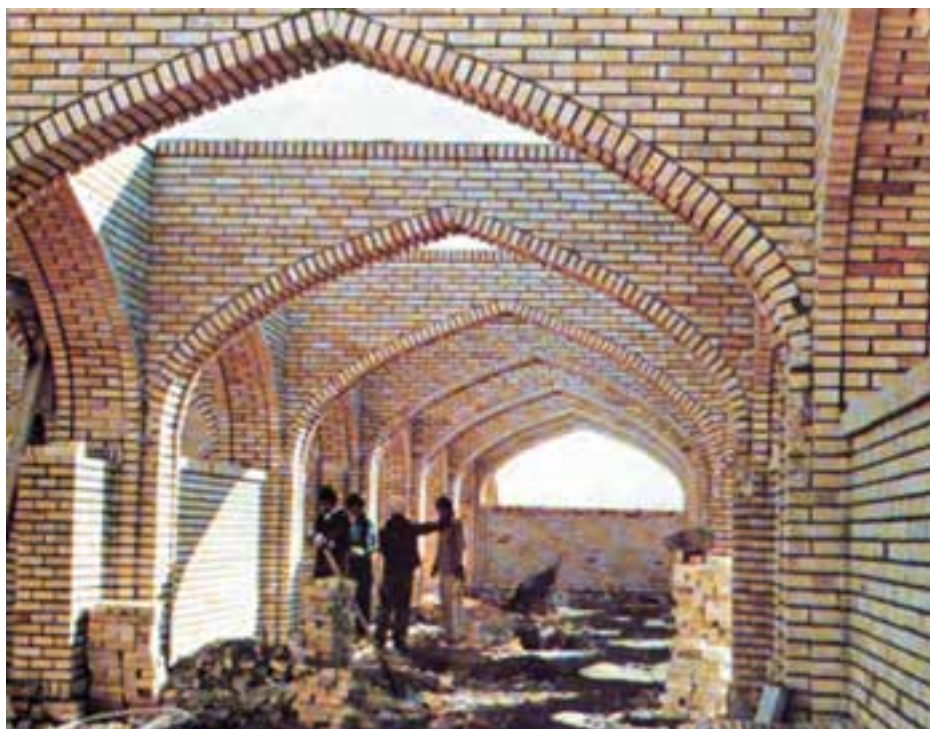
۱- توجه کنید که این فرمول، حاصل مشاهدات متعدد، منظم کردن آن مشاهدات و پیدا کردن الگویی در آنها بوده است که

فرمول پیشنهادی نشان‌دهندهٔ آن الگوست.

پاسخ‌های خود را به خاطر بسپارید. این پاسخ یک نتیجه مهم را معرفی می‌کند. دوباره به آن باز می‌گردیم.

فعالیت ۱-۲

یک بنا و یک کارگر ساختمانی با هم در یک محل مشغول به کار هستند. کارگر ساختمانی روزی ۸ ساعت (با احتساب ساعت نماز و ناهار) و بنا، روزی ۶ ساعت کار می‌کنند. دستمزد کارگر ساختمانی ساعتی ۵۰۰ تومان و دستمزد بنا (به دلیل کار تخصصی که می‌کند)، ساعتی ۱۲۵۰ تومان است. کارگر ساختمانی از ۸ صبح و بنا از ۱۰ صبح، مشغول به کار می‌شوند.



نمای داخلی کتابخانه تازه تأسیس هویزه

۱- جدول ۲ را کامل کنید :

جدول ۲

زمان	ساعت‌هایی که کارگر ساختمانی کار کرده	دستمزد کارگر ساختمانی به تومان	ساعت‌هایی که بنا کار کرده	دستمزد بنا به تومان
۸ صبح	—	—	—	—
۹ صبح	۱	۵۰۰	—	—
۱۰ صبح	۲	$2 \times 500 = 1000$	—	—
۱۱ صبح	۳	$3 \times 500 = 1500$	۱	۱۲۵۰
۱۲ ظهر				
۱ بعد از ظهر				
۲ بعد از ظهر				
۳ بعد از ظهر				
۴ بعد از ظهر				

۲- بعد از آن که کارگر ساختمانی، ۴ ساعت کار کرد، بنا چند ساعت کار کرده است؟

۳- چگونه دستمزد کارگر ساختمانی و بنا را، از روی ساعت‌هایی که کار کرده‌اند،

مشخص می‌کنیم؟

۴- فرمولی پیدا کنید که با آن، دستمزد بنا را از روی تعداد ساعت‌هایی که کارگر

ساختمانی کار کرده است، تعیین کنیم.

۵- بعد از ۴ ساعت کار کردن کارگر ساختمانی، دستمزد او بیشتر است یا دستمزد

بنا؟ (یعنی در ساعت ۱۲ ظهر)

۶- بعد از ۸ ساعت کار کردن کارگر ساختمانی (در ساعت ۴ بعد از ظهر)،

دستمزد او بیشتر است یا دستمزد بنا؟ چرا؟

۷- آیا بعد از تعداد ساعت کار انجام شده، کارگر ساختمانی می‌تواند دو دستمزد

متفاوت دریافت کند؟ چرا؟

۸- آیا بعد از تعداد ساعت کار انجام شده، بنا می‌تواند دو دستمزد متفاوت دریافت

کند؟ چرا؟

پاسخ سؤال ۶ فعالیت ۱-۱ و پاسخ سؤال‌های ۷ و ۸ فعالیت ۲-۱ را با هم

مقایسه کنید و نتیجه را با بیان خود، بنویسید.

همان‌طور که خود نتیجه گرفتید، در هر درجهٔ حرارت، تعداد جیرجیرها مشخص بود؛ در مقابل تعداد ساعت کار انجام‌شده توسط کارگر ساختمانی نیز، دستمزد او مشخص بود، هم‌چنان که در مقابل تعداد ساعت کار انجام‌شده توسط بنا نیز، دستمزد او مشخص بود.

هم‌چنین، تعداد جیرجیرها از درجهٔ حرارت تبعیت می‌کردند و دستمزد کارگر ساختمانی و بنا، از تعداد ساعت‌هایی که هریک کار کرده بودند، تبعیت می‌نمودند، در واقع، تعداد جیرجیرها تابعی از درجهٔ حرارت و دستمزد کارگر ساختمانی و بنا، تابعی از ساعت‌های کاری است.

بنابراین:

یک کمیت مانند n (تعداد جیرجیر جیرجیرک‌ها)، تابعی از یک کمیت دیگر مانند C (درجه حرارت برحسب سانتیگراد) است، اگر برای هر مقدار C ، یک مقدار منحصر به فرد برای n نتیجه شود، این را به صورت $n = f(C)$ (بخوانید اف C) نشان می‌دهیم.

در واقع:

اگر درجهٔ حرارت‌ها بر حسب سانتیگراد را مجموعهٔ A و تعداد جیرجیر جیرجیرک‌ها در هر دقیقه را مجموعهٔ B بنامیم، یک تابع f از A به B ، قانونی است که به هر عضو C در مجموعهٔ A ، دقیقاً یک عضو n از مجموعهٔ B را نسبت می‌دهد. مجموعهٔ A دامنهٔ^۲ تابع f و مجموعهٔ B ، بُرد^۳ تابع f نامیده می‌شود.

پس در حالت کلی، می‌توانیم تعریف زیر را برای تابع داشته باشیم:

تعریف

یک کمیت مانند y ، تابعی از یک کمیت دیگر مانند x است، اگر برای هر مقدار x ، یک و فقط یک مقدار برای y ، نتیجه شود. این تابع را به صورت $y = f(x)$ نشان می‌دهیم.

می‌توانیم تابع را به صورت دیگری نیز تعریف کنیم.

۱- اف (f) اَوَّل وَاوَّةُ Function به معنی تابع است.

۲- Domain

۳- Range

تعریف

یک تابع f از مجموعه A به مجموعه B ، قانونی است که به هر عضو x در مجموعه A ، دقیقاً یک عنصر y از مجموعه B را نسبت دهد. مجموعه A دامنه تابع f و مجموعه B ، بُرد تابع f نامیده می‌شود.

تمرین ۱

با توجه به تعریف تابع، آیا جدول ۲ که دستمزد کارگر ساختمانی و بنا را برحسب تعداد ساعت‌هایی که هریک کار کرده‌اند، نشان می‌دهد؛ یک تابع را نشان می‌دهند؟ چرا؟ توضیح دهید.

در فعالیت‌های ۱-۱ و ۱-۲ دیدید که با تغییر درجه حرارت و تعداد ساعت؛ تعداد جیرجیرها و مقدار دستمزدها، تغییر می‌کند. به کمیتی که تغییر می‌کند، متغیر گفته می‌شود.

تمرین ۲

در فعالیت‌های ۱-۱ و ۱-۲، متغیرها را نام ببرید.

تمرین ۳

فرق بین متغیرهای فعالیت ۱-۱ چیست؟

تمرین ۴

متغیرهای فعالیت ۱-۲، چه فرقی با هم دارند؟

۱-۱ متغیر مستقل و متغیر وابسته؛ دامنه و برد تابع

در فعالیت ۱-۱ تغییرات n یعنی تعداد جیرجیرها در هر دقیقه، وابسته به تغییرات درجه

حرارت به سانتیگراد یعنی C است. پس C متغیر مستقل و n، متغیر وابسته است. در فعالیت ۱-۲ نیز، تغییرات R یعنی دستمزد در هر ساعت، وابسته به تغییرات زمان، یعنی تعداد ساعت‌های کاری یا h است. پس h متغیر مستقل، و R متغیر وابسته است. با این اطلاعات، می‌توانیم دامنه و بُرد یک تابع را تعریف کنیم:

تعریف

دامنهٔ یک تابع، مجموعهٔ مقدارهایی است که یک متغیر مستقل می‌تواند داشته باشد.

بُرد یک تابع، مجموعهٔ مقدارهایی است که یک متغیر وابسته می‌تواند داشته باشد.

مثال

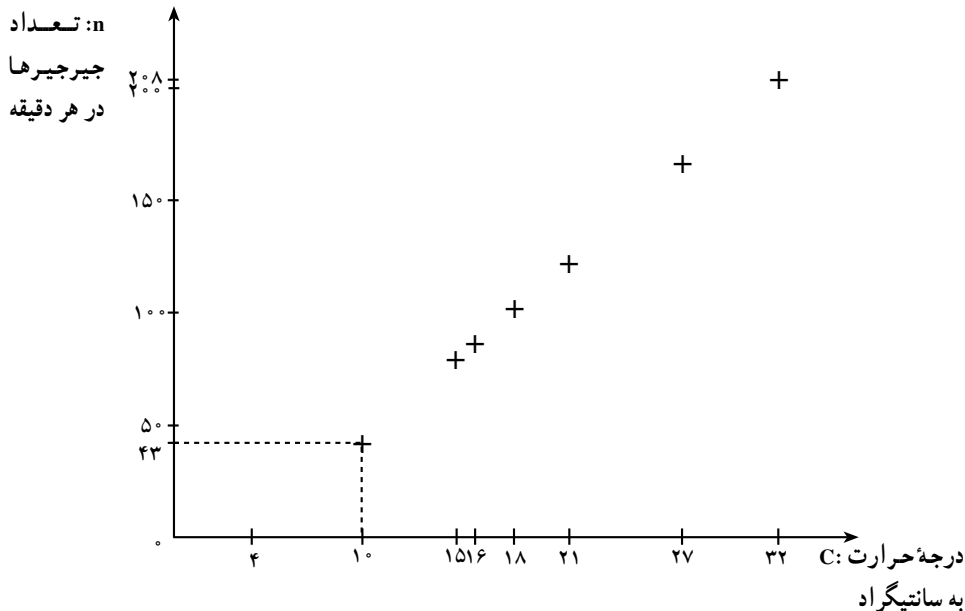
نمودار تابع $n = 7/5C - 32$ را رسم کنید و دامنه و بُرد آن را مشخص کنید.
 حل: جدول ۱ را که تکمیل کرده‌اید، دوباره می‌نویسیم:

جدول ۳

۳۲	۲۷	۲۱	۱۸	۱۶	۱۵	۱۰	۴	درجهٔ حرارت به سانتیگراد
۲۰۸	۱۷۱	۱۲۶	۱۰۳	۸۸	۸۱	۴۳	۰	تعداد جیرجیرک‌ها در هر دقیقه ^۱

هر جفت از اعداد ردیف اول و دوم، یکی از نقاط نمودار این تابع است که آنها را در صفحهٔ مختصات مشخص می‌کنیم و سپس، نمودار را رسم می‌کنیم.

۱- توجه داشته باشید که فرمول $n = 7/5C - 32$ یک یافتهٔ تجربی و تقریبی است و چون نیم جیرجیر معنای واقعی ندارد، در نتیجه، وقتی که تعداد جیرجیرها عدد اعشاری می‌شود، آن عدد را گرد می‌کنیم و از اعشار آن، صرف نظر می‌نماییم.



اگر $n = 7/5C - 32$ را فقط یک رابطه ریاضی بین n و C در نظر بگیریم، هر مقدار حقیقی برای C ، ممکن است و همین طور، هر مقدار حقیقی برای n ، ممکن می شود. اما اگر به این معادله، به عنوان رابطه بین تعداد جیرجیر جیرجیرکها در هر دقیقه و درجه حرارت برحسب سانتیگراد نگاه کنیم، در نتیجه، C نمی تواند کمتر از 4 درجه باشد، زیرا همان طور که در فعالیت 2-1 دیدید، n زیر محور قرار می گیرد و منفی می شود و منفی بودن تعداد جیرجیرها معنایی ندارد.

هم چنین، بالاترین درجه حرارت ثبت شده توسط اداره هواشناسی، تقریباً $58^{\circ}C$ است، پس این فرمول؛ برای درجه حرارت بیشتر از $58^{\circ}C$ ، جواب نمی دهد. در نتیجه، برای تابع $n = 7/5C - 32$ ،

دامنه تابع: تمام مقادیرهای C بین $4^{\circ}C$ و $58^{\circ}C$

بُرد تابع: تمام مقادیرهای n بین $(7/5 \times 4) - 32$ و $(7/5 \times 58) - 32$ یعنی تمام

مقادیرهای n بین 0 و 403

بنابراین، می توانیم بگوییم که

$$n = 7/5C - 32$$

در دامنه $4 \leq C \leq 58$ ، نشان داده می شود.

مثال

دامنه $y = x^2$ را تعیین کنید.

حل: در حالت کلی، دامنه این تابع، مجموعه اعداد حقیقی (\mathbb{R}) است، با این حال، اگر از

$y = x^2$ ، برای نشان دادن مساحت مربعی با طول ضلع x استفاده شود؛ آن گاه، فقط مقدارهای مثبت x را در نظر می‌گیریم (چرا؟) و دامنه را به اعداد مثبت محدود می‌کنیم.

مثال

دامنه تابع‌های زیر را مشخص کنید:

الف) $y = x^3 + 1$

ب) $y = \frac{1}{x+2}$

پ) $y = \sqrt{4-x}$

حل:

الف) دامنه $y = x^3 + 1$ تمام اعداد حقیقی است زیرا دلیلی برای محدود کردن x در این تابع، وجود ندارد.

ب) دامنه $f(x) = \frac{1}{x+2}$ تمام اعداد حقیقی به جز $x = -2$ است. زیرا اگر $x = -2$ باشد، آن گاه مخرج مساوی صفر شده و تقسیم عدد بر صفر بی‌معنی است، پس مقدار تابع، عدد حقیقی نخواهد بود.

پ) چون مقدار زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد، پس مقدار $4-x$ باید بزرگتر یا مساوی صفر شود. یعنی

$$4 - x \geq 0$$

با اضافه کردن x به طرفین نامعادله نتیجه می‌شود.

$$4 - x + x \geq x$$

$$4 \geq x \quad \text{یا}$$

پس برای آن که مقدار زیر رادیکال منفی نشود، x باید کوچکتر یا مساوی ۴ باشد. بنابراین دامنه تابع در این حالت مجموعه همه اعداد حقیقی کوچکتر یا مساوی ۴ است.

دامنهٔ تابع‌های زیر را پیدا کنید :

الف) $y = \frac{1}{x-3}$

ب) $y = 3x^3 - 4$

پ) $y = \sqrt{x-9}$

مجلهٔ ریاضی

تابع‌ها، نقش مهمی در علوم بازی می‌کنند. بارها دیده‌اید که یک کمیت، تابعی از یک کمیت دیگر است. دانشمندان علوم تجربی و ریاضیدان‌ها، سعی کرده‌اند تا برای این تابع‌ها، فرمولی پیدا کنند تا روابط بین کمیت‌ها را نشان دهد.

برای مثال، تا قبل از سال ۱۵۹۰، هیچ ایدهٔ کمی در مورد درجهٔ حرارت وجود نداشت. البته مردم، اندیشه‌های نسبی مانند گرمتر و سردتر را درک می‌کردند و با بعضی اندیشه‌های مطلق مانند داغ یعنی جوش آمدن و سرد یعنی منجمد شدن، آشنایی داشتند.



گالیله، فیزیکدان و منجم
ایتالیایی (۱۶۴۲-۱۵۶۴)

با این حال، اندازهٔ عددی برای درجهٔ حرارت، وجود نداشت. بالاخره، گالیله با نبوغ خویش، تشخیص داد که منبسط‌شدن مایعات بر اثر گرم‌شدن، کلید اندازه‌گیری درجهٔ حرارت است.

گالیله؛ اولین کسی بود که به درجهٔ حرارت، به عنوان تابعی از حجم مایع، توجه کرد.

پیدا کردن تابعی که معرف یک موقعیت داده شده باشد، ساختن یک مدل ریاضی نامیده می‌شود. چنان مدلی، می‌تواند روابط بین متغیرها را روشن کند و در نتیجه، به ما کمک می‌کند تا بتوانیم پیش‌بینی کنیم.

همان‌طور که در فعالیت ۱-۱ و ۱-۲ دیدید، فرمول $n = f(C) = 7/5C - 32$ و $R = 125^\circ(h - 2)$ ، مدل‌های ریاضی بودند تا بتوانیم با آنها، تعداد جیرجیرها و دستمزد بنا را پیش‌بینی کنیم.

فعالیت ۱-۳

به نمودار زیر نگاه کنید :



این نمودار، مربوط به نوار قلبی دو انسان سالم و بیمار است که الگوی ضربان قلب آن دو را نشان می‌دهد. به این الگو در اصطلاح پزشکی، الکتروکاردیوگرام^۱ یا EKG گفته می‌شود. EKG، تابعی از زمان است.

اگرچه ساختن یک فرمول، برای تقریب زدن یک تابع EKG ممکن است، اما متداول نیست. الگوی تکرار ضربات چیزی است که یک پزشک، نیازمند دانستن آن است و این الگوها، از طریق نمودار، خیلی راحت‌تر دیده می‌شوند تا از طریق فرمول یا جدول.

۱- ضربان قلب، تابع چه کمیتی است؟

۲- اگر ضربان قلب را با EKG و زمان را با t نشان دهیم، کدام یک متغیر

مستقل و کدام یک متغیر وابسته هستند؟

^۱- Electro Kardio Gram (EKG)

۱-۲-۱- نمایش تابع

در فعالیت ۱-۱، تعداد جیرجیر جیرجیرک‌ها را که **تابعی** از درجه حرارت برحسب سانتیگراد بود، با یک **فرمول** نشان دادیم. البته این رابطه را با جدول و نمودار هم نشان دادیم. در فعالیت ۱-۲؛ دستمزد کارگر ساختمانی و بنا را که **تابعی** از تعداد ساعت‌های کاری بودند، با یک **جدول** نشان دادیم، با این حال، رابطه بین کمیت‌های آن جدول را می‌توانیم با فرمول یا نمودار هم نشان دهیم (و این کار را خواهیم کرد). در فعالیت ۱-۳، ضربان قلب را که **تابعی** از زمان است، با یک **نمودار** نشان دادیم. در صورتی که می‌توانیم این تابع را، به شکل جدول یا فرمول نیز نمایش دهیم.

نتیجه

تابع‌ها را می‌توان به سه شکل مختلف یعنی به وسیله **فرمول‌ها**، به وسیله **جدول‌ها** یا به وسیله **نمودارها** نشان داد.

در سه فعالیت قبلی، از هر کدام از شکل‌های مختلف نمایش تابع که مناسب‌تر بودند، استفاده شد. شما هم همین کار را بکنید و بدانید که این سه شکل، هر سه معتبر هستند و ابزار مناسبی برای نمایش تابع می‌باشند.

مثال

با توجه به پاسخ‌های سؤال‌های ۳ و ۴ فعالیت ۱-۲، نشان دهید در چه زمانی، کارگر ساختمانی و بنا، دستمزد یکسان دارند.

حل: همان‌طور که در پاسخ به سؤال ۳ فعالیت ۱-۲ نوشتید، اگر ساعت را با h نشان دهیم، دستمزد کارگر ساختمانی در هر ساعت برابر $h_1 \cdot 50^\circ$ و دستمزد بنا برابر $h_2 \cdot 125^\circ$ است.

در پاسخ سؤال ۴ فعالیت ۱-۲، چون دستمزد بنا را برحسب ساعت‌های کاری کارگر ساختمانی خواسته بود، در نتیجه شما به درستی، به جای h_2 ، مقدار $(h_1 - 2)$ را جایگزین کردید، زیرا بنا

۱- اول واژه Hour به معنای ساعت است.

دو ساعت دیرتر از کارگر ساختمانی شروع به کار می‌کرد. در نتیجه

$$\text{دستمزد بنا} = 1250(h_1 - 2)$$

پس پیدا کردن ساعتی که دستمزد بنا و دستمزد کارگر ساختمانی با هم برابر باشند، یعنی حل معادله

$$1250(h_1 - 2) = 500 \cdot h_1$$

با حل این معادله، h_1 یعنی ساعتی که دو دستمزد با هم برابر می‌شوند، پیدا می‌شود:

$$1250 \cdot h_1 - 2500 = 500 \cdot h_1$$

$$1250 \cdot h_1 - 500 \cdot h_1 - 2500 = 500 \cdot h_1 - 500 \cdot h_1 \quad \text{کم کردن } h_1 \cdot 500 \text{ از طرفین}$$

$$750 \cdot h_1 - 2500 = 0$$

$$750 \cdot h_1 - 2500 + 2500 = 2500 \quad \text{اضافه کردن } 2500 \text{ به طرفین}$$

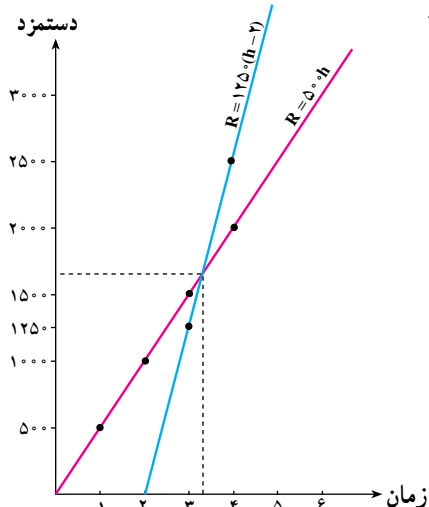
$$750 \cdot h_1 = 2500$$

$$h_1 = \frac{2500}{750} = 3 / 33 \quad \text{تقسیم طرفین بر ضریب } h_1$$

این همان ساعتی بود که از روی جدول (۲) پیش‌بینی کرده بودید.

مثال

نمودار دو تابع دستمزد بنا و کارگر را رسم کنید و نقطه تقاطع آن‌ها را روی شکل، مشخص کنید.



حل: معادله $R = 500 \cdot h$ معرف تابع دستمزد کارگر ساختمانی و معادله $R = 1250(h - 2)$ معرف تابع دستمزد بنا است.

با استفاده از نقطه‌یابی و نشان دادن دستمزدها روی محور y ها و ساعت‌های کاری (زمان) روی محور x ها، نمودار این دو تابع را رسم می‌کنیم.

همان نتیجه‌ای را که از جدول و از فرمول گرفتید، از نمودار هم به دست آوردید. یعنی با استفاده از هر سه نمایش تابع، نشان دادید که در $h \cong 3 / 33$ ، دستمزد کارگر ساختمانی و بنا، با هم برابر می‌شوند.

۳-۱- نماد تابع

وقتی یک تابع به وسیله یک عبارت جبری یا یک ضابطه که همان فرمول است، نمایش داده می‌شود، معمولاً از نماد تابع استفاده می‌شود تا هم به راحتی، بتوان به آن عبارت جبری ارجاع داد و هم مقدار آن عبارت جبری را به ازای مقدارهای مختلف متغیر مستقل، محاسبه کرد.

نماد $f(x)$ (افِ x) نشان می‌دهد که نام تابع f است و متغیر مستقل، x است. می‌توانیم از نمادهای دیگری نیز به جای $f(x)$ استفاده کنیم. برای مثال، $f(x) = x^2 + 1$ را می‌توانیم بنویسیم $y = x^2 + 1$. در هر صورت مقدار $f(x)$ یا y ، مقدار تابع است که متغیر وابسته به متغیر مستقل است.

همان‌طور که می‌توان از هر حرفی به غیر از x ، برای نشان دادن متغیر مستقل استفاده کرد، می‌توان از هر حرفی به غیر از f نیز برای نشان دادن تابع، استفاده کرد. تابع‌های زیر، مثال‌هایی هستند که با نماد تابع نوشته شده‌اند:

الف) $h(x) = 3 - 2(x + 1)$

ب) $g(t) = |3t - 2|$

پ) $k(w) = \frac{w + 2}{w - 1}$

ت) $r(g) = \sqrt{g + 2}$

توجه کنید که در هر فرمول، حرف داخل پرانتز، نشان دهنده متغیر مستقل است. پس هر متغیر مستقلی در آن فرمول، باید با نماد داخل پرانتز معرفی شود. با دقت در چهار مثال قبلی، این نکته بهتر دیده می‌شود.

هم‌چنین، در بیشتر فرمول‌هایی که تا به حال دیده‌اید، مقدارهایی وجود دارند که همیشه ثابت هستند، مانند $n = 7/5C - 32$ که در آن، $7/5$ و -32 همیشه ثابت هستند. به این مقدارها، مقدار ثابت گفته می‌شود.

تمرین

در هر یک از مثال‌های (الف)، (ب)، (پ) و (ت)، متغیر مستقل، متغیر وابسته را مشخص کرده و بنویسید.

۴-۱- مقدار تابع

وقتی که تعداد جیرجیر جیرجیرک‌ها را به عنوان تابعی از درجهٔ حرارت به سانتیگراد معرفی کردیم، نوشتیم $n = f(C)$ و رابطهٔ بین آنها را با $n = 7/5C - 32$ نشان دادیم.

برای مثال، برای پیدا کردن تعداد جیرجیرها در $28^\circ C$ ، یعنی برای پیدا کردن $n = f(28)$ ، ابتدا ۲۸ را در $7/5$ ضرب می‌کنیم و سپس، ۳۲ را از آن کم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} n &= f(28) \\ &= (7/5 \times 28) - 32 \\ &= 178 \end{aligned}$$

به همین ترتیب، تمام اعداد ردیف دوم جدول (۱) را در هر درجهٔ حرارت داده شده در ردیف اول، به دست می‌آوریم. به فرمول $7/5C - 32$ ضابطهٔ تابع و به $f(C)$ ، مقدار تابع گفته می‌شود.

مثال

آیا جدول زیر، معرف یک تابع است؟ چرا؟ ضابطهٔ این تابع را بنویسید.

جدول ۴

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱۲	۶	۴	۳	۲/۴	۲

حل: نخست آن که این جدول، معرف یک تابع است زیرا برای هر x از ردیف اول جدول، یک و فقط یک y از ردیف دوم، وجود دارد. دوم آن که با دقت در اعداد دو سطر، می‌بینیم که ۱۲، برعددهای ردیف اول تقسیم شده است تا عددهای ردیف دوم، به دست آمده‌اند، پس ضابطهٔ تابع برابر

$$y = f(x) = \frac{12}{x} \text{ است یعنی } \frac{12}{x}$$

مثال

تابع $y = f(x) = x^2 + 1$ را در نظر بگیرید و مقادیر تابع را به‌ازای مقادیر داده شده در

۱- علامت ° نشان‌دهندهٔ درجه و C اول واژهٔ Celsius یا سانتیگراد است.

جدول زیر، یادداشت کنید :

جدول ۵

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y						

حل: ضابطه تابع، $x^2 + 10$ است، یعنی این تابع، قانونی (ضابطه‌ای) دارد که طبق آن، هر جا x ای وجود داشت، آن را به توان دو رسانده و حاصل را با 10 جمع می‌کند.
یعنی :

$$y = f(x) = x^2 + 10$$

پس برای پیدا کردن $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(2)$ ، $f(3)$ ، $f(4)$ ، $f(5)$ ، از این فرمول یا ضابطه،

استفاده می‌کنیم :

$$y = f(0) = (0)^2 + 10 = 10$$

$$y = f(1) = (1)^2 + 10 = 11$$

$$y = f(2) = (2)^2 + 10 = 14$$

$$y = f(3) = (3)^2 + 10 = 19$$

$$y = f(4) = (4)^2 + 10 = 26$$

$$y = f(5) = (5)^2 + 10 = 35$$

مسائل

یکی از راه‌های نمایش تابع، جدول است. هریک از جدول‌های زیر را برای تابع‌هایی که فرمول (ضابطه) آن داده شده است، تکمیل کنید.

۱) $y = f(x) = 3 - x$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y	۳					

۲) $y = f(x) = 5x - 6$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y	-۶					

۳) $y = f(x) = x^2$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y						

۴) $y = f(x) = x^3$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y						

۵) $y = f(x) = 2^x$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y						

برای هریک از تابع‌های زیر که به صورت جدول نمایش داده شده‌اند، یک فرمول (ضابطه) بنویسید.

۶)

x	۳	۴	۵	۶	۷
y	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹

y =

۷)

x	۶	۷	۸	۹	۱۰
y	۲	۳	۴	۵	۶

y =

۸)

x	۲	۳	۴	۵	۶
y	۲۱	۳۱	۴۱	۵۱	۶۱

y =

۹)

x	۲	۳	۴	۵	۶
y	۲۲	۳۳	۴۴	۵۵	۶۶

y =

۱۰)

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۱	۸	۲۷	۶۴	۱۲۵

y =

۱۱)

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۴	۱۱	۳۰	۶۷	۱۲۸

y =

۱۲)

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۴۹	۴۸	۴۷	۴۶	۴۵

y =

۱۳)

x	۲	۳	۴	۵	۶
y	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	۷۲۹

y =

۱۴)

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۴۰	۲۰	$\frac{۴۰}{۳}$	۱۰	۸

y =

۵-۱- محاسبه مقدار تابع

همان‌طور که در بخش قبلی دیدید، محاسبه مقدار تابع یعنی پیدا کردن مقدار $y = f(x)$ به ازای مقدارهای مختلفی که به متغیر مستقل x داده می‌شود.

برای نمونه، اگر $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$ باشد، آن‌گاه $f(2)$ نشان‌دهنده مقدار تابع است وقتی که به جای x ، ۲ را قرار می‌دهیم:

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 4$$

$$f(2) = 3(2)^2 + 2(2) - 4$$

جابه جایی x با ۲

$$= 12 + 4 - 4$$

$$= 12$$

توجه کنید که چون $f(2) = 12$ ، پس نقطه‌ای به مختصات $(2, 12)$ ، یکی از نقاط نمودار این تابع است. مقدار $y = f(2)$ ، عرض نقطه‌ای است که طول آن، $x = 2$ است.

۱- باز هم توجه کنید که به جای f ، x و y ؛ از هر نماد دیگری می‌توانید استفاده کنید.

مثال

تابع $h(t) = -t^2 + 2t - 4$ را در نظر بگیرید و $h(-2)$ را محاسبه کنید.

$$h(t) = -t^2 + 2t - 4 \quad \text{حل:}$$

$$\begin{aligned} h(-2) &= -(-2)^2 + 2(-2) - 4 \\ &= -4 - 4 - 4 \\ &= -12 \end{aligned}$$

مثال

تابع $t(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = |2 - 3x|$ را در نظر بگیرید و هریک از مقادیرهای زیر را محاسبه

کنید:

الف) $g(4)$

ب) $t(2)$

پ) $g(0) - t(-2)$

حل:

الف)

$$g(x) = |2 - 3x|$$

$$g(4) = |2 - 3 \times 4|$$

$$= |2 - 12|$$

$$= |-10|$$

$$= 10$$

جابه‌جایی x با 4

$$t(x) = \frac{1}{x}$$

ب)

$$t(2) = \frac{1}{2}$$

$$= 0.5$$

جابه‌جایی x با 2

$$g(0) = |2 - 3 \times 0| = |2 - 0| = |2| = 2$$

پ)

$$t(-2) = \frac{1}{-2} = -0.5$$

بنابراین،

$$g(0) - t(-2) = 2 - (-0.5) = 2.5$$

می‌توان مقدار تابع را به‌ازای یک عبارت جبری نیز پیدا کرد.

مثال

اگر $g(x) = \sqrt{x^3 + 2}$ باشد، $g(h)$ و $g(2h)$ را پیدا کنید.

$$g(x) = \sqrt{x^3 + 2}$$

$$g(h) = \sqrt{h^3 + 2}$$

$$g(2h) = \sqrt{(2h)^3 + 2}$$

$$= \sqrt{8h^3 + 2}$$

حل:

جابه‌جایی x با h

جابه‌جایی x با $2h$

مسائل

برای تابع‌های زیر، مقدارهای خواسته‌شده را پیدا کنید.

۱) $t(x) = 21 - x^2$

$t(0) = ?$

$t(1) = ?$

۲) $g(x) = 2x^3 - 4x + 5$

$g(t) = ?$

$g(-1) = ?$

۳) $f(t) = \sqrt{3t + 5}$

$f(-1) = ?$

$f(0) = ?$

۴) $f(x) = 4x + 3$

$f(a - 4) = ?$

$f(2t) = ?$

۵) $g(x) = x + 3$

$g(-3) = ?$

$g(t) = ?$

۶) $k(h) = 3h^2 - h - 4$

$k(0) = ?$

$k(-1) = ?$

برای تابع‌های زیر، مقدارهای جدیدی با توجه به متغیر مستقل جدید، به‌دست آمده است. آن

متغیرها را پیدا کنید:

۷) $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$

$f(\square) = -2b^2 + 5b - 3$

۸) $g(t) = at^3 - 4t^2 + t - 1$

$g(\square) = ax^3 - 4x^2 + x - 1$

۹) $t(x) = |x - 3|$

$t(\square) = |c - 1|$

۱۰) $f(t) = |2t + 5|$

$f(\square) = |2b + 5|$

۱۱) $h(x) = \frac{2x - x^3}{4}$

$h(\square) = \frac{2a - a^3}{4}$

۱۲- فرض کنید نمودار تابعی شامل نقطه $(-۳, ۵)$ است. اگر تابع را با $f(x)$ نشان دهیم، $f(-۳)$ چقدر است؟ جواب خود را توضیح دهید.

۱-۶- عملیات با تابع‌ها

مثال

تابع $f(x) = 4x - 5$ را در نظر بگیرید. سپس هریک از مقادیرهای زیر را حساب کنید:

الف) $f(۳)$ ب) $f(۳+h)$ پ) $f(۳+h) - f(۳)$

ت) $\frac{f(۳+h) - f(۳)}{h}$ ، اگر $h \neq 0$

حل:

الف) $f(x) = 4x - 5$

$f(۳) = 4(۳) - 5 = ۱۲ - 5 = ۷$

پس

ب) $f(۳+h) = 4(۳+h) - 5 = ۱۲ + 4h - 5 = ۷ + 4h$

پ) مقادیرهای $f(۳)$ و $f(۳+h)$ را از (الف) و (ب)، جایگزین می‌کنیم:

$f(۳+h) - f(۳) = (۷ + 4h) - ۷ = 4h$

ت) $\frac{f(۳+h) - f(۳)}{h} = \frac{4h}{h}$ نتیجه قسمت (پ) را در صورت می‌نویسیم:

$= 4$

مثال

اگر $f(t) = |2t - 5|$ و $h(t) = \frac{3t}{t^2 + 1}$ باشد، عبارتهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $2f(1) + h(0)$ ب) $h(1) - f(-2)$ پ) $\frac{h(\frac{1}{2})}{f(\frac{1}{2})}$

ت) $h(\frac{1}{2}) \cdot f(\frac{1}{2})$

حل:

الف) اول $f(1)$ و $h(0)$ را محاسبه می‌کنیم. سپس آنها را با هم جمع می‌کنیم:

$$f(t) = |2t - 5|$$

$$2f(1) = 2|2(1) - 5| = 2|2 - 5| = 2|-3| = 2 \cdot 3 = 6 \quad \text{جابه‌جایی } t \text{ با } 1$$

$$h(t) = \frac{3t}{t^2 + 1}$$

$$h(0) = \frac{3(0)}{(0)^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{جابه‌جایی } t \text{ با } 0$$

$$2f(1) + h(0) = 6 + 0 = 6 \quad \text{پس}$$

ب) اول $h(1)$ و $f(-2)$ را محاسبه می‌کنیم. سپس آنها را از هم کم می‌کنیم:

$$h(1) = \frac{3(1)}{(1)^2 + 1} = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$$f(-2) = |2(-2) - 5| = |-4 - 5| = |-9| = 9$$

$$h(1) - f(-2) = \frac{3}{2} - 9 = \frac{3}{2} - \frac{18}{2} = \frac{-15}{2} \quad \text{پس}$$

پ) باز هم اول $h(\frac{1}{2})$ و $f(\frac{1}{2})$ را محاسبه می‌کنیم و سپس، مقدارهای به‌دست آمده را بر هم

تقسیم می‌کنیم:

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = \left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{\cancel{2} \times 3}{\cancel{4} \times 5} \right)$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{5}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left| 2\left(\frac{1}{2}\right) - 5 \right| = \left| 1 - 5 \right| = |-4| = 4$$

$$\frac{h\left(\frac{1}{2}\right)}{f\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{6}{5}}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} \quad \text{پس}$$

ت) مقدارهای به‌دست آمده برای $h(\frac{1}{2})$ و $f(\frac{1}{2})$ را در هم ضرب می‌کنیم:

$$h\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{5} \times 4 = \frac{24}{5}$$

وقتی می‌خواهیم عملی را روی دو یا چند تابع انجام دهیم، ابتدا مقدار هر تابع را به ازای متغیر مستقل داده شده محاسبه می‌کنیم. سپس عملیات خواسته شده روی مقدارهای تابع‌ها را مانند عملیات با اعداد، انجام می‌دهیم.

مسائل

۱- برای تابع‌های $P(x) = x^2 - 3x + 5$ و $Q(x) = x^2 + 4x - 8$ ، عبارت‌های زیر را محاسبه کنید:

الف) $P(-1) \cdot Q(2)$ ب) $Q(1)$ پ) $Q(2) + P(0)$

ت) $\frac{Q(0)}{P(0)}$

۲- تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ و $g(x) = 6x + 2$ را در نظر بگیرید. سپس عبارت‌های زیر را

محاسبه کنید:

الف) $f(-2)$ ب) $g(3+z)$ پ) $g(-3b)$

ت) $f(-2) \cdot g(2)$ ث) $\frac{g(\frac{1}{2})}{f(2)}$

۳- اگر $f(x) = 4 - 3x$ باشد، $f(2+h)$ را تعیین کنید.

۴- اگر $f(x) = x^3 - 2x + 7$ و $g(x) = 2x^3 + 3x - 2$ باشد، مقدارهای زیر را محاسبه

کنید:

الف) $g(\frac{1}{2})$ ب) $f(-2/3)$ پ) $g(1) \cdot f(1)$

ت) $g(1) + f(1)$ ث) $g(1) - f(1)$ ج) $\frac{f(1)}{g(1)}$

۵- اگر $g(x) = x^2 + 2x + 1$:

الف) $g(2)$ را حساب کنید.

ب) $g(x+2)$ را پیدا کنید.

پ) نشان دهید $g(x+2) \neq g(x) + g(2)$.

اجازه دهید یک بار دیگر، مفهوم تابع را با یک مثال مرور کنیم :

تابع $f(x) = x^3 + 2x - 3$ را در نظر بگیرید. اگر به جای متغیر مستقل x ، هر مقدار دیگری را بگذاریم، تابع f کاری که می‌کند آن است که

- ۱- اول آن مقدار را به توان ۳ می‌رساند.
- ۲- دو برابر آن مقدار را به آن اضافه می‌کند.
- ۳- از مجموع آنها، ۳ را کم می‌کند.

$$f(2+a) = (2+a)^3 + 2(2+a) - 3 \quad \text{برای مثال،}$$

$$f(-2) = (-2)^3 + 2(-2) - 3 \quad \text{یا}$$

در واقع، تابع مانند ماشینی است که مجموعهٔ متغیرهای مستقل یعنی دامنهٔ تابع، ورودی‌های آن هستند. ضابطه یا قانون تابع، عملی است که آن ماشین انجام می‌دهد و بالاخره، مقدار تابع یعنی متغیر وابسته، خروجی‌های این ماشین هستند.

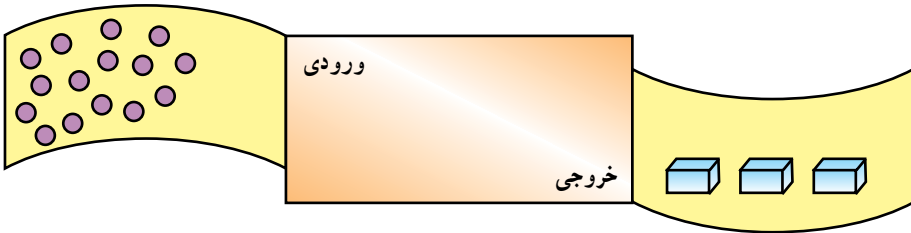
به اطراف خود با دقت نگاه کنید و چند پدیدهٔ واقعی را که مانند تابع عمل می‌کنند، نام ببرید. سپس بگویید که چرا هریک تابع هستند. می‌توانید با پدیدهٔ مشک‌زدن دوغ و کره درست کردن، به شرط آن که همهٔ دوغ کره شود؛ یا چرخ گوشت؛ شروع کنید! موفق باشید!



زن روستایی اسالم در حال تهیهٔ کره

تمرین

ماشین زیر را در نظر بگیرید. ۱۵ شیء به درون ماشین وارد شده و ۳ بسته از آن خارج می‌شود.



جدول زیر، اطلاعات بیشتری دربارهٔ این ماشین به شما می‌دهد:

تعداد بسته‌هایی که خارج می‌شوند

۱۵	۳
۲۵	۵
۵	۱
۶۰	۱۲

تعداد اشیایی که وارد می‌شوند

با توجه به اطلاعات داده شده، جاهای خالی را در جدول‌های زیر، پر کنید:

جدول ۶

(ب)		(الف)	
تعداد اشیایی که وارد می‌شوند	تعداد بسته‌هایی که خارج می‌شوند	تعداد اشیایی که وارد می‌شوند	تعداد بسته‌هایی که خارج می‌شوند
—	۱۰	۹	۱
—	۴۰	۲۵	—
—	۲۰۰	۶۰	—
—	۱۷	۹۸	—
۳	۰	۸۱	—

فعالیت ۱-۴

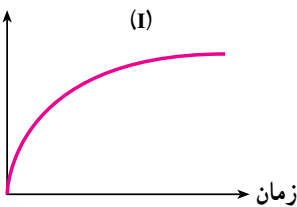
الف) سه داستان، برای سه نمودار زیر داده شده است. بگویید هر نمودار، مربوط به کدام داستان است. برای نمودار باقی مانده یک داستان بنویسید.

۱- تازه از خانه بیرون آمده بودم که متوجه شدم کتابهایم را فراموش کرده‌ام. در نتیجه به خانه برگشتم تا آنها را بردارم.

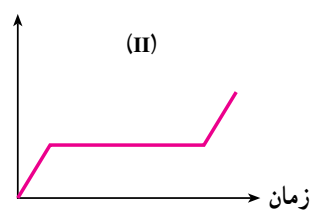
۲- در حال رانندگی بودیم و اوضاع به خوبی پیش می‌رفت تا آن که ماشین پنچر شد، پس از گرفتن پنچری به راه افتادیم.

۳- من با آرامی مشغول قدم زدن به سمت مدرسه بودم، اما وقتی متوجه شدم که دیر شده است، سرعتم را زیاد کردم.

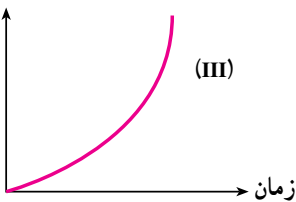
فاصله از خانه



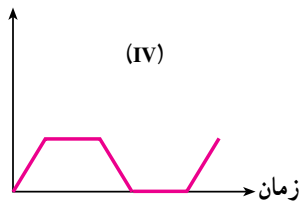
فاصله از خانه



فاصله از خانه



فاصله از خانه



- ب) چرا هر یک از نمودارها، معرّف یک تابع هستند؟ توضیح دهید.
- پ) چرا هر یک از داستان‌ها، معرّف یک تابع هستند؟ توضیح دهید.
- ت) موقعیت زیر را در نظر بگیرید. نخست بگویید که چرا این موقعیت، معرّف

یک تابع است. سپس نمودار آن را رسم کنید :

تمام صبح، هوا گرم بود. ناگهان حدود ظهر، طوفان شدیدی آمد و هوا خیلی خنک شد. بعد از طوفان، دوباره هوا گرم شد. سپس با غروب آفتاب، هوا مجدداً خنک شد.



۱-۷-۱- نمودار تابع خطی

همان‌طور که در ابتدای این فصل دیدید؛ نمودارها یکی از ابزارهای مفید برای نشان دادن تابع و رابطه بین دو کمیت هستند. در فعالیت ۱-۴ دیدید که چگونه با استفاده از نمودارها، می‌توانید پدیده‌های طبیعی و حوادث روزانه زندگی خویش را به سادگی به زبان ریاضی نشان دهید، به طوری که برای همه قابل فهم باشد.

برخی از پدیده‌هایی که روزانه با آنها سر و کار داریم، تابع‌های خطی هستند، یعنی تابع‌هایی که نمودار آنها، به شکل یک خط است. در حالت کلی، نمودار تابع‌های خطی به شکل

$$y = f(x) = mx + n$$

یک خط است^۱ که در آن :

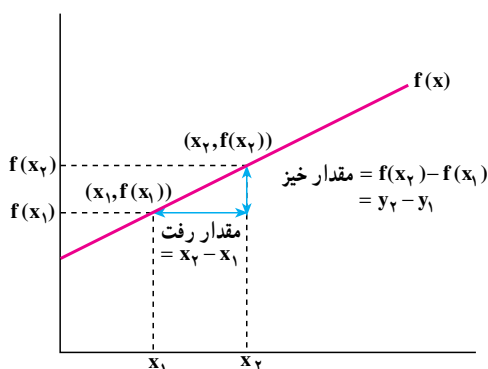
m ضریب زاویه یا نسبت تغییرات y به تغییرات x است (یعنی نسبت تغییرات عرض نقاط روی

خط به تغییرات طول نقاط که نشان‌دهنده شیب خط است.)

۱- در سال سوم راهنمایی و اول دبیرستان، با معادله خط آشنا شده‌اید.

n محلّ تقاطع خط با محور عمودی یا مقدار y است وقتی که $x = 0$. توجه کنید که وقتی $m = 0$ ، یعنی ضریب زاویه صفر است و معادله خط تبدیل به $y = f(x) = n$ می‌شود و آن وقت، یک خط افقی خواهیم داشت.

یادآوری: ضریب زاویه تابع خطی $f(x)$ ، از فرمول زیر به دست می‌آید:



$$m = \frac{\text{مقدار خیز}}{\text{مقدار رفت}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{چون } f(x_2) = y_2 \text{ و } f(x_1) = y_1 \text{ پس}$$

فعالیت ۱-۵

تعداد کلماتی که در گنجینه لغات کودک وجود دارد، تابعی از سن او است. فرمول تجربی زیر، اندازه این گنجینه لغات را در کودکان معمولی بین ۲۰ ماهگی و ۵۰ ماهگی نشان می‌دهد:

$$n = 60a - 900$$

که در آن، a معرف سن کودک به ماه (متغیر مستقل) و n نشان‌دهنده تعداد کلماتی که کودک به درستی استفاده می‌کند (متغیر وابسته) هستند.

۱- در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، جرج توماس ترجمه مهدی بهزاد و سیامک کاظمی، از واژه «خیز» برای Rise و از واژه «رفت» برای Run، استفاده شده است.



بچه‌ها در کوچه (۱۳۷۶) اثر مرتضی کاتوزیان

۱- جدول زیر را کامل کنید :

جدول ۷

a	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰
n							

۲- نمودار این تابع را بکشید. محور افقی را محور a (سن کودک) برحسب ماه) و محور عمودی را محور n (تعداد کلمات) در نظر بگیرید.

۳- یک کودک معمولی، در ۲۰ ماهگی چند کلمه در گنجینه لغاتش وجود دارد؟

۴- یک کودک معمولی، در ۵۰ ماهگی چند کلمه در گنجینه لغاتش وجود دارد؟

۵- از سن ۲۰ ماهگی تا سن ۵۰ ماهگی، یک کودک معمولی در هر ماه، چند کلمه جدید یاد می‌گیرد؟

۶- آیا این فرمول، می‌تواند برای یک کودک در سن ۱۰ ماهگی، درست باشد؟ توضیح دهید.

۲-۷-۱- قاعده رسم نمودار تابع خطی

مثال

نمودار تابع $f(x)$ ، خطی به معادله $3x + 4y = -12$ است. شیب این خط را پیدا کنید.
حل: برای پیدا کردن شیب خط، مختصات دو نقطه روی آن را لازم داریم. می‌توانیم محل تقاطع خط با محور x ها و y ها را انتخاب کنیم.
الف) محل تقاطع خط با محور x ها، یعنی جایی که $y = 0$ است. پس در معادله $3x + 4y = -12$ به جای y ، صفر قرار می‌دهیم:

$$3x + 4(0) = -12$$

$$3x = -12$$



منبر چوبی منبت‌کاری شده، زیارت‌گاه ایبانه

$$x = -\frac{12}{3} = -4$$

پس مختصات یکی از نقطه‌های انتخابی، $(-4, 0)$ است. به طول این نقطه طول از مبدأ گفته می‌شود. (ب) محل تقاطع خط با محور y ها، یعنی جایی که $x = 0$. پس در معادله

$$-12 = 3x + 4y = -12$$

$$3(0) + 4y = -12$$

$$4y = -12$$

$$y = -\frac{12}{4} = -3$$

پس مختصات یک نقطه انتخابی دیگر، $(0, -3)$ است که عرض آن عرض از مبدأ نامیده می‌شود.

$$\text{بنابراین،} \quad m = \frac{\text{مقدار خیز}}{\text{مقدار رفت}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{شیب خط}$$

با توجه به دو نقطه $(-4, 0)$ و $(0, -3)$ ،

$$x_1 = 0, \quad y_1 = -3$$

$$x_2 = -4, \quad y_2 = 0$$

عبارت است از

$$m = \frac{0 - (-3)}{-4 - 0} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

از طرف دیگر، می‌توانیم معادله $-12 = 3x + 4y$ را برحسب y حل کنیم:

$$4y = -3x - 12$$

$$y = -\frac{3}{4}x - 3$$

مقداری که برای ضریب زاویه به دست آوردیم، با ضریب x برابر است.

نتیجه

اگر معادله خط را برحسب y و به صورت $y = mx + n$ بنویسیم، آن‌گاه به جای

۱- فرقی نمی‌کند که مختصات کدام نقطه را x_1 و y_1 و کدام را x_2 و y_2 انتخاب می‌کنید. فقط توجه داشته باشید که x_1 و y_1 متعلق به یک نقطه و x_2 و y_2 متعلق به نقطه دیگر باشند.

محاسبهٔ ضریب زاویه از فرمول $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ، ضریب x را که همان ضریب زاویه است، می‌نویسیم.

حالت‌های خاص

مثال

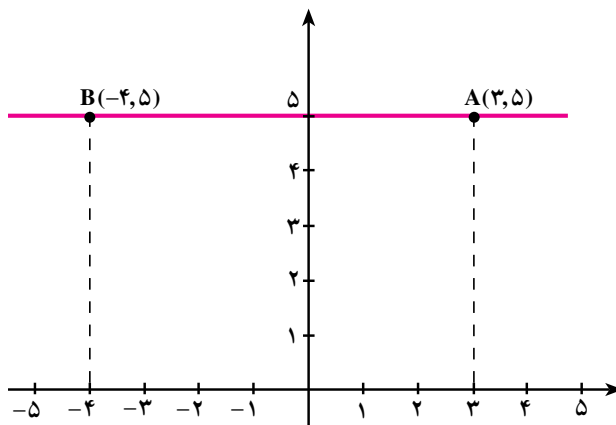
ضریب زاویهٔ خط‌های زیر را تعیین کنید:

الف) خط $y = 5$

ب) خطی که دارای دو نقطهٔ $(2, 3)$ و $(2, 6)$ باشد.

حل:

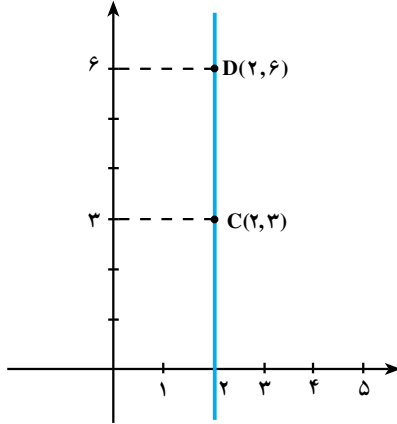
الف) دو نقطه از خط $y = 5$ در شکل زیر نشان داده شده است:



توجه کنید که عرض هر دو نقطهٔ A و B روی خط $y = 5$ ، برابر است. پس

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 5}{-4 - 3} = \frac{0}{-7} = 0$$

ب) چون طول هر دو نقطه با هم برابرند، پس روی یک خط عمودی قرار می‌گیرند:



پس فرمول ضریب زاویه برای چنین حالتی، قابل استفاده نیست زیرا

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{2 - 2} = \frac{3}{0}$$

که تعریف نشده است. به طور کلی، ضریب زاویه خط عمودی، تعریف نشده است.

تذکر: برای این دو حالت خاص، به تفاوت بین ضریب زاویه صفر و ضریب زاویه تعریف نشده توجه کنید.

تعریف خط به صورت ضریب زاویه — عرض از مبدأ

خط $y = mx + n$ به صورت ضریب زاویه — عرض از مبدأ نوشته شده است. ضریب زاویه این خط m و عرض از مبدأ آن، n است (یعنی محل تقاطع خط با محور y ها، نقطه $(0, n)$ است).

روش رسم خط

برای رسم خط، با استفاده از ضریب زاویه و عرض از مبدأ؛ مراحل زیر را انجام دهید:

۱- معادله خط را به شکل $y = mx + n$ بنویسید.

۲- نقطه $(0, n)$ ، یعنی عرض از مبدأ را روی محور y ها مشخص کنید،

۳- ضریب زاویه را به صورت $m = \frac{\text{خیز}}{\text{رفت}}$ بنویسید. سپس از عرض از مبدأ شروع کنید

و به اندازه‌ای که خیز مشخص کرده است، به سمت بالا یا پایین حرکت کنید. آن گاه، به اندازه رفت،

به سمت راست یا چپ، حرکت کنید و نقطه‌ای که به آن رسیدید را به‌عنوان دومین نقطه خط، روی صفحه مختصات مشخص کنید.

توجه: در حالتی که m یک عدد صحیح باشد، خیز برابر m و رفت برابر ۱ است.
۴- خط را طوری رسم کنید که از این دو نقطه بگذرد.

مثال

خط $2x - 3y = 9$ را با استفاده از ضریب زاویه و عرض از مبدأ، رسم کنید.

حل:

۱- با استفاده از روش رسم خط، گام اول را برمی‌داریم و معادله را به شکل $y = mx + n$

می‌نویسیم:

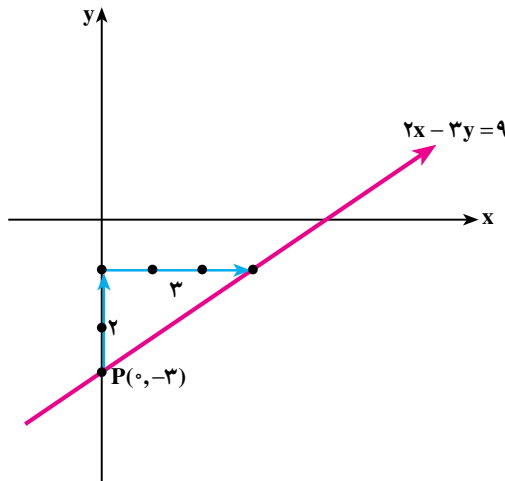
$$2x - 3y = 9$$

$$-3y = -2x + 9$$

$$y = \frac{-2x}{-3} + \frac{9}{-3}$$

$$y = \frac{2}{3}x - 3$$

۲- عرض از مبدأ (محل تقاطع خط با محور y ها) یعنی $P(0, -3)$ را روی محور y ها در صفحه مختصات، مشخص می‌کنیم.



۳- ضریب زاویه $m = \frac{2}{3}$ است. پس برای یافتن نقطه‌ای دیگر از این خط، از نقطه $P(0, -3)$ شروع می‌کنیم و به اندازه خیز یعنی ۲ واحد به سمت بالا رفته و سپس، به اندازه رفت یعنی ۳ واحد به سمت راست، حرکت می‌کنیم.

۴- خطی که از این دو نقطه می‌گذرد، نمودار معادله $y = \frac{2}{3}x - 3$ است.

مسائل

۱- معادله‌های زیر را به شکل $y = mx + n$ بنویسید و سپس، با استفاده از روش رسم نمودار خطی، آن را رسم کنید:

الف) $2x + 5y = 10$

ب) $x + 3y - 6 = 0$

پ) $y + 3x = 0$

ت) $x - 2 = 5$

ث) $y - 4 = -3$

۲- خطی رسم کنید که ضریب زاویه و یک نقطه آن داده شده است.

الف) $m = \frac{3}{4}$ و $(0, 3)$

ب) m تعریف نشده است. و $(-5, 0)$

پ) $m = 0$ و $(0, 2)$

ت) $m = \frac{2}{3}$ و $(-2, -3)$

۳- نمودار معادله‌های زیر را رسم کنید:

الف) $y = \frac{3}{4}x + 3$

ب) $y = x$

پ) $y = -\frac{3}{5}x$

ت) $y = 2x + 3$

ث) $y = -x$

ج) $x = -4$

با مشورت هم کلاسی‌های خود، به سؤالها پاسخ دهید و برای هر پاسخ، دلیل قانع‌کننده ارائه دهید.

۱- بدون محاسبه، بگویید که هر یک از نمودارهای زیر مربوط به کدام معادله است؟

الف) $y = x - 5$

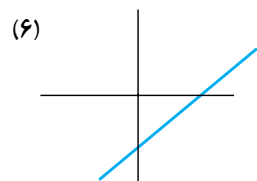
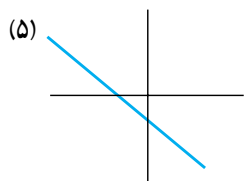
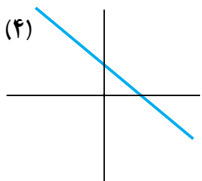
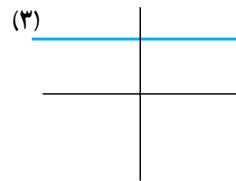
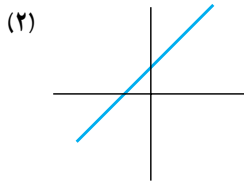
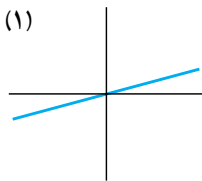
ب) $-3x + 4 = y$

پ) $5 = y$

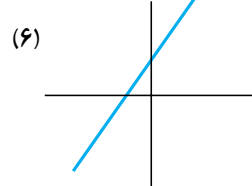
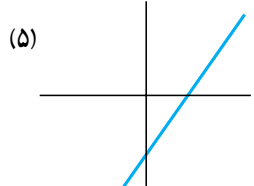
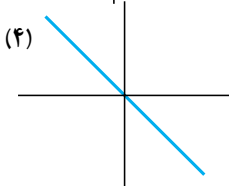
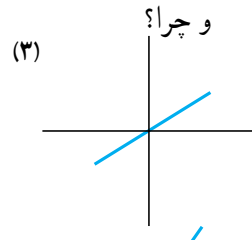
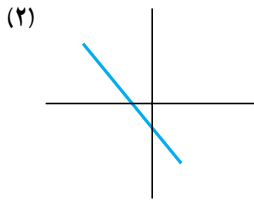
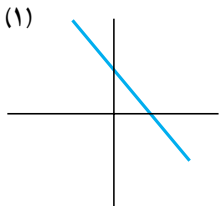
ت) $y = -4x - 5$

ث) $y = x + 6$

ج) $y = \frac{x}{2}$



۲- بدون محاسبه، بگویید که هر معادله، معرف کدام یک از نمودارهای زیر است



الف) $y = -2/72x$

ب) $y = 0/01 + 0/001x$

پ) $y = 27/9 - 0/01x$

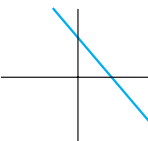
ت) $y = 0/1x - 27/9$

ث) $y = -5/7 - 200x$

ج) $y = \frac{x}{3/14}$

۳- دلایل خود را منظم کنید و از آن‌ها، روشی برای رسم نمودار تابع خطی پیشنهاد کنید تا بدون محاسبه، بتوان وضعیت خط را در صفحه مشخص کرد. برای مثال، می‌توانید بگویید:

«در یک تابع خطی به شکل $y = mx + n$ ، اگر ضریب زاویه منفی و عرض از

مبدأ مثبت باشد، شکل تقریبی نمودار تابع،  است.»

بقیه حالت‌ها را شما بنویسید.

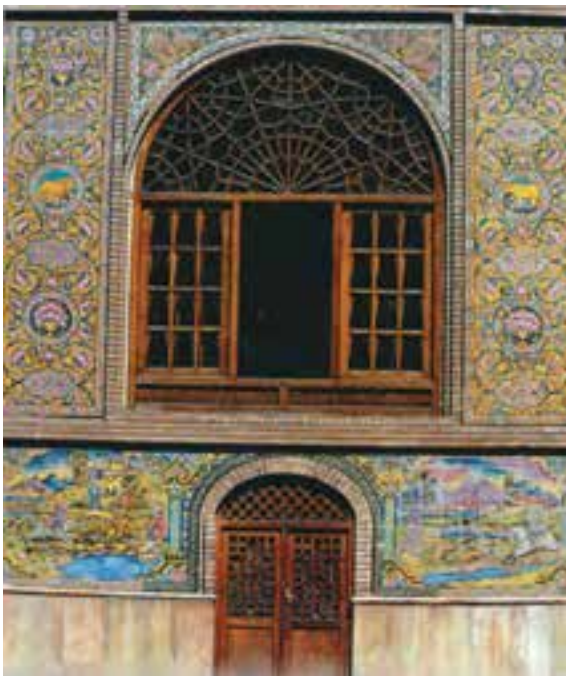
۸-۱- خانواده‌ی تابع‌های خطی

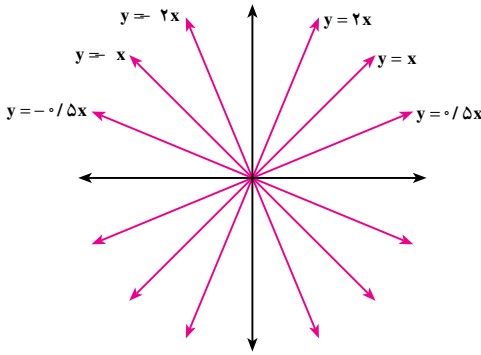
فرمول‌هایی مانند

$$y = f(x) = mx + n$$

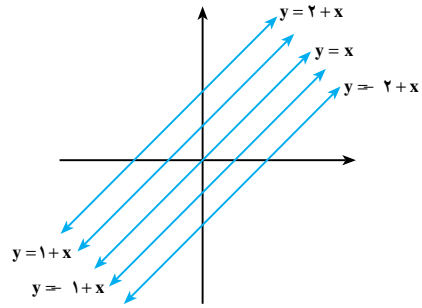
و $y = f(x) = mx$ که شامل ثابت‌های m و n هستند، از یک خانواده می‌باشند. معمولاً از خانواده‌ی تابع‌های خطی، برای مدل‌سازی پدیده‌های خطی استفاده می‌کنیم. معنای مقدارهای مختلف m و n در خانواده‌ی $f(x) = mx + n$ ، در شکل‌های صفحه بعد نشان داده شده است.

شمس‌العماره، تهران





خانواده تابع‌های $y = mx$ (با $n = 0$)



خانواده تابع‌های $y = x + n$ (با $m = 1$)

فعالیت ۱-۷



فارنهایت سلسیوس

الف) خانواده تابع‌های به شکل $y = ax + 2$ را در نظر بگیرید (a ضریب زاویه است). نمودار تابع‌ها را در حالت‌های زیر بررسی کنید.

۱- a مثبت و بزرگتر از یک

۲- a منفی و بزرگتر از منفی یک

۳- a مثبت و کوچکتر از یک

۴- a منفی و کوچکتر از منفی یک

ب) به نقش a در نمودار تابع‌های این خانواده توجه کنید. چگونه a بر نمودار خط، تأثیر می‌گذارد؟

پ) اندازه a (یعنی $|a|$) چه تأثیری بر نمودار خط می‌گذارد؟

ت) علامت a چه تأثیری بر نمودار خط دارد؟

ث) نتایج به دست آمده را به عنوان روشی برای رسم نمودارهای این خانواده از تابع‌ها، بنویسید.

مثال

درجهٔ فارنهایت را در مقابل درجهٔ سلسیوس در نظر بگیرید، 212°F (درجهٔ فارنهایت) و 100°C (درجهٔ سانتیگراد)، هر دو معرف درجهٔ حرارتی است که آب در آن می‌جوشد. به‌طور مشابه، 32°F و 0°C ، نقطهٔ انجماد آب را نشان می‌دهد.

الف) درجهٔ سانتیگراد را روی محور x ها و درجهٔ فارنهایت را روی محور y ها نشان دهید و با استفاده از این دو نقطه، نمودار خط را رسم کنید.

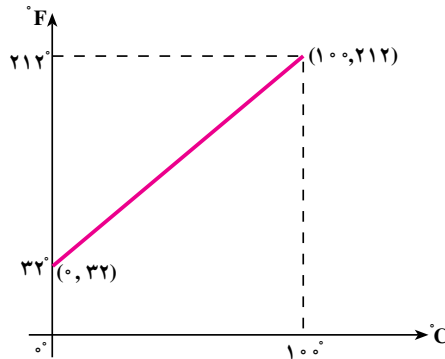
ب) معادلهٔ این خط چیست؟

پ) با استفاده از این معادله، بگویید 2°C ، برابر چند درجهٔ فارنهایت است؟

ت) در چه درجهٔ حرارتی، درجهٔ سانتیگراد و فارنهایت با هم برابرند؟

حل:

الف)



ب) با استفاده از دو نقطهٔ جوش و انجماد برحسب درجهٔ فارنهایت و سانتیگراد یعنی $(100, 212)$ و $(0, 32)$ ، ضریب زاویهٔ خط را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{ضریب زاویه} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = 1/8$$

محل تقاطع خط با محور F ها یعنی عرض از مبدأ، 32 است. پس معادلهٔ خط را در حالت کلی

می‌نویسیم:

$$y = mx + n$$

با جایگزین کردن $y = F$ (درجهٔ فارنهایت)، $x = C$ (درجهٔ سانتیگراد)، $m = 1/8$ (ضریب

زاویه) و $n = 32$ (عرض از مبدأ)، معادلهٔ این خط را مشخص می‌کنیم:

$$F = 1/8C + 32$$

پ) حالا به جای C ، ۲۰° را می‌گذاریم تا F° را به دست آوریم:

$$F = 1/8(20) + 32 = 36 + 32 = 68^{\circ}F$$

ت) چون می‌خواهیم F° و C° با هم برابر باشند، پس در معادله

$$F = 1/8C + 32$$

به جای C ، F را قرار می‌دهیم:

$$F = 1/8F + 32$$

$$F - 1/8F = 32$$

$$7/8F = 32$$

$$F = -\frac{32}{7/8}$$

$$F = -4^{\circ}$$

پس در -4° ، درجهٔ حرارت سانتیگراد و فارنهایت، با هم برابر می‌شوند.

نتیجه: برای تبدیل درجه‌های سانتیگراد و فارنهایت به یکدیگر، از نمودار این مثال، استفاده می‌کنیم و فرمول پیدا کردن ضریب زاویه را می‌نویسیم. چون در حالت کلی می‌خواهیم هر F را به C و هر C را به F تبدیل کنیم، پس در

$$m = \frac{212 - 32}{100 - 0}$$

که برای یک حالت خاص بود، به جای F ، ۲۱۲ و به جای C ، ۱۰۰ را قرار می‌دهیم:

$$m = \frac{F - 32}{C - 0}$$

اما چون نمودار، یک خط راست است؛ پس ضریب زاویهٔ آن در تمام نقاط روی آن، یکسان است. بنابراین،

$$\frac{F - 32}{C - 0} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100}$$

با استفاده از خاصیت کسرها، تساوی بالا را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{F - 32}{180} = \frac{C}{100}$$

کسر را ساده می‌کنیم:

$$\frac{F - 32}{9} = \frac{C}{5}$$

این معادله را یک بار برای C و یک بار برای F حل می‌کنیم:

$$F - 32 = \frac{9}{5}C \quad \text{یا} \quad \boxed{F = \frac{9}{5}C + 32} \quad (1)$$

$$9C = 5F - 160 \quad \text{یا} \quad \boxed{C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}} \quad (2)$$

توجه کنید که برای تبدیل درجهٔ حرارت سانتیگراد به فارنهایت، از (۱) یا (۲) می‌توانید استفاده کنید.

تمرین

با استفاده از فرمول ۱، در فعالیت ۱-۱، تعداد جیرجیر جیرجیرک‌ها را برحسب درجهٔ فارنهایت محاسبه کنید. یعنی، فرمول تجربی

$$n = \sqrt{5C - 32}$$

را برحسب درجهٔ فارنهایت بنویسید.

۹-۱- خانوادهٔ تابع‌های توانی

تابع‌های توانی، خانوادهٔ مهمی از تابع‌ها هستند. برای مثال، مساحت یک مربع، تابعی از ضلع آن است و از فرمول $A = f(s) = s^2$ به دست می‌آید.

هم‌چنین، حجم کره که تابعی از شعاع آن است، از فرمول $V = f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ به دست می‌آید.

تعریف

یک تابع توانی به شکل

$$y = f(x) = kx^P$$

است که در آن k هر ثابت غیر صفری می‌تواند باشد و P عددی طبیعی است.

۱- S اول کلمهٔ Side به معنی ضلع است و A، اول کلمهٔ Area به معنی مساحت است.

۲- V اول کلمهٔ Volume به معنای حجم است و r اول کلمهٔ Radius به معنای شعاع است.



نمای جنوبی، خانه طباطبایی، کاشان

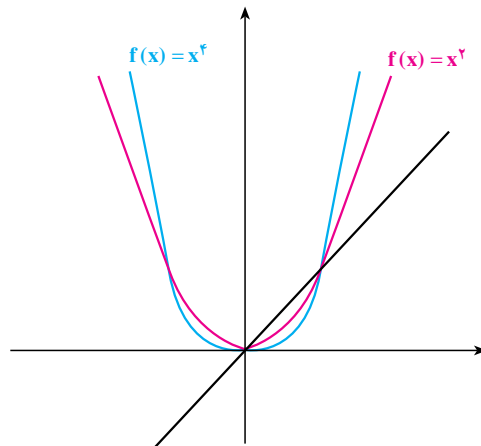
تابع خطی $y = f(x) = mx$ (با ثابت m) نیز یک تابع توانی است که در آن، توان x برابر یک است.
بنابراین، تابع‌های خطی نیز عضوی از خانواده تابع‌های توانی به‌شمار می‌آیند.

فعالیت ۸-۱

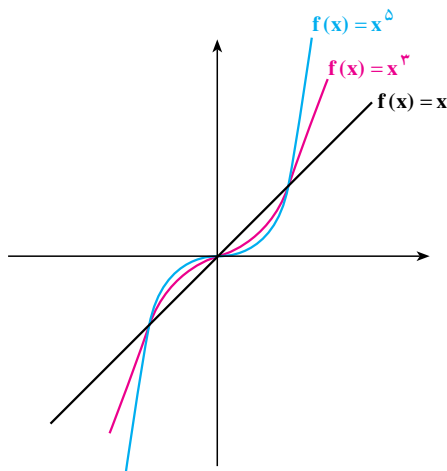
تابع‌های توانی به شکل $y = f(x) = x^n$ را در نظر بگیرید که در آن، n یک عدد صحیح مثبت باشد.

- ۱- فقط با نقطه‌یابی، نمودار تقریبی x^2 ، x^3 ، x^4 و x^5 را رسم کنید.
- ۲- موارد مشابه و متفاوت هریک را بنویسید.
- ۳- آیا می‌توانید نمودارها را دسته‌بندی کنید؟ اگر جواب مثبت است، نمودارها در چند دسته قرار می‌گیرند؟
- ۴- رابطه بین توان‌های x و دسته‌بندی شما چیست؟

به‌طور کلی نمودار تابع‌های توانی وقتی توان x زوج باشد، به شکل صفحه بعد است:



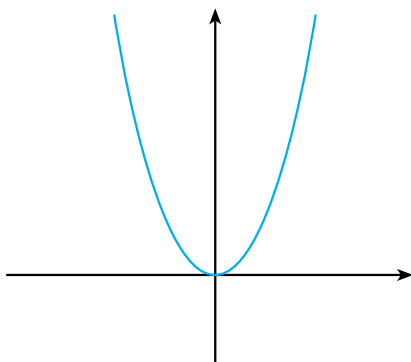
هم چنین، نمودار تابع‌های توانی وقتی توان x فرد باشد نیز، به شکل زیر است:



یکی از معروف‌ترین تابع‌های توانی، $y = f(x) = x^2$ است. این تابع‌ها، بسیاری از پدیده‌های طبیعی را مدل‌سازی می‌کنند. برای مثال، تابع سود، تابع درآمد، تابع پرتاب یک شیء و تابع افتادن یک توپ به زمین و حرکت آن تا زمان توقف بر روی زمین، همگی تابع توانی هستند که در آن‌ها، توان x برابر ۲ است. به دلیل اهمیت این خانواده از تابع‌ها، به آن‌ها نام خاصی داده شده و به سهمی معروف هستند. فصل دوم، اختصاص به این خانواده از تابع‌ها دارد.



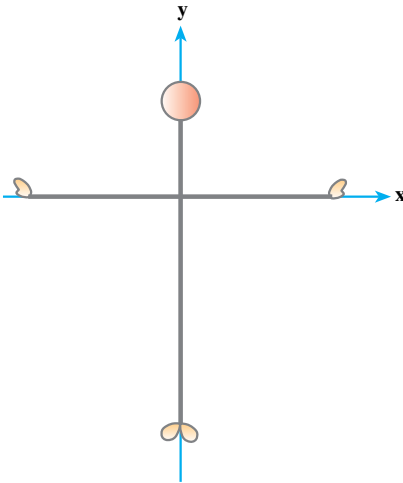
در هنگام مدل‌سازی، بیش از آن که به رسم دقیق نمودار تابع نیاز باشد، به شکل تقریبی آن احتیاج است. برای مثال، می‌توانید با ماشین حساب یا با نقطه‌یابی، نمودار سهمی $f(x) = x^2$ را بکشید :



و زمانی که می‌خواهید بر مبنای این سهمی، نمودار $f(x) = x^2 + 1$ را رسم کنید، کافی است بدانید که سهمی قبلی شما، به اندازه یک واحد بالا می‌پرد!

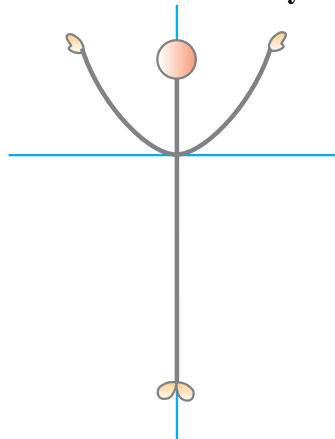
زنگ تفریح ریاضی!

برای رفع خستگی از زحمتی که برای فصل اول کشیده‌اید، ورزش بدن‌سازی زیر را انجام دهید تا سهمی‌ها را برای همیشه، در خاطر داشته باشید! این ورزش، فقط با حرکت دست‌هاست.

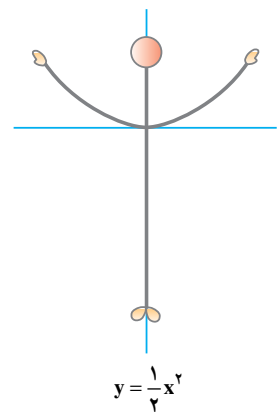
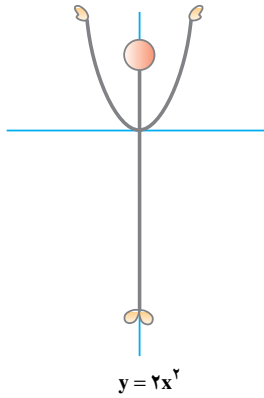
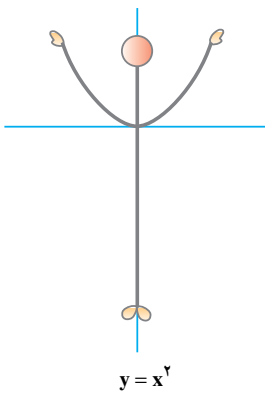


فرض کنید روی محور مختصات طوری ایستاده‌اید که مرکز مختصات، هم سطح با شانه‌ها و دقیقاً زیر نقطهٔ میانی گردن شما باشد.

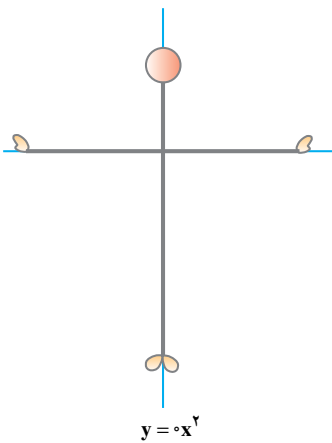
تمرین ۱: دست‌ها را به آهستگی و منحنی‌وار، به طرف بالا حرکت دهید. این حالت استاندارد را $y = x^2$ می‌نامیم. هر یک از تمرین‌های ورزشی را از $y = x^2$ شروع کرده و به آن، خاتمه دهید. یعنی نقطهٔ شروع و پایان، $y = x^2$ است.



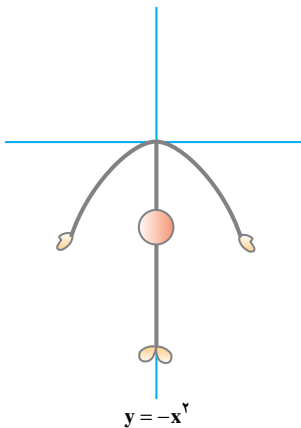
تمرین ۲: شکل‌های زیر، نشان می‌دهند که اگر ضریب x را (که در $y = x^2$ یک است) تغییر دهیم، سهمی تنگ‌تر یا گشادتر می‌شود.



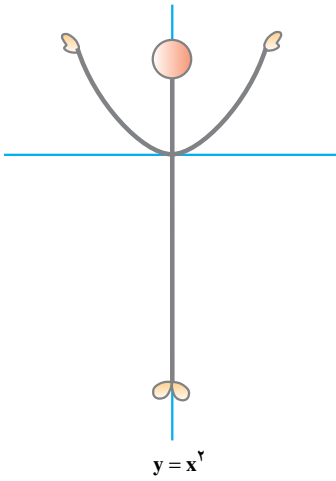
حالا اگر $y = 0x^2$ باشد چه می‌شود؟
درست است! باید دست‌ها در امتداد محور
 x ها باز شود.



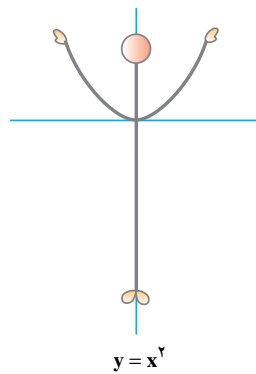
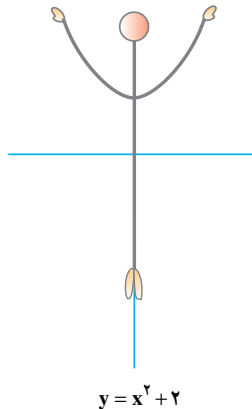
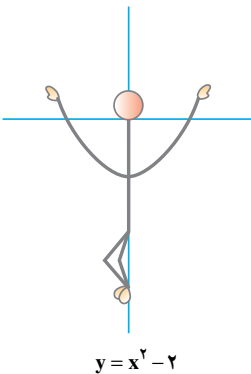
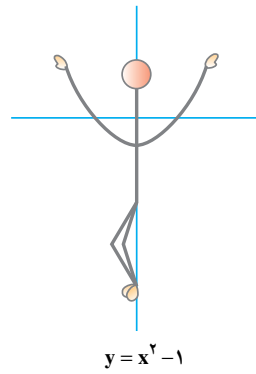
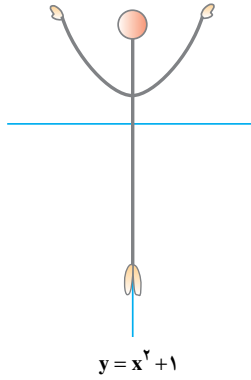
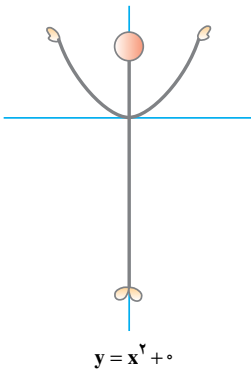
خوب! حالا پاها را جفت کنید و خم
شوید!



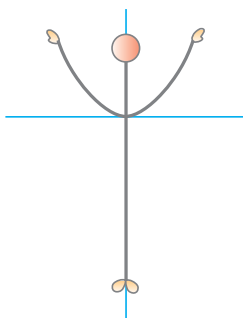
سپس دوباره به حالت اول باز گردید.



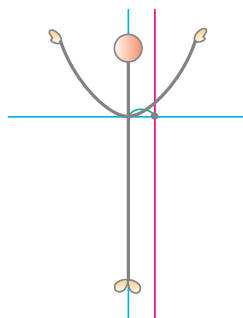
تمرین ۳: این تمرین‌ها نشان می‌دهند که چگونه اضافه کردن یک مقدار ثابت به سمت راست معادله $y = x^2$ ، حرکت‌های بالا و پایین سهمی را تغییر می‌دهد. شما طبق شکل، به ورزش بدن‌سازی خود، ادامه دهید!



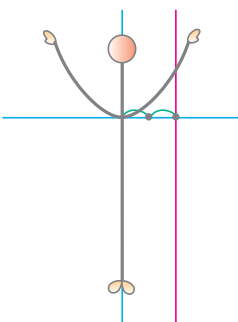
تمرین ۴: تمرین‌های این قسمت، نیازمند تحرک بیشتری است و حرکت سهمی به سمت راست یا چپ را نشان می‌دهد. شما هم با تحرک بیشتر، به ورزش خود ادامه دهید!



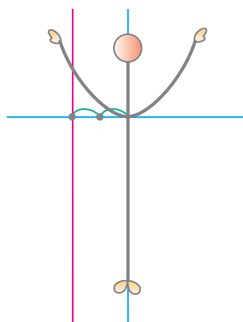
$$y = (x+0)^2$$



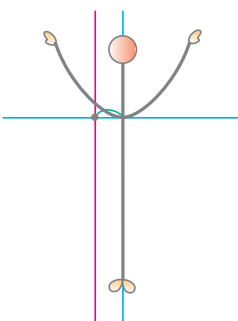
$$y = (x-1)^2$$



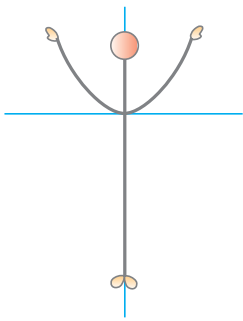
$$y = (x-2)^2$$



$$y = (x+2)^2$$

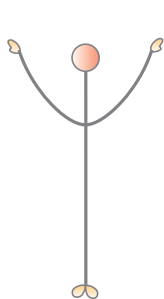


$$y = (x+1)^2$$

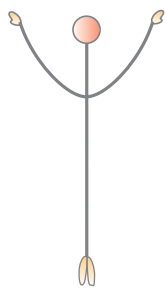


$$y = x^2$$

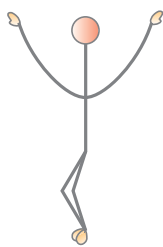
تمرین ۵: حالا که عضلات شما به کار افتاده‌اند و آمادگی بیشتری پیدا کرده‌اید، حرکات ورزشی خود را با تنوع و تحرک بیشتری، مانند شکل‌های زیر، انجام دهید!



$$y = x^2$$



$$y = x^2 + 1$$



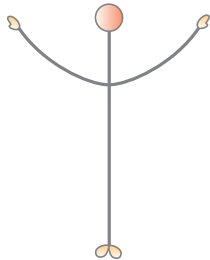
$$y = x^2 - 1$$



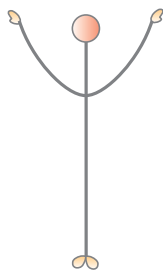
$$y = 2x^2 - 1$$



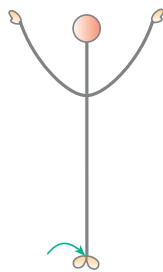
$$y = 2x^2 + 1$$



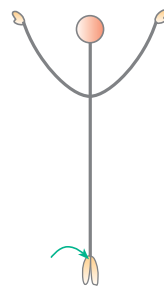
$$y = \frac{1}{4}x^2$$



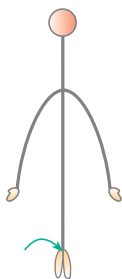
$$y = x^2$$



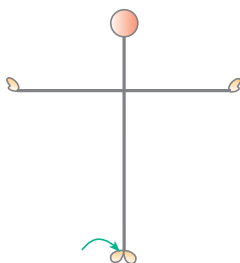
$$y = (x-1)^2$$



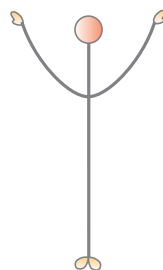
$$y = (x-1)^2 + 1$$



$$y = -2(x-1)^2 + 1$$



$$y = 0(x-1)^2 + 1$$



$$y = x^2$$

معادله و تابع‌های درجه دوم

معادله درجه دوم به معادلاتی گفته می‌شود که دارای چند جمله‌ای‌های با درجه ۲ باشند.

تعریف

یک معادله درجه دوم، معادله‌ای به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ است که در آن a ؛ و b و c ، اعداد حقیقی هستند و a مخالف صفر است.

در این تعریف، ax^2 جمله درجه ۲، bx جمله درجه ۱ و c ، جمله ثابت نامیده می‌شوند.



مثال

$5x^2 + 3x + 4 = 0$ یک معادله درجه ۲ است که در آن، $5x^2$ جمله درجه دو، $3x$ جمله درجه یک و 4 جمله ثابت نامیده می‌شوند.

تمرین

در معادله‌های درجه دوم زیر، جمله درجه ۲، جمله درجه ۱ و جمله ثابت را مشخص کنید:

الف) $3x^2 + 50x - 1 = 0$

ب) $-\frac{1}{4}x^2 - 3x + 2 = 0$

مثال

در معادله‌های درجه دوم زیر، جمله درجه دو، جمله درجه یک و جمله ثابت را مشخص کنید:

الف) $ax^2 - 4 = 0$

ب) $\frac{1}{5}x^2 - 3x = 0$

پ) $x^2 = 0$

حل:

الف) در این معادله، جمله درجه ۲ برابر ax^2 و جمله درجه ۱ برابر صفر و جمله ثابت برابر -4 است، زیرا می‌توانیم معادله را به شکل زیر بنویسیم:

$$ax^2 + 0x + (-4) = 0$$

ب) معادله $\frac{1}{5}x^2 - 3x = 0$ را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{5}x^2 + (-3)x + 0 = 0$$

پس جمله درجه ۲ مساوی $\frac{1}{5}x^2$ ، جمله درجه ۱ برابر $-3x$ و جمله ثابت برابر صفر است.

ب) معادله $x^2 = 0$ را به شکل $x^2 + 0x + 0 = 0$ می‌نویسیم.

در این معادله، جمله درجه ۲ مساوی x^2 ، جمله درجه ۱ مساوی صفر و جمله ثابت نیز مساوی صفر است.

در معادله‌های زیر؛ جملهٔ درجهٔ ۲، جملهٔ درجهٔ ۱ و جملهٔ ثابت را مشخص کنید:

الف) $3x^2 - bx = 0$

ب) $3x^2 - 2 = 0$

پ) $3x^2 = 0$

ت) $\frac{1}{3}x^2 - bx + c = 0$

شکل استاندارد معادلهٔ درجهٔ دوم، به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ است.

۱-۲ تابع درجهٔ دوم

تابع‌های درجهٔ دوم، به شکل $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند که در آن، a و b و c ؛ اعداد حقیقی هستند و a مخالف صفر است.

توجه: به تفاوت بین یک معادلهٔ درجهٔ دوم که می‌توان آن را به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ نوشت و یک تابع درجهٔ دوم که می‌توان آن را به شکل $f(x) = ax^2 + bx + c$ نوشت، توجه کنید. معادلهٔ درجهٔ دوم، یک مورد خاص $f(x) = 0$ است و ریشه‌های این معادله، محل تقاطع نمودار $f(x)$ ، با محور x ها است.

۲-۲ تخمین جواب‌های معادلات درجهٔ دوم

حل معادله‌ای مانند $3 = x^2 - 2x - 5$ ، به معنای پیدا کردن مقادیری برای x است که به ازای

جدول ۱

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$x^2 - 2x - 5$	۱۰	۳	-۲	-۵	-۶	-۵	-۲	۳	۱۰

آن مقادیر؛ $x^2 - 2x - 5 = 3$ دارای مقدار ۳ باشد. جدول بالا را در نظر بگیرید.

با توجه به جدول، مقدار عبارت $x^2 - 2x - 5$ به ازای دو مقدار متفاوت x یعنی ۲ و ۴،

مساوی ۳ می‌شود. یعنی معادلهٔ $x^2 - 2x - 5 = 3$ دارای دو جواب ۲ و ۴ است.

تعریف

مقادیری از x که به ازای آن‌ها، معادله برقرار است؛ جواب معادله نامیده می‌شوند.

همان طور که در جدول می‌بینید، به ازای $x=1$ ، مقدار عبارت $x^2 - 2x - 5$ مساوی -6 می‌شود. یعنی معادله $x^2 - 2x - 5 = -6$ دارای یک جواب است.

مثال

آیا معادله $x^2 - 2x - 5 = -10$ جواب دارد؟ توضیح دهید.
حل: با توجه به جدول ۱، دیده می‌شود که کمترین مقدار عبارت $x^2 - 2x - 5$ برابر -6 است. بنابراین، معادله $x^2 - 2x - 5 = -10$ جواب ندارد، یعنی x ای وجود ندارد که به ازای آن، مقدار $x^2 - 2x - 5$ برابر -10 شود.

مثال

آیا معادله‌های زیر، درجه دوم هستند؟ هر معادله دارای چند جواب است؟
الف) $(7-2x)^2 = (2x-7)^2$
ب) $(2x+1)^2 = (3+2x)^2$

حل:

الف) دو طرف معادله را با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله به توان می‌رسانیم:

$$\begin{aligned}(7-2x)^2 &= (2x-7)^2 \\ 49 + 4x^2 - 28x &= 4x^2 - 28x + 49 \\ \circ &= \circ\end{aligned}$$

توجه: این معادله دارای ویژگی خاصی است یعنی به ازای تمام مقادیر x ، معادله درست است. به این نوع معادله، اتحاد گفته می‌شود.^۱

۱- توجه داشته باشید که در ریاضی سال اول، به تفصیل با اتحادها کار کرده‌اید.

$$(2x+1)^2 = (3+2x)^2 \quad \text{ب)}$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 9 + 12x + 4x^2$$

$$4x + 1 - 9 - 12x = 0$$

$$-8x - 8 = 0 \Rightarrow 8x = -8 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

پس این معادله، درجه اول است و تنها یک جواب دارد.

۳-۲- حل معادله درجه دوم

اگر بتوان یک عبارت درجه دوم را به صورت حاصل ضرب دو عبارت درجه اول نوشت، اصطلاحاً گفته می شود که عبارت درجه دوم، به حاصل ضرب دو عبارت درجه اول، تجزیه شده است.

به مثال های زیر توجه کنید :

الف) $x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$ اتحاد جمله مشترک

ب) $2x^2 + 5x = x(2x+5)$ فاکتورگیری

پ) $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ اتحاد مزدوج

ت) $x^2 + 6x + 9 = (x+3)(x+3) = (x+3)^2$ اتحاد مربع مجموع دو جمله

ث) $x^2 - 6x + 9 = (x-3)(x-3) = (x-3)^2$ اتحاد مربع تفاضل دو جمله

معادله نظیر هر یک از عبارت های درجه دوم بالا، به شکل زیر است :

الف) $x^2 + 4x + 3 = 0$

ب) $2x^2 + 5x = 0$

پ) $x^2 - 9 = 0$

ت) $x^2 + 6x + 9 = 0$

ث) $x^2 - 6x + 9 = 0$

برای حل این معادله ها، می توانیم از یک خاصیت ساده اما مهم اعداد حقیقی استفاده

کنیم :

خاصیت فاکتور (عامل) صفر: برای هر دو عدد حقیقی a و b ، اگر $ab = 0$ ، آن گاه $a = 0$ یا $b = 0$.

حل معادلات نمونه

الف) $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$(x + 3)(x + 1) = 0$$

با استفاده از اتحاد جمله مشترک، معادله را تجزیه می‌کنیم.

$$x + 3 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 1 = 0$$

با استفاده از خاصیت فاکتور (عامل) صفر

$$\boxed{x = -3} \quad \text{یا} \quad \boxed{x = -1}$$

ب) $2x^2 + 5x = 0$

$$x(2x + 5) = 0$$

با استفاده از فاکتورگیری

$$\boxed{x = 0} \quad \text{یا} \quad 2x + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{5}{2}}$$

با استفاده از خاصیت فاکتور صفر

پ) $x^2 - 9 = 0$

$$(x - 3)(x + 3) = 0$$

اتحاد مزدوج

$$x - 3 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 3 = 0$$

خاصیت فاکتور صفر

$$\boxed{x = 3} \quad \text{یا} \quad \boxed{x = -3}$$

ت) $x^2 + 6x + 9 = 0$

$$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2 = 0$$

اتحاد مربع مجموع دو جمله

$$x + 3 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 3 = 0$$

خاصیت فاکتور صفر

$$\boxed{x = -3} \quad \text{یا} \quad \boxed{x = -3}$$

پس معادله، دارای دو جواب مساوی است که به آن، ریشه مضاعف گفته می‌شود.

ث) $x^2 - 6x + 9 = 0$

$$(x - 3)(x - 3) = (x - 3)^2 = 0$$

اتحاد مربع تفاضل دو جمله

$$x - 3 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 3 = 0$$

خاصیت فاکتور صفر

$$\boxed{x = 3} \quad \text{یا} \quad \boxed{x = 3}$$

پس معادله، دارای یک جواب است یعنی یک ریشه مضاعف دارد.

ریشهٔ یک معادله، همان جواب معادله است.

همان طور که در حل معادلات نمونه دیدید :

برای استفاده از خاصیت فاکتور (عامل) صفر، دو شرط باید وجود داشته باشد :

۱- یک طرف معادله صفر باشد ؛

۲- طرف دیگر معادله، یک حاصل ضرب باشد.

مسائل

در صورت امکان، جواب معادله‌های زیر را به دست آورید.

$$5x = x^2 \quad -1$$

$$p^2 + 36 = 0 \quad -2$$

$$x^2 = 1/21 \quad -3$$

$$x - 2 = -\frac{35}{x} \quad -4$$

توجه: همان طور که در بسیاری حالت‌ها، دو جواب برای معادله‌های درجهٔ دوم به دست آوردیم، می‌توانیم با داشتن دو جواب نیز، یک معادلهٔ درجهٔ دوم بنویسیم.

مثال

معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ۳ و -۷، جواب‌های آن باشند.

حل: ۳ و -۷ جواب معادله هستند، پس

$$| x = 3 | \text{ یا } | x = -7 |$$

$$x - 3 = 0 \text{ یا } x + 7 = 0$$

$$(x - 3)(x + 7) = 0$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

تمرین

معادله درجه دومی بنویسید که جواب‌های آن، جفت عددهای زیر باشد:

(الف) ۴, ۴ (ب) ۲, ۷ (پ) -۲, -۳

۱-۲-۳ حل معادله درجه دوم با استفاده از خاصیت ریشه زوج: در شکل استاندارد

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ یعنی } ax^2 + bx + c = 0$$

(الف) اگر $c = 0$ باشد، آن‌گاه $ax^2 + bx = 0$ می‌شود. در نتیجه، با استفاده از خاصیت فاکتور

صفر، معادله را که همیشه جواب حقیقی دارد، حل می‌کنیم:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$\boxed{x = 0} \text{ یا } ax + b = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{b}{a}}$$

(ب) اگر $b = 0$ ، آن‌گاه $ax^2 + c = 0$. در این حالت برای پیدا کردن جواب معادله، به طریق زیر

عمل می‌کنیم:

$$ax^2 + c = 0$$

دو طرف معادله را بر a تقسیم می‌کنیم.

$$x^2 + \frac{c}{a} = 0$$

از دو طرف، $\frac{c}{a}$ را کم می‌کنیم.

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

این معادله، وقتی جواب دارد که $-\frac{c}{a} \geq 0$ (چرا؟)

در این صورت:

$$\boxed{x = \sqrt{-\frac{c}{a}}} \text{ یا } \boxed{x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}}$$

اگر $-\frac{c}{a} < 0$ ، معادله جواب ندارد (چرا؟).

در حالت کلی:

اگر $x^2 = k$ و $k > 0$ ، آن‌گاه $x = \sqrt{k}$ یا $x = -\sqrt{k}$. این طریق پیدا کردن جواب‌های معادله $x^2 = k$ ، استفاده از خاصیت ریشه زوج است.

مثال

معادله درجهٔ دوم $5 - x^2 = 0$ را حل کنید.
 حل: ابتدا معادله را به شکل $x^2 = 5$ می‌نویسیم؛
 با استفاده از خاصیت ریشهٔ زوج: $x = -\sqrt{5}$ یا $x = \sqrt{5}$.

مثال

با استفاده از خاصیت ریشهٔ زوج، معادلهٔ $(2x+1)^2 = 5$ را حل کنید.
 از خاصیت ریشهٔ زوج با $k > 0$ استفاده می‌کنیم:

$$2x+1 = \pm\sqrt{5}$$

$$2x = \pm\sqrt{5} - 1$$

به دو طرف معادله (-1) را اضافه می‌کنیم:

دو طرف را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$x = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \left| x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right| \text{ یا } \left| x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \right|$$

توجه داشته باشید که نماد (\pm) نشانگر دو جواب است، یک جواب با علامت مثبت و جواب دیگر با علامت منفی خواهد بود.

تمرین

معادله‌های زیر را حل کنید:

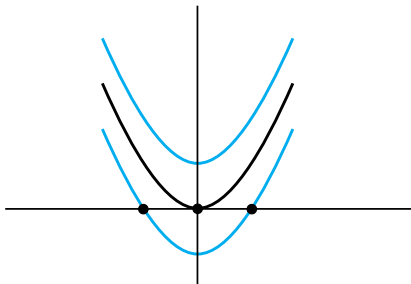
الف) $(2x+5)^2 = (x-1)^2$

ب) $x^2 + 7x + 6 = 0$

ت) $(5x-4)^2 = 9$

پ) $x^2 = x$

ث) $(3x-2)^2 = 15$



بررسی تعداد جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم
 با توجه به «زنگ تفریح ریاضی» پایان فصل اول،
 تابع $y = f(x) = x^2$ را در نظر می‌گیریم و نمودار آن
 را رسم می‌کنیم:

آن‌گاه، نمودار تابع $f(x) = x^2 - 1$ را روی همان صفحه مختصات رسم می‌کنیم. سپس، نمودار تابع $f(x) = x^2 + 1$ را نیز در همان صفحه مختصات رسم می‌کنیم. نتیجه‌ها را بررسی می‌کنیم:

- ۱- نمودار تابع $y = f(x) = x^2$ یک ریشه دارد (محل تقاطع نمودار با محور x ها)، در نتیجه؛ معادله $y = x^2 = 0$ دارای یک جواب حقیقی یا به عبارت دیگر، دارای یک ریشه مضاعف است.
- ۲- نمودار تابع $y = f(x) = x^2 - 1$ دو ریشه دارد (یعنی نمودار تابع؛ محور x ها را در دو نقطه قطع کرده است). در نتیجه، معادله $y = x^2 - 1 = 0$ دارای دو جواب حقیقی است.
- ۳- نمودار تابع $y = f(x) = x^2 + 1$ هیچ ریشه ندارد (یعنی نمودار تابع، اصلاً محور x ها را قطع نکرده است). در نتیجه، معادله $y = x^2 + 1 = 0$ دارای جواب حقیقی نیست.

تمرین

معادله‌های $5 - x^2 = 0$ و $5 + x^2 = 0$ ، خیلی شبیه هستند اما، از نظر تعداد جواب‌ها متفاوت هستند. با استفاده از خاصیت ریشه زوج، توضیح دهید چرا یک معادله دو جواب دارد، اما معادله دیگر، هیچ جواب حقیقی ندارد؟

۲-۳-۲- حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل کردن

به مثال زیر توجه کنید:

مثال

جواب‌های معادله $4x^2 - 4x - 8 = 0$ را پیدا کنید.

حل: معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(4x^2 - 4x) - 8 = 0$$

$$[(2x)^2 - 2(2x) + \square] - 8 - \square = 0 \quad (1)$$

سعی می‌کنیم عبارت داخل پرانتز را به صورت مربع کامل درآوریم: توجه کنید مقداری را که

به داخل کروشه اضافه کرده‌ایم، مجدداً کم می‌کنیم تا تعادل معادله، به هم نخورد!

عبارت داخل کروشه، مربع تفاضل دو جمله است که جمله سوم آن مجهول است. چون

$$((a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2)$$

پس \square ، $2(2x) = 2(2x)$. می بینید که مقدار \square باید ۱ باشد تا معادله برقرار باشد، پس در (۱)، مقدار \square را با 1^2 جایگزین می کنیم:

$$[(2x)^2 - 2(2x) + 1] - 8 - 1^2 = 0$$

$$(2x - 1)^2 - 9 = 0$$

$$(2x - 1)^2 = 9$$

$$2x - 1 = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$$2x - 1 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow \underline{x = 2}$$

$$2x - 1 = -3 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow \underline{x = -1}$$

یا

مربع کامل کردن، یعنی نوشتن معادله درجه دوم به شکل $(x + h)^2 = k$ که در آن h و k اعداد حقیقی هستند.

حل یک معادله درجه دوم با مربع کامل کردن

۱- اگر لازم باشد، دو طرف معادله را بر ضریب x^2 تقسیم کنید تا ضریب آن ۱

شود.

۲- معادله را به شکل $x^2 + bx = k$ بنویسید.

۳- $(\frac{b}{2})^2$ را به هر دو طرف تساوی اضافه کنید تا جمله سمت چپ، مربع کامل

شود.

۴- سه جمله ای کامل شده را به صورت مربع مجموع یا مربع تفاضل دو جمله

بنویسید.

۵- با استفاده از خاصیت ریشه زوج، معادله را حل کنید.

مثال

معادله های درجه دوم زیر را با روش مربع کامل کردن حل کنید.

الف) $x^2 - 10x - 1 = 0$

حل: به هر دو طرف معادله، ۱ را اضافه کنید.
 $x^2 - 10x = 1$
 مربع (مجذور) نصف ضریب x یعنی $(\frac{-10}{2})^2 = 25$ را به هر دو طرف معادله اضافه کنید،
 تا سه جمله‌ای به صورت مربع کامل درآید.

$$x^2 - 10x + 25 = 1 + 25$$

سپس سه جمله‌ای را به صورت مربع تفاضل دو جمله بنویسید.

$$(x - 5)^2 = 26$$

از خاصیت ریشه زوج (مربع) استفاده کنید.

$$x - 5 = \pm\sqrt{26}$$

به دو طرف معادله، ۵ را اضافه کنید.

$$x = 5 \pm \sqrt{26}$$

$$x = 5 + \sqrt{26} \text{ یا } x = 5 - \sqrt{26}$$

توجه: با استفاده از ماشین حساب، مقدار تقریبی x را حساب کنید.

ب) $x(2x + 3) = 6$

$$2x^2 + 3x = 6$$

حل: پرانتزها را بردارید.

$$x^2 + \frac{3}{2}x = 3$$

دو طرف را بر ضریب درجه دوم (x^2) تقسیم کنید.

به دو طرف، مجذور نصف ضریب x یعنی $(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{16}$ را اضافه کنید.

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = \frac{3}{1} + \frac{9}{16}$$

$$(x + \frac{3}{4})^2 = \frac{57}{16}$$

طرف چپ مربع کامل است.

$$x + \frac{3}{4} = \pm\sqrt{\frac{57}{16}}$$

از خاصیت ریشه زوج استفاده کنید.

$$x + \frac{3}{4} = \pm\frac{\sqrt{57}}{4}$$

$$x = -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{57}}{4}$$

از دو طرف $\frac{3}{4}$ را کم کنید تا جواب x به دست آید.

با استفاده از ماشین حساب، مقدار تقریبی x را حساب کنید.

$$|x \cong 1/14| \text{ یا } |x \cong 2/64|$$

پ) $x^2 + 6x + 8 = 0$

$$x^2 + 6x = -8$$

از دو طرف ۸ را کم کنید.

مجذور نصف ضریب x یعنی $(\frac{6}{2})^2 = 9$ را به دو طرف اضافه کنید تا سه جمله‌ای، مربع کامل

$$x^2 + 6x + 9 = -8 + 9$$

شود.

$$x^2 + 6x + 9 = 1$$

$$(x + 3)^2 = 1$$

سه جمله‌ای را به صورت مربع مجموع دو جمله بنویسید.

$$x + 3 = \pm\sqrt{1}$$

از خاصیت ریشهٔ زوج استفاده کنید.

$$x = -3 \pm 1$$

از دو طرف ۳ را کم کنید.

$$|x = -2| \text{ یا } |x = -4|$$

تمرین

معادله‌های زیر را از طریق مربع کامل کردن؛ حل کنید:

الف) $x^2 + 2x = 5$

ب) $x(2x - 3) = 1$

پ) $x^2 + 6x + 8 = 0$

۳-۲-۲ فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم در حالت کلی

اگر مراحل حل معادلهٔ درجهٔ دوم را به روش مربع کامل کردن، برای معادلهٔ درجهٔ دوم به شکل استاندارد $ax^2 + bx + c = 0$ انجام دهیم، می‌توانیم یک فرمول کلی برای پیدا کردن جواب‌های معادله‌های درجهٔ دوم پیدا کنیم. زیرا اگر a ، b و c ، هر سه مخالف صفر باشند، آن‌گاه، استفاده از خاصیت فاکتور صفر یا استفاده از خاصیت ریشهٔ زوج، همیشه به‌سادگی، امکان‌پذیر نیست. به همین دلیل، به ابزار دیگری برای حل معادله‌های درجهٔ دوم در حالت کلی، نیاز داریم.

مراحل به دست آوردن فرمول معادله درجه دوم

شکل استاندارد معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

کم کردن c از دو طرف

$$ax^2 + bx = -c$$

تبدیل ضریب جمله درجه دوم به 1 با تقسیم دو طرف معادله بر a

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

اضافه کردن مجذور نصف ضریب x یعنی $\frac{b^2}{4a^2}$ به دو طرف

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

یکسان کردن مخرج کسرها در سمت راست

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$

ترکیب دو کسر در سمت راست

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

سه جمله ای سمت چپ، مربع کامل است. نوشتن سمت چپ به صورت توانی

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

توجه کنید که تساوی به دست آمده، با توجه به مثبت بودن $4a^2$ تنها وقتی

معنی دار است که

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

استفاده از خاصیت ریشهٔ زوج

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

کم کردن $\frac{b}{2a}$ از دو طرف برای پیدا کردن x

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ترکیب دو کسر در سمت راست

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

این فرمول، فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم نامیده می‌شود.

فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم

برای اعداد حقیقی a ، b و c و با شرط $a \neq 0$ ، جواب‌های حقیقی معادلهٔ درجهٔ دوم

$ax^2 + bx + c = 0$ در صورت وجود عبارتند از:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}, \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

توجه: قبل از استفاده از فرمول به دست آمده، معادلهٔ درجهٔ دوم باید به شکل استاندارد نوشته

شود.

فکر کنید: چرا در فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم، b و c می‌توانند صفر باشند اما a نمی‌تواند

صفر شود؟ چرا این حالت معنی ندارد؟

مثال

با استفاده از فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم، معادلهٔ $3x^2 - 13x + 30 = 0$ را حل کنید.

$$3x^2 - 13x + 30 = 0$$

حل: نوشتن معادله به شکل استاندارد

$a = 3$ ، $b = -13$ و $c = -30$ را در فرمول قرار می‌دهیم :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(3)(-30)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 360}}{6}$$

رادیکال را ساده می‌کنیم :

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{529}}{6}$$

۵۲۹ مربع کامل است در نتیجه :

$$x = \frac{13 \pm 23}{6} \begin{cases} = \frac{13 + 23}{6} = 6 \\ = \frac{13 - 23}{6} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

مبین

در فرمول معادله درجه دوم در حالت کلی یعنی ،

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مقدار زیر رادیکال یعنی $b^2 - 4ac$ مبین نامیده می‌شود و با علامت Δ (بخوانید دلتا) نشان داده می‌شود. مبین، اطلاعاتی در مورد تعداد جواب‌های یک معادله درجه دوم با ضرایب حقیقی را، بیان می‌کند.

اطلاعات به‌دست آمده از مبین

اگر a ، b و c ، اعداد حقیقی باشند؛ مبین تعداد جواب‌های یک معادله درجه دوم را به‌شرح

زیر، بیان می‌کند :

$$1- \text{ اگر } \Delta = b^2 - 4ac > 0 \text{ ، معادله دارای دو جواب متمایز } \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ است.}$$

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ است.}$$

۲- اگر $b^2 - 4ac = 0$ ، معادله یک جواب به صورت $-\frac{b}{2a}$ دارد (ریشه مضاعف).

۳- اگر $b^2 - 4ac < 0$ ، معادله هیچ جواب حقیقی ندارد (اعداد منفی جذر ندارند).

مثال

با تشکیل مبین هر معادله، تعداد جواب‌های آن را تعیین کنید.

الف) $3x^2 + 1 = 2x$

ب) $x(5x + 1) = 12$

پ) $25x^2 - 20x + 4 = 0$

حل:

الف) $3x^2 + 1 = 2x$

$$3x^2 - 2x + 1 = 0$$

نوشتن معادله به شکل استاندارد

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

تشکیل مبین معادله

$$\Delta = (-2)^2 - 4(3)(1) = 4 - 12 = -8$$

چون مبین منفی است، پس معادله جواب حقیقی ندارد.

ب) $x(5x + 1) = 12$

$$5x^2 + x - 12 = 0$$

نوشتن معادله به شکل استاندارد

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

تشکیل مبین معادله

$$= (1)^2 - 4(5)(-12) = 1 + 240 = 241$$

مبین مثبت است، پس معادله دو جواب متمایز دارد.

پ) $25x^2 - 20x + 4 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4(25)(4) = 400 - 400 = 0$$

مبین صفر است، پس معادله دارای یک جواب حقیقی (ریشه مضاعف) است.

۱- معادله‌های زیر را اول به صورت استاندارد بنویسید و بعد مقادیر a ، b و c را مشخص کنید.

الف) $x(3x - 2) = 7x + 6$

ب) $(x - 2)^2 = -4x$

پ) $1 = 4x(2x - 5)$

۲- معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^2 + 16 = 8x$

ب) $2x^2 = 7x - 3$

پ) $x^2 = 5x$

ت) $2x^2 + 7x = 4$

ث) $x^2 + 1 = 2x$

۳- با استفاده از مبین، تعداد جواب‌های معادله‌های زیر را تعیین کنید:

الف) $4x^2 + 12x = 7$

ب) $3x^2 + 4x - 8 = 0$

پ) $x^2 + 12 = 8x$

ت) $1 + 6x - 9x^2 = 0$

۴- چرا معادله $x^2 + ax - 5 = 0$ ، همیشه جواب‌های حقیقی دارد؟ (بدون توجه به مقدار a).

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها

مثال

با استفاده از فرمول معادله درجه دوم، نشان دهید که مجموع ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$

برابر $-\frac{b}{a}$ است. نتیجه را با حل معادله $2x^2 - 7x - 15 = 0$ امتحان کنید.

حل: با استفاده از فرمول معادله درجه دوم،

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

پس

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مخرج مشترک می‌گیریم.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

حال، نتیجه رادر معادله $2x^2 - 7x - 15 = 0$ امتحان می‌کنیم:

$$2x^2 - 7x - 15 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{169}}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm 13}{4}$$

$$x_1 = \frac{7+13}{4} = \frac{20}{4} = 5 \text{ و } x_2 = \frac{7-13}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

پس

$$x_1 + x_2 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{10}{2} - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

از طرفی،

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-7)}{2} = \frac{7}{2}$$

یعنی نتیجه به‌دست آمده در بالا، تأیید شد.

مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم

$$, ax^2 + bx + c = 0$$

برابر با $-\frac{b}{a}$ است.

مثال

الف) با استفاده از فرمول معادله درجه دوم، حاصل ضرب ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را به‌دست آورید.

حل: برای معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ و } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$x_1 x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{b^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2}$$

با استفاده از اتحاد مزدوج

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

ب) با استفاده از نتیجه (الف)، توضیح دهید که چرا -4 و 5 نمی‌توانند جواب‌های $2x^2 - 3x - 20 = 0$ باشند.

حل: در (الف)، دیدیم که حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است. در این معادله، $a = 2$ و $c = -20$ است پس:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-20}{2} = -10$$

اما $x_1 = -4$ و $x_2 = 5$ که حاصل ضرب آن‌ها

$$x_1 \cdot x_2 = 5 \cdot (-4) = -20$$

است. پس -4 و 5 نمی‌توانند ریشه‌های این معادله باشند.

حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ برابر با $\frac{c}{a}$ است.

مسائل

۱- در معادله‌های زیر، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را بدون حل معادله،

به دست آورید :

الف) $3x^2 - 2x - 1 = 0$

ب) $x^2 + x + 1 = 0$

پ) $2x^2 - 2x + 1 = 0$

ت) $x^2 - 4x - 1 = 0$

۲- برای هر دسته از جواب‌های زیر، یک معادله درجه دوم بنویسید :

الف) $-5 \pm 2\sqrt{5}$

ب) $-2 \pm 3\sqrt{2}$

۳- با استفاده از فرمول حل معادله درجه دوم، معادله‌های زیر را حل کنید :

الف) $x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$

ب) $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{5}x - \sqrt{8} = 0$

۲-۴- معادله‌های کسری

گاهی ساده کردن کسرهای گویا، به یک معادله درجه دوم منجر می‌شود.

مثال

معادله $\frac{2}{t} - \frac{t}{t-2} = 5$ را حل کنید.

حل: توجه داشته باشید که ۲ و صفر مقادیر غیرقابل قبولی برای t هستند. (چرا؟)

$\frac{2}{t} - \frac{t}{t-2} = 5$ مخرج مشترک می‌گیریم

$\frac{t(t-2)}{1} \times \frac{2}{t} - \frac{t(t-2)}{1} \times \frac{t}{t-2} = 5t(t-2)$ ضرب می‌کنیم

$2(t-2) - t^2 = 5t^2 - 10t$ ساده می‌کنیم

$-6t^2 + 12t - 4 = 0$ معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم

حال از فرمول حل معادله درجه دوم برای پیدا کردن t استفاده می‌کنیم :

$$t = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(-6)(-4)}}{2(-6)} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 96}}{-12} = \frac{-12 \pm \sqrt{48}}{-12}$$
$$= \frac{-12 \pm \sqrt{16} \times \sqrt{3}}{-12} = \frac{-12 \pm 4\sqrt{3}}{-12} = \frac{3 \mp \sqrt{3}}{3}$$

هر دو جواب معادله قابل قبول هستند.

$$t \cong 1/58 \text{ یا } t \cong 0/42$$

۵-۲- حل معادلات رادیکالی

برای حل معادلات رادیکالی، دو طرف معادله را به توان فرجه رادیکال می‌رسانیم. ممکن است که معادله نتیجه شده، درجه دوم باشد که در آن صورت، با یکی از ۴ روش موجود آن‌ها را حل می‌کنیم.

مثال

معادله $\sqrt{x+1} = x-2$ را حل کنید.

حل: دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(\sqrt{x+1})^2 = (x-2)^2$$

دوجمله‌ای را به توان می‌رسانیم

$$x+1 = x^2 - 4x + 4$$

معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

حال با استفاده از فرمول حل معادله درجه دوم، x را به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} = \begin{cases} \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \cong 4/3^0 \\ \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \cong 0/7^0 \end{cases}$$

با قراردادن این دو جواب ممکن در معادله، می‌بینیم که $0/7^0$ یک جواب غیرقابل قبول است

(چرا؟) پس تنها جواب معادله، $\frac{5 + \sqrt{13}}{2}$ یا تقریباً $4/3^0$ است.

تذکر: بهتر است قبل از حل معادلات رادیکالی، ابتدا دامنه جواب را پیدا

کنیم و سپس معادله‌ها را حل کنیم. در مثال بالا، مقدار زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد یعنی

$$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

چون طرف چپ معادله بزرگتر یا مساوی صفر است (نامنفی است)، طرف راست معادله نیز باید نامنفی باشد یعنی

$$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

با توجه به دو شرط $x \geq -1$ و $x \geq 2$ ، نتیجه می‌شود که $x \geq 2$ قابل قبول است.

توجه: اگر معادله‌ای را بتوان به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ نوشت که در آن، u یک عبارت جبری باشد، می‌گوییم معادله به شکل درجه دوم است. برای حل چنین معادله‌ای، جایگزینی انتخاب می‌کنیم تا معادله را بر حسب u بنویسیم. سپس از روش‌های حل معادله درجه دوم استفاده می‌کنیم.

مثال

معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

ب) $16(z-1)^2 - 8(z-1) - 2 = 0$

حل:

الف) اولین جمله یعنی x^4 ، مربع x^2 در جمله دوم است.

$$x^4 - 6x^2 + 8 = 0$$

x^4 را بر حسب x^2 می‌نویسیم

$$(x^2)^2 - 6x^2 + 8 = 0$$

x^2 را مساوی u قرار می‌دهیم

$$x^2 = u \Rightarrow (x^2)^2 = u^2$$

سه جمله‌ای را بر حسب u می‌نویسیم

$$u^2 - 6u + 8 = 0$$

سه جمله‌ای را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم

$$(u - 2)(u - 4) = 0$$

با استفاده از خاصیت فاکتور صفر معادله را حل می‌کنیم

$$u - 2 = 0 \text{ یا } u - 4 = 0$$

$$u = 2 \text{ یا } u = 4$$

به جای u ، معادل آن x^2 را قرار می‌دهیم

$$x^2 = 2 \text{ یا } x^2 = 4$$

از خاصیت ریشه زوج استفاده می‌کنیم

$$x = \pm\sqrt{2} \text{ یا } x = \pm 2$$

معادله دارای چهار جواب $\pm\sqrt{2}$ و ± 2 است.

ب) $16(z-1)^2 - 8(z-1) - 2 = 0$

u را $z-1$ انتخاب کنید پس: $u^2 = (z-1)^2$ و

$$16u^2 - 8u - 2 = 0$$

از حل فرمول معادله درجه دوم برای به دست آوردن u استفاده کنید:

$$\begin{aligned} u &= \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(16)(-2)}}{2(16)} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 128}}{32} = \frac{8 \pm \sqrt{192}}{32} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{64} \times \sqrt{3}}{32} = \frac{8 \pm 8\sqrt{3}}{32} = \frac{8(1 \pm \sqrt{3})}{32} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$u \cong 0/68 \text{ یا } u \cong 0/18$$

برای محاسبه z ، مقدار u را در $u = z-1$ قرار می‌دهیم:

$$z-1 \cong 0/68 \Rightarrow z \cong 1/68$$

$$z-1 \cong 0/18 \Rightarrow z \cong 0/18$$

یا

فعالیت ۱-۲

الف) معادله $\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} - 3 = 0$ را در نظر بگیرید.

۱- آیا این معادله درجه دوم است؟

۲- اگر معادله درجه دوم باشد، آیا جایگزینی $u = x-2$ را انتخاب می‌کنید یا

$$? u = \frac{1}{x-2}$$

۳- آیا هر دو جایگزینی جواب یکسانی برای u و x به دست می‌دهد؟

(ب)

۱- معادله $x + \frac{1}{x-1} - \frac{5-4x}{x-1} = 0$ را در نظر بگیرید؛ نشان دهید که نتیجه

کسرهای ساده شده؛ معادله $x^2 + 3x - 4 = 0$ است که دارای دو جواب است. آن گاه نشان دهید که اگر اول جمع و تفریق را انجام دهیم و بعد نتیجه را ساده کنیم، یک معادله درجه یک با یک جواب به دست می آوریم. علت این اختلاف را توضیح دهید.

۲- به جز پیدا کردن اشتباهات جبری، چرا امتحان کردن جواب معادله‌های با عبارت‌های گویا، اساسی است؟ بحث کنید.

مسائل

۱- معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $\frac{3}{x} = 2 + \frac{4}{x^2}$

ب) $\frac{y}{y+1} = \frac{y+1}{3}$

پ) $\frac{t-3}{t} = \frac{2}{t-3}$

ت) $x+1 = \frac{2}{2x+3}$

ث) $\frac{x}{x-3} - \frac{1}{2x-1} = \frac{5x}{2x^2-7x+3}$

۲- معادله $\sqrt{x^2-5} + 2\sqrt{x} = 0$ را حل کنید. سپس در مورد قابل قبول بودن ریشه‌های آن

بحث کنید. آیا بدون حل نیز می‌توانستید به این نتیجه برسید؟

۳- به جز پیدا کردن اشتباهات جبری، چرا امتحان کردن جواب‌های معادلاتی با عبارت‌های

رادیکالی اساسی است؟

۴- معادلات رادیکالی زیر را حل کنید:

الف) $5 = 3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

ت) $\sqrt{x} \times \sqrt{x+3} = 1$

ب) $\sqrt{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x+1}} = 1$

ث) $2y+1 = \sqrt{11y-1}$

پ) $\sqrt{3x+4} = \sqrt{x-2} - 3$

ج) $\sqrt{2x} \times \sqrt{x-3} = 6$

۶-۲ کاربردهای معادلهٔ درجهٔ دوم

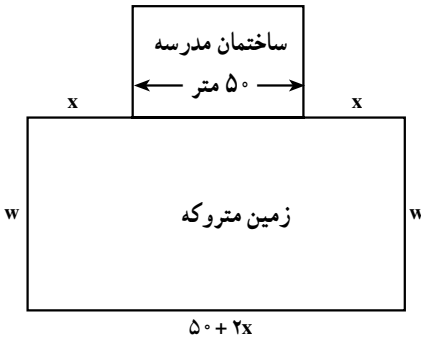
یکی از کاربردهای مهم معادلهٔ درجهٔ دوم، مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی توسط آن است. مسألهٔ زیر نمونه‌ای از یک پدیدهٔ واقعی است که به وسیلهٔ یک معادلهٔ درجهٔ دوم، مدل‌سازی شده است.

مثال

محاسبهٔ مساحت زمین بازی

پس از تلاش‌های فراوان، مدیر یک دبیرستان موفق شد قطعه زمین مستطیل‌شکلی را به مساحت 2800 مترمربع که پشت ساختمان مدرسه به صورت مخروبه درآمد بود، خریداری کند و دور آن را نرده بکشد. برای این کار 170 متر نرده لازم است. طرز قرارگرفتن زمین مخروبه و ساختمان مدرسه به شکل مقابل است:

ابعاد (طول و عرض) زمین را به دست آورید.



حل: با توجه به شکل، طول زمین مستطیل‌شکل که با L نشان می‌دهیم، برابر با $50 + 2x$ می‌شود. عرض زمین بازی را w در نظر می‌گیریم. توجه داشته باشید که در قسمت پشت ساختمان نیازی به نرده نیست.

پس کل نردهٔ استفاده شده عبارت خواهد بود از:

$$x + w + (50 + 2x) + w + x = 170$$

$$2w + 4x + 50 = 170$$

عبارت را ساده می‌کنیم

$$2w = 120 - 4x$$

عبارت را برای w حل می‌کنیم

$$w = 60 - 2x$$

مساحت مستطیل از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$A = L \cdot w$$

مقادیر A ، L و w را جایگزین می‌کنیم:

۱- A اول کلمهٔ Area به معنی مساحت است.

۲- L اول کلمهٔ Length به معنی طول است.

۳- w اول کلمهٔ Width به معنی عرض است.

$$2800 = (50 + 2x)(60 - 2x)$$

$$2800 = 3000 + 20x - 4x^2$$

معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم

$$4x^2 - 20x - 200 = 0$$

دو طرف معادله را بر ۴ تقسیم می‌کنیم

$$x^2 - 5x - 50 = 0$$

سه جمله‌ای را تجزیه می‌کنیم

$$(x - 10)(x + 5) = 0$$

از خاصیت فاکتور صفر استفاده می‌کنیم

$$x - 10 = 0 \text{ یا } x + 5 = 0$$

$$x = 10 \text{ یا } x = -5$$

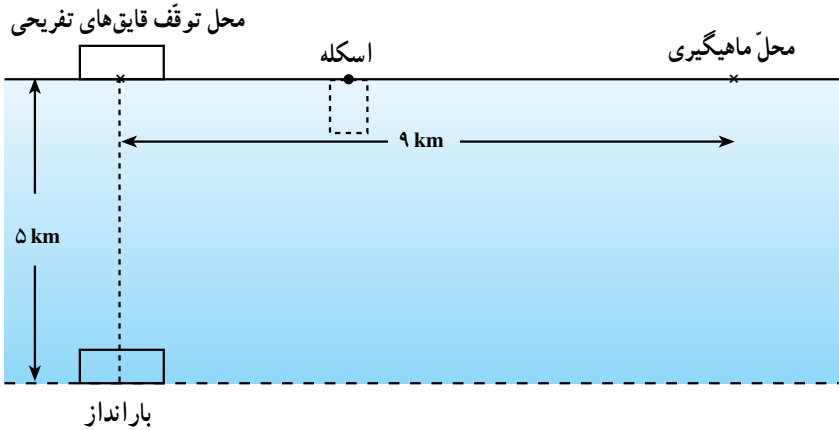
چون فاصله نمی‌تواند منفی باشد پس $x = 10$ قابل قبول است در نتیجه :

$$L = 50 + (2 \times 10) = 70 \text{ متر}$$

$$W = 60 - (2 \times 10) = 40 \text{ متر}$$



مثال: یک دریاچه تفریحی را با موقعیت زیر، در نظر بگیرید:

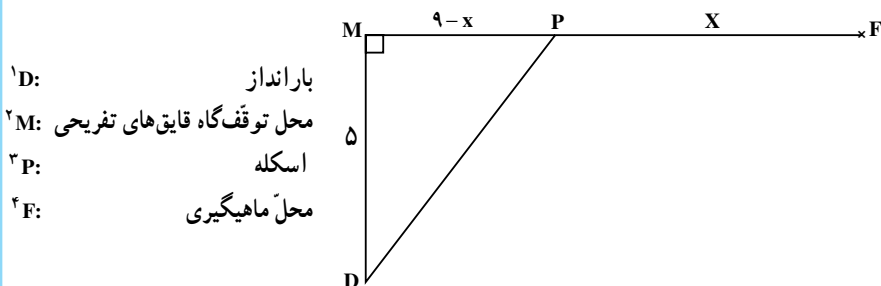


یک ماهیگیر با قایق و با سرعت ۸ کیلومتر در ساعت، از بارانداز به سمت اسکله حرکت کرد. سپس پیاده و با سرعت ۶ کیلومتر در ساعت، از اسکله به سمت محل ماهیگیری حرکت کرد. اگر فاصله محل توقف قایق‌های تفریحی تا محل ماهیگیری ۹ کیلومتر باشد و زمان رفتن از بارانداز تا محل ماهیگیری، $\frac{1}{5}$ ساعت طول کشیده باشد، ماهیگیر چند کیلومتر پیاده روی کرده است؟



صید با تور دستی (سالیه) و قایق گردنه (قایقی از شاخ و برگ نخل). بندر زیارت

حل: در شکل زیر، مکان‌ها را با حروف مشخص کرده‌ایم.



فاصله‌ای را که ماهیگیر از اسکله تا محل ماهیگیری (یعنی از P تا F) طی می‌کند، با x نشان می‌دهیم. چون فاصله از M تا F ۹ کیلومتر است، در نتیجه فاصله M تا P برابر $9-x$ می‌شود. با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه DMP، فاصله بارانداز تا اسکله (DP) یعنی مسافتی را که قایق طی کرده است، به دست می‌آوریم:

$$(DP)^2 = (DM)^2 + (MP)^2$$

$$(DP)^2 = (5)^2 + (9-x)^2 = 25 + (9-x)^2$$

$$DP = \sqrt{25 + (9-x)^2}$$

مدت زمانی که ماهیگیر طی می‌کند تا از بارانداز به محل ماهیگیری برسد مشخص

است. یعنی:

$$\text{ساعت } 1/5 = \text{مدت زمان پیاده‌روی} + \text{مدت زمان طی شده با قایق} \quad (1)$$

برای یافتن این مدت‌ها از فرمول سرعت استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\text{فاصله}}{\text{زمان}} = \text{سرعت} \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{فاصله}}{\text{سرعت}} = \text{زمان}$$

و با استفاده از جدول (۲)، این زمان‌ها را پیدا می‌کنیم.

۱- D اول کلمه Dock به معنی بارانداز است.

۲- M اول کلمه Marina به معنی محل توقف گاه قایق‌های تفریحی است.

۳- P اول کلمه Pier به معنی اسکله است.

۴- F اول کلمه Fishing spot به معنی محل ماهیگیری است.

جدول ۲

زمان (ساعت)	سرعت (کیلومتر / ساعت)	فاصله به کیلومتر	
$\frac{\sqrt{25+(9-x)^2}}{8}$	۸	$\sqrt{25+(9-x)^2}$ (از بارانداز تا اسکله)	قایق
$\frac{x}{6}$	۶	x (از اسکله تا محل ماهیگیری)	پیاده

این زمان‌ها را در رابطه (۱) جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{25+(9-x)^2}}{8} + \frac{x}{6} = 1/5$$

زمان کل سفر (با قایق و پیاده) ۱/۵ ساعت است.

کسرهارا با ضرب کردن دو طرف در ۶، م، م مخرج که ۲۴ است، ساده می‌کنیم.

$$\frac{24}{1} \cdot \frac{\sqrt{25+(9-x)^2}}{8} + \frac{24}{1} \cdot \frac{x}{6} = 24 \times 1/5$$

$$3\sqrt{25+(9-x)^2} + 4x = 36 \quad \text{ساده می‌کنیم}$$

رادیکال را در یک طرف نگه می‌داریم

$$3\sqrt{25+(9-x)^2} = 36 - 4x$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\left[3\sqrt{25+(9-x)^2}\right]^2 = (36-4x)^2$$

از خاصیت $(ab)^2 = a^2b^2$ برای سمت چپ، استفاده می‌کنیم.

$$9[25+(9-x)^2] = (36-4x)^2$$

با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله، دو طرف را به توان می‌رسانیم.

$$9[25+81-18x+x^2] = 1296-288x+16x^2$$

۹ را در پرانتز ضرب می‌کنیم

$$225+729-162x+9x^2 = 1296-288x+16x^2$$

معادله را ساده کرده و به شکل استاندارد می‌نویسیم

$$-7x^2 + 126x - 342 = 0$$

دو طرف را در (-1) ضرب می‌کنیم

$$7x^2 - 126x + 342 = 0$$

از فرمول حل معادله درجه دوم استفاده می‌کنیم.

$$x = \frac{126 \pm \sqrt{(126)^2 - 4 \times 7 \times 342}}{2 \times 7}$$

$$= \frac{126 \pm \sqrt{158176 - 9576}}{14}$$

$$= \frac{126 \pm \sqrt{6300}}{14}$$

چون $\sqrt{6300}$ ، مربع کامل نیست، مقدار تقریبی آن را می‌نویسیم،

$$\cong \frac{126 \pm 79/37}{14}$$

بنابراین

$$x \cong \frac{126 + 79/37}{14} \cong 14/67 \quad \text{یا} \quad x \cong \frac{126 - 79/37}{14} \cong 3/33$$

هر دو جواب x را امتحان می‌کنیم^۱:

اگر $x = 14/67$ ، آنگاه $x - 9 = 14/67 - 9 = -5/67$ که قابل قبول نیست،

زیرا فاصله نمی‌تواند منفی باشد.

اگر $x = 3/33$ ، آنگاه $x - 9 = 3/33 - 9 = -5/67$ که قابل قبول است.

پس ماهیگیر، $3/33$ کیلومتر، پیاده‌روی کرده است.

نسبت و تناسب

از نظر ریاضیدان‌های یونان قدیم، زیباترین مستطیل‌ها، آن‌هایی بودند که اندازه طول و عرض

آنها، متناسب با $\frac{W}{L} = \frac{L}{W+L}$ بود. این نسبت، به نسبت طلایی^۲ معروف است.

۱- امتحان کردن جواب‌های به‌دست‌آمده در مسأله‌های کاربردی و دنیای واقعی، یک ضرورت است.

۲- Golden Ratio

یک زمین ورزش مستطیل شکل. به گونه‌ای ساخته شده است که اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی است. محیط این زمین ۲۰۰۰ متر است. طول و عرض آن چقدر است؟
 حل: L را برابر طول مستطیل، W را برابر عرض آن و P را محیط آن که مساوی ۲۰۰۰ متر است در نظر می‌گیریم:

$$2L + 2W = P$$

$$2L + 2W = 2000$$

$$L + W = 1000$$

$$W = 1000 - L$$

را با $1000 - L$ در فرمول نسبت طلایی جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{W}{L} = \frac{L}{W+L}$$

$$\frac{1000-L}{L} = \frac{L}{1000}$$

دو طرف را در $1000L$ که همان ک.م.م (کوچکترین مضرب مشترک) مخارج‌هاست ضرب

می‌کنیم:

$$\frac{1000L}{1} \times \frac{1000-L}{L} = \frac{L}{1000} \times \frac{1000L}{1}$$

تساوی را ساده می‌کنیم

$$1000000 - 1000L = L^2$$

معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم

$$L^2 + 1000L - 1000000 = 0$$

با استفاده از فرمول حل معادله درجه دوم، مقدار L را پیدا می‌کنیم:

$$L = \frac{-1000 \pm \sqrt{(1000)^2 - 4(-1000000)}}{2} = \frac{-1000 \pm \sqrt{1000000 + 4000000}}{2}$$

$$= \frac{-1000 \pm \sqrt{5 \times 10^6}}{2} = \frac{-1000 \pm 1000\sqrt{5}}{2} = -500 \pm 500\sqrt{5}$$

چون طول مثبت است پس

$$L = 500\sqrt{5} - 500 = 500(\sqrt{5} - 1)$$

قابل قبول است.

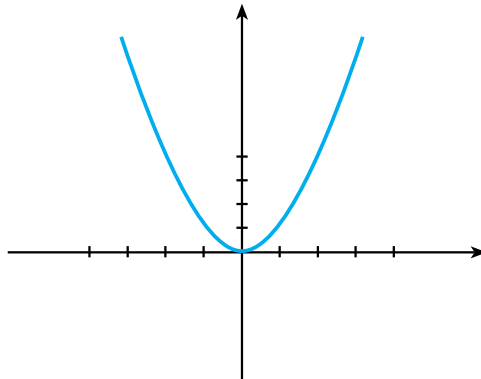
نکته خواندنی

اگر از یک مستطیل طلایی، یک مربع جدا شود، مستطیل باقی مانده نیز، یک مستطیل طلایی است.

۷-۲ رسم نمودارهای تابع درجه دوم

برای رسم نمودار $y = f(x)$ ، نقاط (x, y) را که مختصات آنها در ضابطه تابع صدق می کند، در صفحه مختصات تعیین می کنیم. به طور مثال، برای رسم ساده ترین معادله درجه دوم یعنی $y = x^2$ ، می توانیم با جدول مقادیر تابع شروع کنیم. سپس با استفاده از نقاط به دست آمده و تعیین آنها در صفحه مختصات، نمودار $y = x^2$ را رسم می کنیم.

x	...	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	...
x^2	...	۹	۴	۱	۰	۱	۴	۹	...



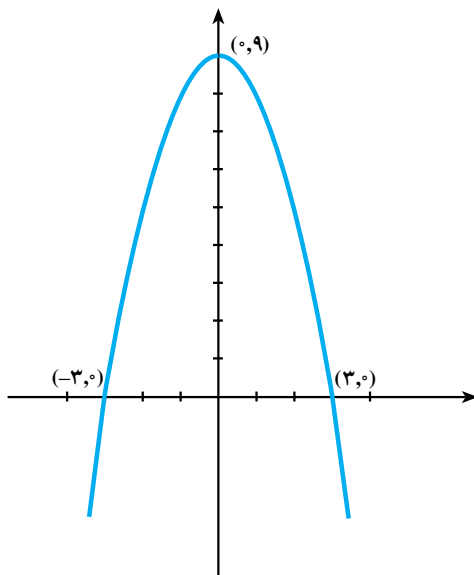
مثال

نمودار $f(x) = 9 - x^2$ را رسم کنید.

حل: جدول مقادیر تابع $f(x) = 9 - x^2$ را تشکیل می‌دهیم:

x	...	-4	-3	-1	0	1	3	4	...
$9 - x^2$...	-7	0	8	9	8	0	-7	...

سپس با تعیین نقاط به دست آمده در صفحه مختصات و اتصال آن‌ها به یکدیگر، نمودار زیر به دست می‌آید.



نمودار تابع درجه دوم، سهمی نامیده می‌شود.

سهمی $y = x^2$ به سمت بالا باز شده است. در این حالت، سهمی دارای کمترین مقدار است.

سهمی $y = 9 - x^2$ وارونه شده است. (به سمت پایین باز شده است) و دارای بیشترین مقدار است.

نقطه‌ای که در آن، سهمی دارای بیشترین یا کمترین مقدار است رأس سهمی نامیده می‌شود.

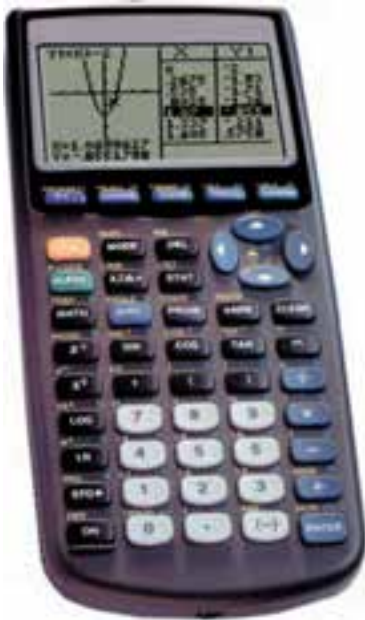
سهمی‌های شکل‌های بالا نسبت به خط عمودی که از رأس می‌گذرد متقارن هستند. این خط محور

تقارن نامیده می‌شود. اگر نمودارها را روی این محور تا کنیم، دو طرف سهمی بر هم منطبق می‌شوند.

انواع نمودار $y = x^2$

اغلب نمودارهای تابع درجه دوم را می‌توان با مقایسه آن‌ها با تابع $y = x^2$ رسم کرد. (به زنگ

تفریح ریاضی پایان فصل اول توجه کنید.)



اگر ماشین حساب گرافیکی در اختیار دارید، این فعالیت را با استفاده از آن انجام دهید. در غیر این صورت با استفاده از جدول مقادیر، نمودارهای خواسته شده را با توجه به نمودار $y = x^2$ و $y = -x^2$ رسم کنید.

(الف)

- ۱- نمودار تابع‌های $y = 2x^2$ و $y = -2x^2$ را رسم کنید.
- ۲- نمودار تابع‌های $y = 3x^2$ و $y = -3x^2$ را رسم کنید.
- ۳- نمودار تابع‌های $y = 5x^2$ و $y = -5x^2$ را رسم کنید.

- ۴- در حالت کلی، نمودار تابع $y = ax^2$ را که a عدد صحیح باشد، رسم کنید.
 - ۵- فرق این نمودارها با نمودارهای $y = x^2$ و $y = -x^2$ چیست؟
 - ۶- اگر ضریب x^2 را یک عدد خیلی بزرگ انتخاب کنیم، چه اتفاقی می‌افتد؟
 - ۷- اگر ضریب x^2 را یک عدد خیلی کوچک انتخاب کنیم، چه اتفاقی می‌افتد؟
- (ب)

- ۱- نمودار تابع‌های $y = \frac{1}{4}x^2$ و $y = -\frac{1}{4}x^2$ را رسم کنید.
- ۲- نمودار تابع‌های $y = \frac{1}{3}x^2$ و $y = -\frac{1}{3}x^2$ را رسم کنید.
- ۳- نمودار تابع‌های $y = \frac{1}{5}x^2$ و $y = -\frac{1}{5}x^2$ را رسم کنید.
- ۴- فرق این نمودارها، با نمودارهای $y = x^2$ و $y = -x^2$ چیست؟
- ۵- اگر در $y = \frac{1}{a}x^2$ (a عدد طبیعی است) a بزرگ و بزرگتر شود، چه اتفاقی

می‌افتد؟

۶- اگر در $y = -\frac{1}{a}x^2$ (a عدد طبیعی است)، a بزرگ و بزرگتر شود چه

اتفاقی می افتد؟

با توجه به نتایجی که به دست آورده اید، یک قانون کلی برای رسم نمودارهای

$$y = ax^2 \text{ و } y = \frac{1}{a}x^2 \text{ (a عدد صحیح و غیر صفر) پیدا کنید.}$$

حال با توجه به قانون به دست آمده و بدون تشکیل جدول مقادیر، سهمی های

$$ax^2 \text{ و } \frac{1}{a}x^2 \text{ را در مقایسه با } x^2 \text{ رسم کنید.}$$

با توجه به نتایج به دست آمده، جاهای خالی زیر را پر کنید :

◆ اگر $|a|$ افزایش یابد، سهمی ... و ... می شود.

◆ اگر $\left|\frac{1}{a}\right|$ کاهش یابد، سهمی ... و ... می شود.

می بینیم که مقدار a، باعث باز و بسته شدن سهمی می شود و علامت a، جهت سهمی را

مشخص می کند (رو به بالا یا رو به پایین بودن سهمی).

توجه: رأس تمام سهمی های $y = ax^2$ ، مبدأ مختصات است.

فعالیت ۲-۳

(الف)

۱- نمودار $f(x) = x^2$ را رسم کنید.

۲- نمودار $f(x) = x^2 + 1$ را رسم کنید.

۳- نمودار $f(x) = x^2 - 1$ را رسم کنید.

۴- نمودار $f(x) = x^2 + 5$ را رسم کنید.

۵- نمودار $f(x) = x^2 - 4$ را رسم کنید.

۶- نمودار $f(x) = x^2 - 8$ را رسم کنید.

(ب)

۱- این نمودارها با نمودار $f(x) = x^2$ چه فرقی دارند؟

۲- نمودار $f(x) = x^2 + a$ چه فرقی با نمودار $f(x) = x^2$ دارد؟ (در حالتی که

$a > 0$ یا $a < 0$ باشد).

- ۳- یک قاعده کلی برای رسم نمودارهای $f(x) = x^2 + a$ در مقایسه با $f(x) = x^2$ به دست آورید. (بدون آن که به تشکیل جدول مقادیر نیاز داشته باشیم).

فعالیت ۲-۴

(الف)

۱- نمودار $f(x) = x^2$ را رسم کنید.

۲- نمودار $f(x) = (x+2)^2$ را رسم کنید و فرق آن را با نمودار $f(x) = x^2$ بیان نمایید.

۳- نمودار $f(x) = (x-2)^2$ را رسم کنید و فرق آن را با نمودار $f(x) = x^2$ بیان نمایید.

۴- نمودار $f(x) = (x+6)^2$ را رسم کنید و فرق آن را با نمودار $f(x) = x^2$ بیان کنید.

۵- نمودار $f(x) = (x-6)^2$ را رسم کنید و فرق آن را با نمودار $f(x) = x^2$ بیان نمایید.

(ب)

۱- نمودار $f(x) = (x+a)^2$ ($a < 0$, $a > 0$) چه فرقی با نمودار $f(x) = x^2$ دارد؟

۲- یک قاعده کلی برای رسم نمودارهای $f(x) = (x+a)^2$ در مقایسه با نمودار $f(x) = x^2$ پیدا کنید. ($a < 0$, $a > 0$)

نتیجه

رأس نمودار تابع های $f(x) = x^2 + a$ در مقایسه با $f(x) = x^2$ به اندازه a واحد روی محور y ها انتقال می یابد (اگر $a > 0$ باشد به سمت بالا و اگر $a < 0$ باشد به اندازه $|a|$ واحد به سمت پایین می رود) رأس سهمی نیز به اندازه a واحد بالا یا پایین مبدأ مختصات قرار می گیرد. محور تقارن سهمی همان محور y ها است که نسبت به محور تقارن $f(x) = x^2$ ثابت می ماند.

رأس نمودار $f(x) = (x+a)^2$ به اندازه a واحد از مبدأ مختصات روی محور x ها انتقال

می‌یابد. (اگر $a > 0$ ، سهمی به اندازه a واحد به سمت چپ منتقل می‌شود و اگر $a < 0$ ؛ سهمی به اندازه $|a|$ واحد به سمت راست منتقل می‌شود.)

محور تقارن نمودار $f(x) = (x+a)^2$ نیز نسبت به نمودار $f(x) = x^2$ به اندازه $|a|$ واحد به سمت چپ یا راست محور x ها انتقال می‌یابد.

نتیجه فعالیت‌های ۲-۳ و ۲-۴ را می‌توان در جدول زیر، خلاصه کرد.

جدول ۳

سهمی	رأس سهمی	محور تقارن سهمی
$f(x) = x^2 + k$	$(0, k)$	$x = 0$
$g(x) = (x+a)^2$	$(-a, 0)$	$x = -a$

مثال

با استفاده از نمودار $y = x^2$ به عنوان راهنما، نمودار هریک از تابع‌های زیر را رسم کرده و رأس سهمی و محور تقارن هریک را تعیین کنید.

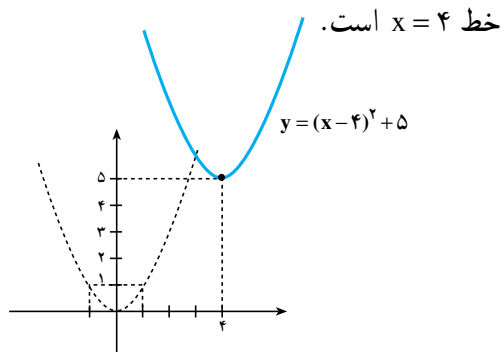
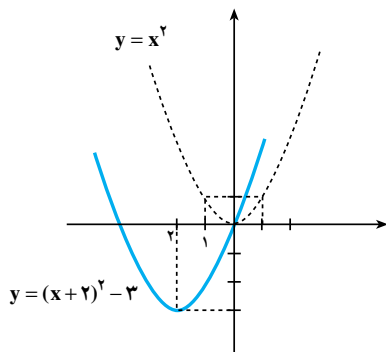
الف) $f(x) = (x+2)^2 - 3$

ب) $g(x) = (x-4)^2 + 5$

حل:

الف) نمودار $f(x) = (x+2)^2 - 3$ همان نمودار $y = x^2$ است که رأس آن ۲ واحد به سمت چپ و ۳ واحد به سمت پایین انتقال یافته است. مختصات رأس این نمودار $(-2, -3)$ است و محور تقارن آن خط $x = -2$ می‌باشد.

ب) نمودار $g(x) = (x-4)^2 + 5$ همان نمودار $y = x^2$ است که رأس آن ۴ واحد به سمت راست و ۵ واحد به سمت بالا انتقال یافته است. مختصات رأس این نمودار $(4, 5)$ و محور تقارن، خط $x = 4$ است.



نمودار تابع $f(x) = a(x-h)^2 + k$ همان نمودار تابع $y = ax^2$ است که رأس آن به نقطه (h, k) انتقال یافته است.

۱-۷-۲- رأس سهمی و نقاط تلاقی سهمی با محورهای مختصات

در رسم نمودار یک تابع درجه دوم، تعیین رأس سهمی مهم است. برای تعیین مختصات رأس، می‌توانیم از روش مربع کامل کردن برای نوشتن تابع به شکل $f(x) = a(x-h)^2 + k$ استفاده کنیم.

تعیین رأس سهمی با مربع کامل کردن

مثال

رأس نمودار $f(x) = x^2 - 8x + 10$ را تعیین کنید.

حل: با استفاده از روش مربع کامل کردن، تابع را به شکل $f(x) = (x-h)^2 + k$

می‌نویسیم.

$$f(x) = x^2 - 8x + 10$$

$$f(x) - 10 = x^2 - 8x \quad \text{کم کردن } 10 \text{ از دو طرف}$$

اضافه کردن مجذور نصف ضریب x یعنی $16 = \left(-\frac{8}{2}\right)^2$ به دو طرف

$$f(x) - 10 + 16 = x^2 - 8x + 16$$

$$f(x) + 6 = (x - 4)^2 \quad \text{طرف دوم مربع کامل است. آن را به صورت توانی می‌نویسیم}$$

$$f(x) = (x - 4)^2 - 6 \quad \text{۶- را به دو طرف اضافه می‌کنیم:}$$

در این صورت در تابع درجه دوم $f(x)$ ، $h = 4$ و $k = -6$ پس مختصات رأس سهمی برابر $(4, -6)$ است.

با این ترتیب برای به دست آوردن رأس سهمی، هر بار باید این فرایند را طی کرد. اگر همین روش را برای شکل عمومی توابع درجه دوم یعنی: $f(x) = ax^2 + bx + c$ به کار ببریم، آن‌گاه می‌توانیم فرمولی برای پیدا کردن مختصات رأس $V(h, k)$ پیدا کنیم.

۱-۷-۱ Vertex به معنی رأس است.

برای پیدا کردن مختصات رأس سهمی در حالت کلی، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف) شکل عمومی تابع های درجه دوم را می‌نویسیم: $f(x) = ax^2 + bx + c$

ب) c را از دو طرف کم می‌کنیم: $f(x) - c = ax^2 + bx$

پ) دو طرف را بر a تقسیم می‌کنیم: $\frac{f(x) - c}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x$

ت) با استفاده از روش مربع کامل کردن، سمت راست را به صورت مربع یک

دوجمله‌ای می‌نویسیم: $\frac{f(x)}{a} - \frac{c}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x$

مجذور نصف ضریب x یعنی: $\left(\frac{1}{2} \times \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ را به دو طرف معادله اضافه

می‌کنیم.

$$\frac{f(x)}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

کسر را ساده می‌کنیم: $\frac{f(x)}{a} + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

را از دو طرف کم می‌کنیم: $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

$$\frac{f(x)}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

دو طرف را در a ضرب می‌کنیم تا $f(x)$ به دست آید:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

که در آن $h = \frac{-b}{2a}$ و $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ است.

پس مختصات رأس برابر است با:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

فرمول مختصات رأس سهمی

مختصات رأس سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ برابر است با :

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

توجه: برای تعیین مختصات رأس سهمی، بعد از پیدا کردن مختص اول از رابطه $-\frac{b}{2a}$ ،

می‌توانید مختص دوم را از طریق $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ تعیین کنید.

محاسبه رأس به صورت جبری

مثال

رأس نمودار $f(x) = 2x^2 + 12x + 17$ را تعیین کنید.

حل: مختص اول رأس برابر است با :

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-12}{2(2)} = -3$$

و برای تعیین مختص دوم :

$$f(-3) = 2(-3)^2 + 12(-3) + 17 = -1$$

پس مختصات رأس برابر است با $V(-3, -1)$.

در حالت کلی، محل تقاطع نمودار با محور y ها، نقطه‌ای است که مختص اول آن برابر صفر

باشد. یعنی، برای یک تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، $f(0) = c$ محل تقاطع نمودار تابع با

محور y ها است. پس یک سهمی همیشه محور y ها را در نقطه $(0, c)$ قطع می‌کند.

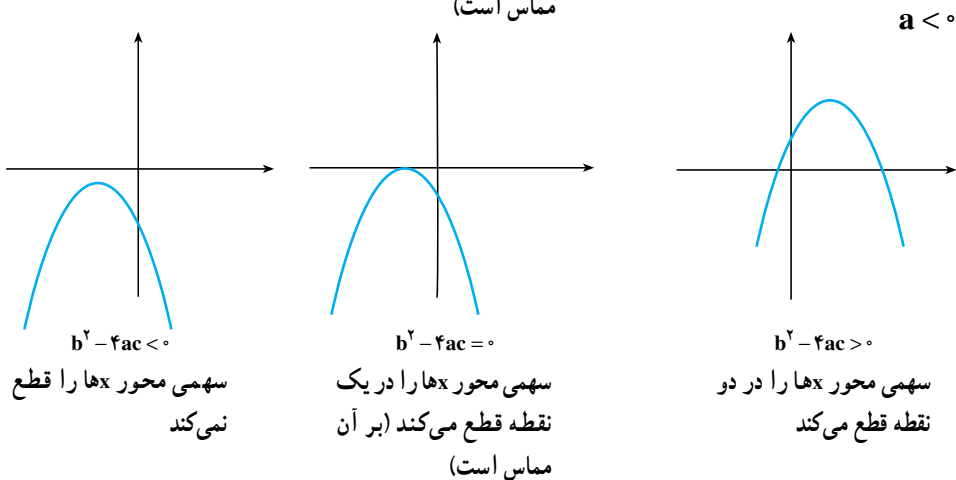
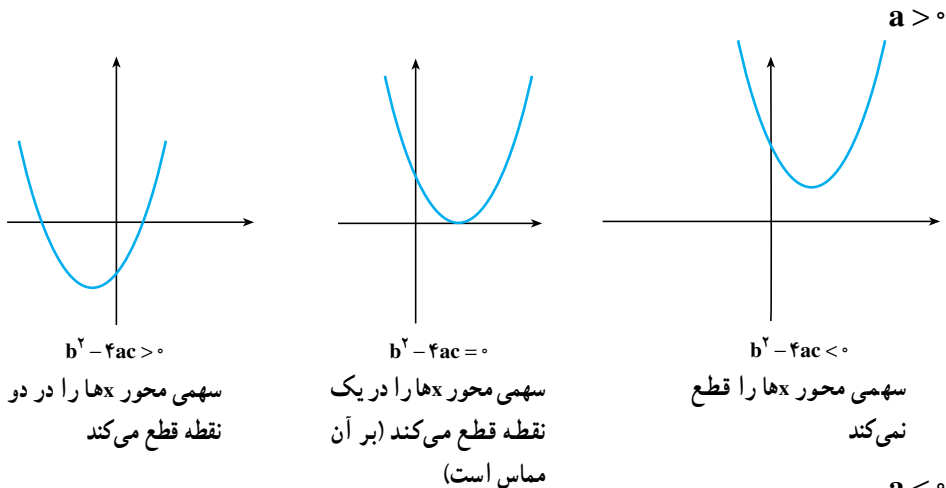
برای تعیین محل تقاطع نمودار با محور x ها معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را حل

می‌کنیم. می‌دانیم که این معادله، می‌تواند دارای یک یا دو جواب حقیقی باشد یا اصلاً، جواب حقیقی

نداشته باشد. در نتیجه، ممکن است نمودار یک تابع درجه دو، محور x ها را در یک یا دو نقطه قطع

کند یا اصلاً محور x ها را قطع نکند.

نتایج به دست آمده را می‌توان در نمودارهای صفحه بعد خلاصه کرد :



تذکره: بهتر است برای رسم نمودار سهمی ابتدا مختصات رأس و محل‌های تقاطع با محور x ها و محور y ها را تعیین کنید.

روش رسم تابع درجهٔ دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$

- ۱- محل تقاطع با محور y ها $(0, c)$ را تعیین کنید.
- ۲- محل تقاطع با محور x ها را از طریق حل $ax^2 + bx + c = 0$ تعیین کنید.
- ۳- با استفاده از روش مربع کامل کردن یا با استفاده از فرمول رأس، مختصات رأس را پیدا کنید.
- ۴- نقاط به دست آمده در سه مرحلهٔ بالا را روی صفحهٔ مختصات مشخص کنید.
- ۵- در صورت لزوم، دو نقطهٔ کمکی در دو طرف رأس سهمی مشخص کرده و آن‌ها را در

صفحه مختصات معین کنید. نقاط به دست آمده را به هم متصل کرده و ادامه دهید.
 ۶- اگر $a > 0$ سهمی رو به بالا باز می شود و اگر $a < 0$ ، سهمی به سمت پایین باز می شود.

مثال

با تعیین رأس و نقاط تلاقی سهمی با محورها، نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = 8 - 2x - x^2$

ب) $h(x) = x^2 - 4x + 1$

پ) $g(x) = 4x^2 - 12x + 9$

ت) $s(x) = -2x^2 + 12x - 19$

حل

الف) در تابع $f(x) = 8 - 2x - x^2$ ، چون $a < 0$ ($a = -1$)، پس سهمی به سمت پایین باز می شود. محل تقاطع با محور y ها $(0, 8)$ است. برای تعیین نقاط تقاطع با محور x ها، معادله را نسبت به x حل می کنیم:

$$8 - 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0 \Rightarrow x + 4 = 0 \text{ یا } x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = -4 \text{ یا } x = 2$$

پس نقاط تلاقی با محور x ها $(2, 0)$ و $(-4, 0)$ هستند.

حال مختصات رأس را حساب می کنیم:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(-1)} = -1$$

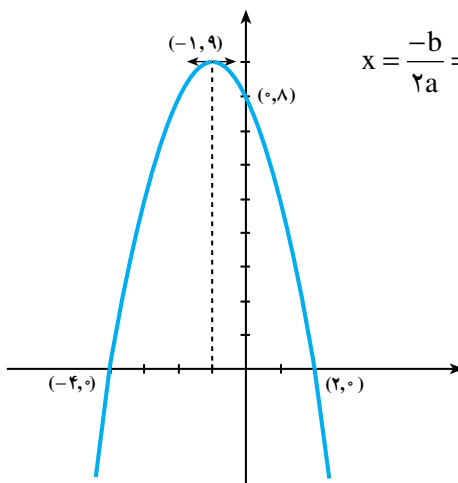
چون $f(-1) = 9$ پس مختصات رأس برابر

است با $(-1, 9)$. با قراردادن نقاط تلاقی و رأس

روی صفحه مختصات و با اطلاعات قبلی (از جمله

اینکه سهمی رو به پایین باز می شود) نمودار را

رسم می کنیم:



ب) چون در $h(x) = x^2 - 4x + 1$ ، a مثبت است، پس سهمی رو به بالا است. محل تلاقی با محور y ها $(0, 1)$ است. برای تعیین نقاط تلاقی با محور x ها، معادله را نسبت به x ، حل می‌کنیم:

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{3}$$

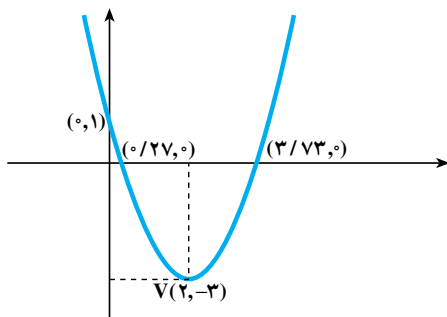
$$x \cong 0/27 \text{ یا } x \cong 3/73$$

نقاط تلاقی تقریبی عبارتند از: $(3/73, 0)$ و $(0/27, 0)$. حال مختصات رأس را به دست می‌آوریم:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(1)} = 2$$

$$h(2) = -3$$

پس مختصات رأس برابر است با $V(2, -3)$ ، با این اطلاعات سهمی را رسم می‌کنیم.



پ)

$$g(x) = 4x^2 - 12x + 9$$

چون a مثبت است ($a = 4$)، پس سهمی رو به بالاست. محل تلاقی با محور y ها $(0, 9)$ است. برای تعیین محل تلاقی با محور x ها، معادله را حل می‌کنیم:

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$(2x - 3)^2 = 0$$

$$2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{3}{2}$$

پس محل تلاقی با محور x ها $(\frac{3}{2}, 0)$ است. حال مختصات رأس را پیدا می کنیم:

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{-12}{2(4)} = \frac{3}{2}$$

چون $g(\frac{3}{2}) = 0$ است، پس مختصات رأس $(\frac{3}{2}, 0)$ می باشد (توجه کنید که رأس و نقطه تلاقی

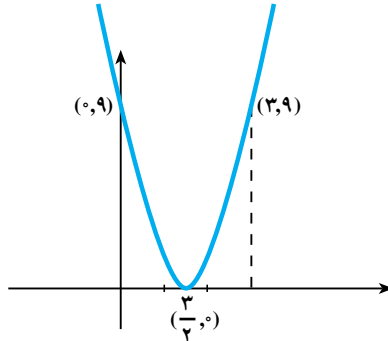
با محور x ها، یک نقطه مشترک است.)

چون تنها دو نقطه برای مشخص کردن در صفحه مختصات پیدا کرده ایم، یک نقطه دیگر نیز

پیدا می کنیم تا نمودار بهتر رسم شود.

برای مثال، اگر $x = 3$ ، آن گاه، $g(3) = 9$ پس نقطه $(3, 9)$ نیز روی نمودار تابع $g(x)$

قرار دارد.



$$S(x) = -2x^2 + 12x - 19 \quad \text{(ت)}$$

چون a منفی است ($a = -2$)، پس سهمی رو به پایین باز می شود محل تلاقی با محور y ها

$(0, -19)$ است. تعداد نقاط تلاقی با محور x ها را با محاسبه مبین معادله پیدا می کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (12)^2 - 4(-2)(-19) = 144 - 152 = -8$$

چون مبین منفی است. پس نمودار با محور x ها نقطه تلاقی ندارد. حالا مختصات رأس را

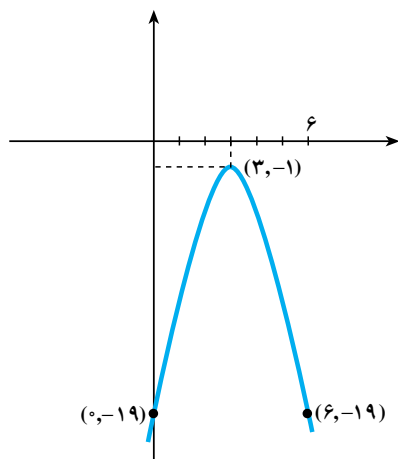
حساب می کنیم:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-2)} = 3$$

چون $S(3) = -1$ پس مختصات رأس سهمی برابر است با $(3, -1)$ از آنجا که تنها مختصات

دو نقطه را داریم. بهتر است نقطه دیگری پیدا کنیم. برای مثال، اگر $x = 6$ ، آن گاه $S(6) = -19$. پس

نقطه $(6, -19)$ نیز روی نمودار تابع $S(x)$ قرار دارد.



مسائل

۱- وضعیت نمودار تابع های زیر را در مقایسه با نمودار $f(x) = x^2$ در صفحه مختصات، توضیح دهید. (توصیه می شود که نمودار $y = f(x) = x^2$ را با یک رنگ و نمودار جدید را با رنگ دیگر رسم کنید).

الف) $h(x) = x^2 - 4$

ت) $h(x) = (x - 3)^2$

ب) $g(x) = x - 4$

ث) $g(x) = -\frac{1}{4}x - 2$

پ) $h(x) = -2x^2$

ج) $h(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^2 - 2$

در تمرین های این قسمت، موارد زیر را برای هر تابع درجه دوم، به دست آورید:

الف) نقاط تلاقی با محور x ها و y ها

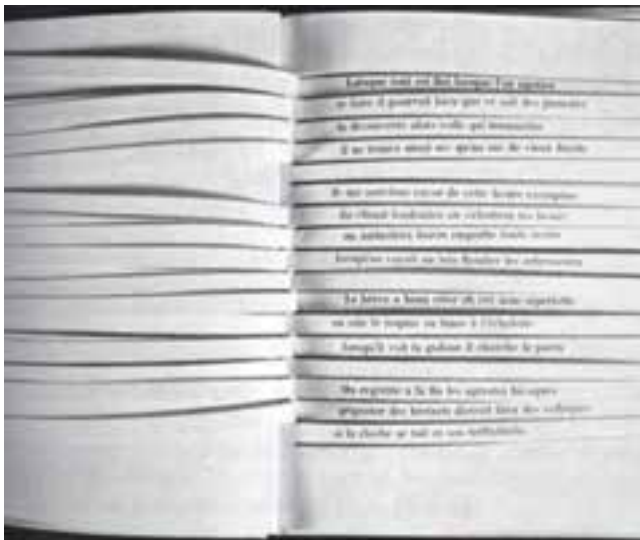
ب) رأس و معادله محور تقارن

پ) رسم نمودار هر تابع

ترکیبیات

کتاب شعری^۱ شامل صد هزار میلیارد شعر است. هر شعر شامل ۱۴ بیت است و همگی فقط در یک روی صفحه کاغذ نوشته شده اند (نه دو طرف آن).

هر صفحه کاغذ به صورت نوارهای افقی بریده شده به طوری که روی هر نوار یک بیت شعر نوشته شده است. هر نوار به طور منفرد قابل برگرداندن است به گونه‌ای که ابیات شعرها به راه‌های مختلف قابل انتخاب باشند. صرف نظر از نوع انتخاب ابیات، هنوز اشعار به دست آمده از نظر اصول شعری، وزن و قافیه، درست و با معنی هستند. فکر می‌کنید کتاب باید شامل چند صفحه باشد تا بتواند صد هزار میلیارد شعر تولید کند؟



۱- کتاب شعر موسوم به Cent milliards de Poemes نوشته raymond queneau می‌باشد.

فصل سوم، ابزار مناسبی برای حل این مسأله و مسأله‌های جالب دیگری که همگی با شمارش سروکار دارند، به شما می‌دهد.

۱-۳- اصل اساسی شمارش

فعالیت ۱-۳

الف) به چند راه ممکن، می‌توانید هر یک از سه سؤال زیر را با یکی از جواب‌های داده شده جور کنید؟ (آزمون جور کردنی)

جواب

سؤال

بنگلادش

۱- ایالت آگرا، در کدام کشور قرار دارد؟

هندوستان

۲- شهر داکا در کدام کشور واقع است؟

پاکستان

۳- شهر لاهور در کدام کشور است؟

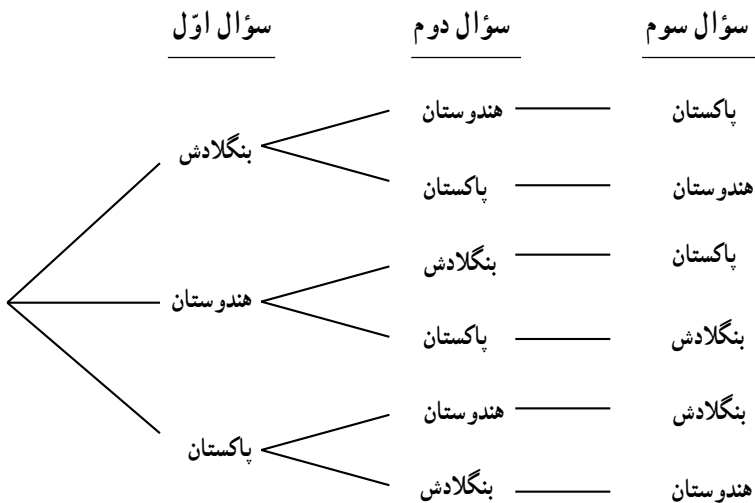
توجه: برای هر سؤال، تنها یک جواب درست وجود دارد. اگر آن جواب را برای سؤالی انتخاب کردید، دیگر نمی‌توانید آن را برای سؤال دیگری انتخاب کنید. در واقع، هر سؤال را باید با یک جواب، جور کنید.



تاج محل - هندوستان

ب) در مجموع، چند راه ممکن برای پاسخگویی به سه سؤال بالا وجود دارد؟
چرا؟

برای پیدا کردن تعداد راه‌های ممکن، می‌توانید از نمودار زیر استفاده کنید :



اگر دقت کنید، این نمودار شبیه درختی با یک ریشه و شاخه‌های متعدّد است.
به همین علت، به نمودار درختی معروف است.

ب) این درخت، چند شاخه دارد؟

ت) دو شاخه این درخت ؛ یعنی دو راه ممکن برای پاسخگویی به سه سؤال بالا، در جدول زیر، مشخص شده است. سایر شاخه‌ها را مشخص کنید و جدول را تکمیل نمایید.

جدول ۱

سؤال سوم	سؤال دوم	سؤال اول	راه‌های ممکن
پاکستان	هندوستان	بنگلادش	۱
هندوستان	پاکستان	بنگلادش	۲
	بنگلادش		۳
		هندوستان	۴
			۵
هندوستان			۶

ث) جواب قسمت (ب) و قسمت (ت) را با هم مقایسه کنید و نتیجه را بنویسید.
 ج) یک آزمون جورکردنی با پنج سؤال تهیه کنید. به چند راه ممکن می‌توانید پاسخ‌ها را با سؤال‌ها جور کنید؟
 چ) تعداد راه‌های ممکن پاسخگویی به یک آزمون جورکردنی با ۱۰ سؤال را حدس بزنید (بدون رسم نمودار درختی). بگویید چگونه این حدس را زدید؟
 ح) آیا می‌توانید از پاسخ خود به قسمت (ج)، یک نتیجه کلی بگیرید؟ توضیح دهید.

اصل اساسی شمارش: برای پیدا کردن تعداد راه‌های ممکن در یک تصمیم‌گیری چند مرحله‌ای، تعداد انتخاب‌های ممکن در هر مرحله از تصمیم‌گیری، درهم ضرب می‌شوند.

یا به بیانی دیگر:

اصل اساسی شمارش: اگر یک تصمیم‌گیری دارای k مرحله باشد $(k, \dots, 3, 2, 1)$ و تعداد انتخاب‌های ممکن در مرحله اول n_1 ، در مرحله دوم n_2 ، ... و در مرحله k ام، n_k باشد، تعداد انتخاب‌های ممکن در این تصمیم‌گیری، حاصلضرب تعداد انتخاب‌ها در هر مرحله یعنی $n_1 n_2 \dots n_k$ است.

تمرین

جدول زیر، تعداد راه‌های ممکن برای پاسخگویی به آزمون جورکردنی با تعداد سؤال‌های متفاوت را نشان می‌دهد.
 این جدول را کامل کنید.

جدول ۲

۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	تعداد سؤال‌های یک آزمون جورکردنی
				۶	۲	۱	تعداد راه‌های ممکن پاسخگویی به سؤال‌ها

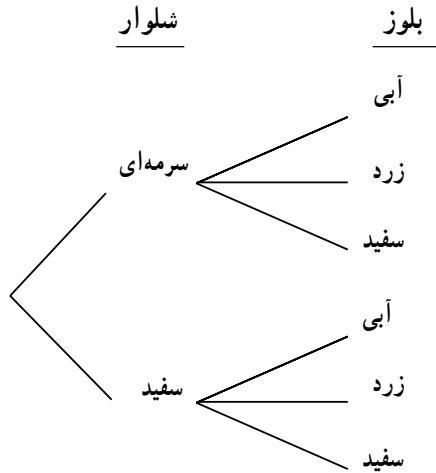
مثال

امیرحسین، دو شلوار به رنگ‌های سرمه‌ای و سفید و سه بلوز به رنگ‌های آبی، زرد و سفید دارد. نمودار درختی انتخاب‌های ممکن امیرحسین را برای استفاده از لباس‌های خود، رسم کنید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) امیرحسین، به چند شکل متفاوت می‌تواند از لباس‌های خود استفاده کند؟
ب) با استفاده از اصل اساسی شمارش، چه عددی باید در هم ضرب شوند تا جواب قسمت الف) به دست آید؟

حل: اول، نمودار درختی انتخاب‌های ممکن امیرحسین را برای استفاده از لباس‌های خود،

رسم می‌کنیم.



الف) شاخه‌های نمودار درختی بالا، انتخاب‌های امیرحسین را نشان می‌دهند. آنها را به ترتیب

می‌نویسیم به طوری که در هر پرانتز، اول شلوار و بعد، بلوز نوشته شود:

(بلوز، شلوار)

(آبی، سرمه‌ای)

(زرد، سرمه‌ای)

(سفید، سرمه‌ای)

(آبی، سفید)

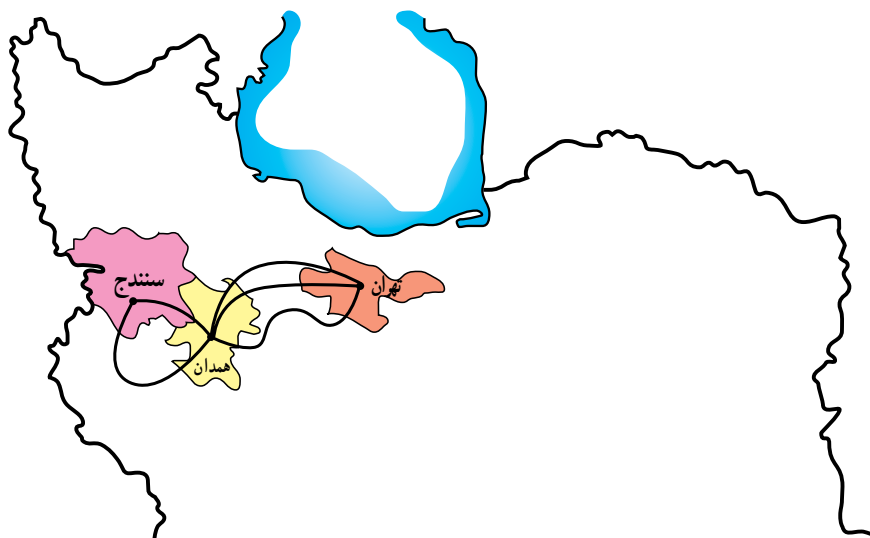
(زرد، سفید)

(سفید، سفید)

پس امیرحسین، به ۶ شکل متفاوت می تواند از لباس های خود استفاده کند.
 ب) با استفاده از اصل اساسی شمارش، چون تعداد انتخاب های ممکن برای شلوارها ۲ و
 تعداد انتخاب های ممکن برای بلوزها ۳ است، پس تعداد راه های ممکن در این تصمیم گیری،
 $2 \times 3 = 6$ است.

تمرین

نمودار زیر، راه های مختلف مسافرت زمینی از تهران به همدان و سپس سنندج را نشان
 می دهد:



با استفاده از اصل اساسی شمارش، تعداد راه های ممکن مسافرت زمینی از تهران به سنندج را
 نشان داده و بنویسید.

تمرین

از بین ۴ نوع مختلف سوپ، ۳ نوع ساندویچ، ۵ نوع نوشابه و ۴ نوع بستنی، چند ناهار مختلف
 که شامل یک نوع سوپ، یک نوع ساندویچ، یک نوع نوشابه و یک نوع بستنی باشد، می توان انتخاب
 کرد؟

الف) به سؤال‌های زیر که هر یک دارای دو گزینه «درست - نادرست» هستند پاسخ دهید.

۱- درجه حرارت، تابعی از زمان است.

درست نادرست

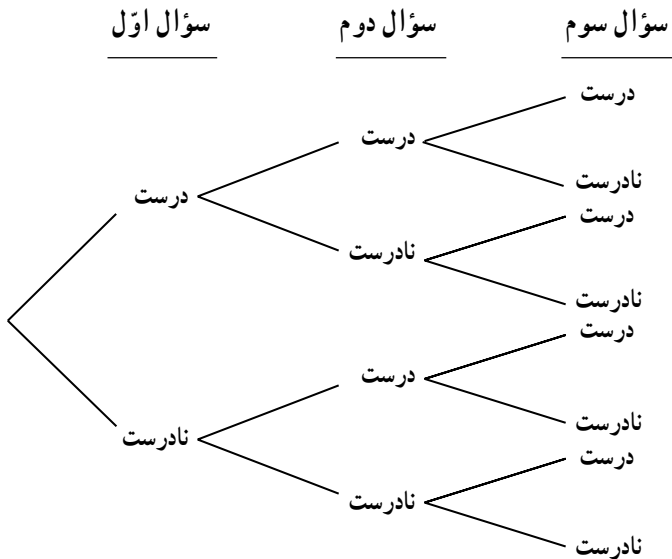
۲- تابع نظیر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است.

درست نادرست

۳- اگر مقدار مبین معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ صفر شود، معادله دارای دو جواب متمایز خواهد بود.

درست نادرست

ب) برای هر یک از سؤال‌ها، چند جواب ممکن وجود دارد؟ نمودار درختی زیر، راه‌های ممکن پاسخگویی به این سه سؤال را نشان می‌دهد:



پ) دو شاخه این درخت؛ یعنی دو راه ممکن برای پاسخ‌گویی به سه سؤال بالا، در جدول ۳ مشخص شده است. سایر شاخه‌ها را مشخص کنید و جدول را تکمیل نمایید.

جدول ۳

راه‌های ممکن	جواب سؤال اول	جواب سؤال دوم	جواب سؤال سوم
۱	درست	درست	درست
۲	درست	درست	نادرست
۳	درست		درست
۴		نادرست	
۵			
۶	نادرست		
۷		نادرست	
۸	نادرست		

چون برای پاسخ دادن به هر سؤال، دو گزینه وجود دارد، پس طبق اصل اساسی شمارش، تعداد راه‌های ممکن برای پاسخگویی به سؤال‌های این آزمون، ضرب تعداد انتخاب‌های ممکن در هر مرحله از تصمیم‌گیری، یعنی $2 \times 2 \times 2 = 8$ است.

ت) اگر بخواهید به یک آزمون «درست – نادرست» با ۵ سؤال پاسخ دهید، به چند راه ممکن می‌توانید پاسخ‌ها را انتخاب کنید؟

ث) اگر بخواهید به یک آزمون «درست – نادرست» با ۱۰ سؤال پاسخ دهید، به چند راه ممکن می‌توانید پاسخ‌ها را انتخاب کنید؟

ج) فرق بین نمودار درختی این فعالیت، با نمودار درختی فعالیت ۱-۳ چیست؟ توضیح دهید.

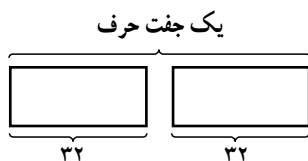
چ) تفاوت بین آزمون جورکردنی با آزمون «درست – نادرست» چیست؟ تفاوت بین انتخاب راه‌های ممکن در این دو آزمون کدام است؟

مثال

با استفاده از اصل اساسی شمارش، نشان دهید چند جفت از حروف الفبای فارسی می‌توانیم

داشته باشیم؟

حل: این تصمیم‌گیری، دارای دو مرحله است. مرحله اول، انتخاب یک حرف از ۳۲ حرف الفبای فارسی و مرحله دوم نیز، انتخاب یک حرف از ۳۲ حرف الفبای فارسی است. پس، در هر مرحله، ۳۲ انتخاب ممکن وجود دارد.



بنابراین، طبق اصل اساسی شمارش، تعداد جفت حروف الفبای فارسی، برابر

$$۳۲ \times ۳۲ = (۳۲^۲) = ۱۰۲۴$$

است.

تمرین

چند کلمه سه حرفی با حروف الفبای فارسی، می‌توان درست کرد؟ (با معنی بودن کلمه‌ها مهم نیست.)

مثال

در یک محله که پیش شماره سه رقمی آن مشخص است (یعنی تغییر نمی‌کند)، چند راه ممکن برای شماره تلفن‌های ۷ رقمی وجود دارد؟

حل: ۷ جعبه خالی زیر را برای ۷ رقم شماره تلفن‌ها در نظر می‌گیریم:



چون پیش شماره تغییر نمی‌کند، پس فقط ۴ رقم آخر تغییر می‌کنند. برای هر رقم هم ۱۰ انتخاب ممکن وجود دارد. پس طبق اصل اساسی شمارش، تعداد راه‌های ممکن برای دادن شماره تلفن‌های ۷ رقمی با پیش شماره سه رقمی مشخص (ثابت)، $۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۱۰^۴$ است.

تمرین

در یک آزمون دو گزینه‌ای «درست – نادرست» با ۲۵ سؤال، چند راه ممکن برای پاسخگویی به ۲۵ سؤال، وجود دارد؟

۲-۳ انتخاب‌های مستقل و وابسته

در آزمون‌های جورکردنی، انتخاب پاسخ برای هر سؤال، وابسته به انتخاب‌های انجام شده برای سایر سؤال‌ها است؛ یعنی هر پاسخی که انتخاب شد، دیگر نمی‌توانیم آن را انتخاب کنیم و برای پاسخ به سؤال بعدی، تعداد انتخاب‌ها یکی کمتر از سؤال قبلی است. اما در آزمون «درست – نادرست»، انتخاب پاسخ‌ها برای هر سؤال مستقل از هم هستند؛ یعنی پاسخ هر سؤال، مستقل از سؤال‌های قبل و بعد از آن، می‌تواند یکی از دو گزینه «درست» یا «نادرست» باشد. پس تعداد انتخاب‌ها برای هر سؤال (هر مرحله) با هم برابر هستند.

تمرین

در تمام تمرین‌ها و مثال‌هایی که از شروع فصل سوم تا به حال داشته‌اید، مشخص کنید که کدام انتخاب‌ها مستقل و کدام‌ها، وابسته هستند.

فعالیت ۳-۳

الف) آزمون ۴ سؤالی زیر را با دو گزینه «درست» یا «نادرست» در نظر بگیرید:

سؤال ۱: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

درست نادرست

سؤال ۲: اگر $f(x) = 2x^2 + 3$ باشد، آنگاه $f(x-2) = 2(x-2)^2 + 3$

درست نادرست

سؤال ۳: یک تابع توانی می‌تواند یک تابع خطی باشد.

درست نادرست

سؤال ۴: اگر مبین معادله درجه دوم منفی باشد، معادله دارای جواب حقیقی است.

درست نادرست

(ب) نمودار درختی راه‌های ممکن پاسخگویی به این آزمون چهار سؤالی دوگزینه‌ای را رسم کنید.

(پ) طبق اصل اساسی شمارش، چه عددهایی باید درهم ضرب شوند تا جواب قسمت (ب) به دست آید؟

(ت) جدول زیر را تکمیل کنید.

جدول ۴

۱۰	...	۶	۵	۴	۳	۲	۱	تعداد سؤال‌های یک آزمون «درست – نادرست»
	...				۸	۴	۲	تعداد راه‌های ممکن پاسخگویی به سؤال‌های این آزمون

(ث) پس از تکمیل جدول، راه‌های مختلف پاسخگویی به سؤال‌های این نوع آزمون را، برحسب توان‌های ۲ بنویسید.

(ج) آیا می‌توانید برای پیدا کردن راه‌های ممکن پاسخگویی به سؤال‌های آزمون «درست – نادرست»، شکل دیگری از اصل اساسی شمارش را بنویسید؟

اگر یک تصمیم‌گیری دارای k مرحله باشد $(k, 1, 2, 3, \dots)$ و تعداد انتخاب‌های ممکن در هر مرحله، با هم برابر و مساوی n باشند، آنگاه تعداد انتخاب‌های ممکن در این تصمیم‌گیری، حاصل ضرب تعداد انتخاب‌ها در هر مرحله یعنی

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_k \text{ بار}$$

است که مساوی n^k می‌شود.

مثال

تعداد راه‌های ممکن پاسخگویی به یک آزمون «درست – نادرست» با ۱۵ سؤال چند تا است؟

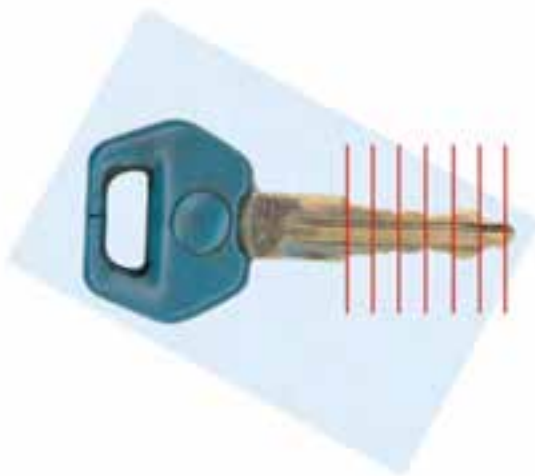
حل: چون برای هر سؤال، دو پاسخ ممکن وجود دارد، پس تعداد راه‌های ممکن،

$$2^{15} = \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{15 \text{ بار}} \text{ است.}$$

مسائل

۱- سارا می‌خواهد همراه با خانواده خود، برای تعطیلات عیدنوروز به یکی از شهرهای یزد، کرمان، اهواز، مشهد یا ساری برود. آنها می‌توانند برای مسافرت، از خودرو سواری یا اتوبوس یا قطار استفاده کنند. تعداد راه‌های ممکن را که خانواده سارا می‌توانند برای انتخاب شهر و وسیله نقلیه داشته باشند، بنویسید.

۲- کلیدهایی با شکل‌های متفاوت، طوری طراحی می‌شوند که برای هر قسمت آن‌ها، الگوهای مختلفی وجود دارد. کلیدهای پیکان ۶ قسمت دارند.



الف) قبلاً، برای هر قسمت دو الگو وجود داشت. در آن موقع، چند طرح مختلف برای کلیدهای پیکان ممکن بود وجود داشته باشد؟

ب) در حال حاضر، پیکان از سه الگو برای هر قسمت استفاده می‌کند. به این ترتیب، چند طرح مختلف برای کلیدهای پیکان وجود دارد؟

پ) اگر تعداد الگوها برای هر قسمت، به ۴ تا افزایش یابد، چند طرح مختلف برای کلیدهای پیکان وجود خواهد داشت؟

۳- یک اداره، برای شماره کارت پرسنلی کارمندان خود، از یک کُد ۵ شماره‌ای و یک حرف به شکل زیر، استفاده می‌کند:

عدد عدد عدد حرف عدد

با این شرط که اولین رقم، نمی‌تواند صفر باشد، تعداد راه‌های ممکن برای شماره کارت‌های مختلف پرسنلی را پیدا کنید.

۳-۳- جایگشت

برای شرکت در یک میزگرد تلویزیونی مربوط به آینده شغلی فارغ‌التحصیلان رشته علوم انسانی، ۹ کارشناس متخصص، به این برنامه، دعوت شده‌اند.

اولین کسی که می‌خواهد بنشیند، می‌تواند هر یک از ۹ صندلی دور میز را برای نشستن انتخاب کند. نفر دوم می‌تواند هر یک از ۸ صندلی باقی‌مانده را برای نشستن انتخاب کند. طبق اصل اساسی شمارش، این دو نفر به

$$9 \times 8 = 72$$

راه ممکن می‌توانند برای خود، جای نشستن انتخاب کنند.
 به همین ترتیب

$$9 \times 8 \times 7 = 504$$

راه ممکن برای انتخاب جای نشستن سه نفر از کارشناسان، وجود دارد. با ادامه این کار،

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

راه ممکن، برای نشستن این ۹ نفر روی صندلی‌های دور میز، وجود دارد. توجه کنید که انتخاب



جای نشستن هر نفر، وابسته به انتخاب‌های نفرات قبلی است، زیرا وقتی یک صندلی اشغال شد، نفر بعدی نمی‌تواند روی آن بنشیند. برای همین، هر نفر بعدی، یک انتخاب کمتر از نفر قبل از خودش دارد.

چنین طرز قرار گرفتنی، جایگشت نامیده می‌شود. یعنی، هر یک از راه‌های ممکن قرار گرفتن این ۹ نفر در کنار یکدیگر، یک جایگشت از آن ۹ نفر است که تعداد آن‌ها را با P_n نشان می‌دهیم.

تعریف

هر یک از راه‌های ممکن قرار گرفتن n شیء متمایز کنار یکدیگر، یک جایگشت از آن n شیء نامیده می‌شود. تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز، با P_n نشان داده می‌شود.

$$9 \times 8 \times \dots \times 1$$

برای نوشتن حاصل ضرب

می‌توانیم از علامت تعجب یعنی (!) استفاده کنیم که در ریاضی، به آن فاکتوریل گفته می‌شود.

با استفاده از این علامت، به جای $9 \times 8 \times \dots \times 1$ می‌نویسیم $9!$.

تعریف

$n!$ یعنی ضرب n در تمام اعداد متوالی قبل از خودش تا ۱

پس با توجه به تعریف جایگشت:

تعداد جایگشت‌های n شیء مختلف، $n!$ است.

اگر چه در ریاضی، نماد (!) برای تعجب و شگفتی مورد استفاده قرار نمی‌گیرد، اما اغلب اعدادی که توسط این علامت نشان داده می‌شوند، به‌طور شگفت‌آوری بزرگ هستند!

تمرین

فهرست زیر را تکمیل کنید :

$$۱! = ۱$$

$$۲! = ۲ \times ۱ = ۲$$

$$۳! = ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$$

$$۴! =$$

$$۵! =$$

$$۶! =$$

:

$$۱۰! =$$

توجه: طبق قرارداد، $۰! = ۱$ تعریف می‌شود.

تمرین

اگر چه ممکن است تساوی $۲! + ۲! = ۴!$ ، «به نظر» درست آید، اما می‌دانید که نادرست است، زیرا $۲! = ۲$ و $۴! = ۲۴$ ، در نتیجه $۲ + ۲ \neq ۲۴$.

با استفاده از فهرستی که در تمرین قبل ساخته‌اید، تحقیق کنید که کدام یک از تساوی‌های زیر درست، و کدام یک نادرست هستند؟

الف) $۳! + ۳! = ۶!$

ب) $۱۰! = ۱۰ \times ۹!$

پ) $۱! + ۴! + ۵! = ۱۴۵$

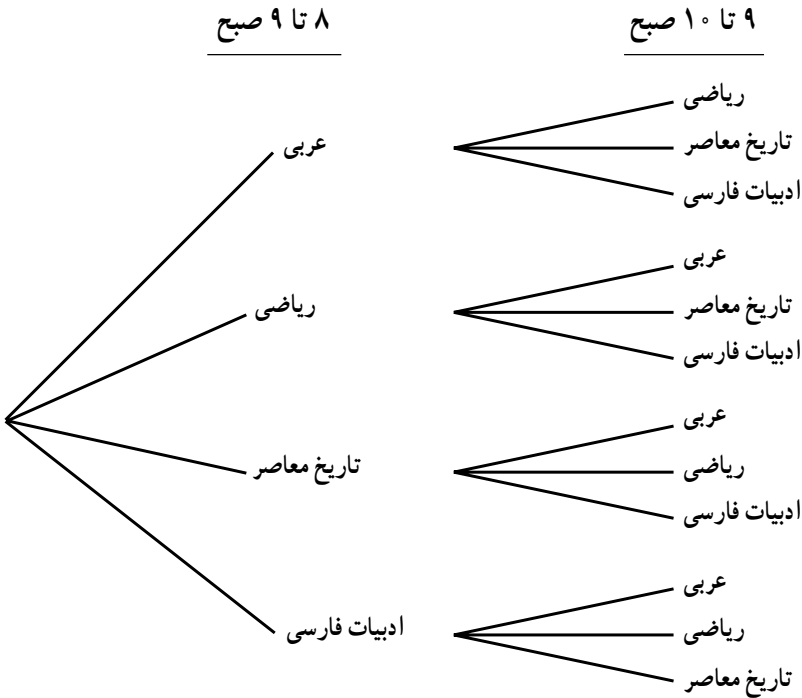
ت) $\frac{۸!}{۴!} = ۲!$

ث) $۶! \times ۷! = ۱۰!$

مدیر یک دبیرستان، برای تنظیم برنامه روز شنبه دانش آموزان سال سوم رشته علوم انسانی، انتخاب‌های زیر را برای ساعت ۸ تا ۱۲ ظهر - که طی آن چهار کلاس برگزار می‌شود - دارد:

عربی، ریاضی، تاریخ معاصر، ادبیات فارسی

نمودار درختی زیر، نشان می‌دهد چگونه این مدیر، می‌تواند برنامه ساعت ۸ تا ۹ و ۹ تا ۱۰ صبح را، از بین این چهار ساعت انتخاب کند.



۱- چند راه مختلف، برای تنظیم ساعت‌های دو درس وجود دارد؟

۲- تعداد جایگشت‌های چهار درس در برنامه صبح شنبه رشته علوم انسانی این

دبیرستان، چند تا است؟

۳- نمودار درختی بالا را برای ساعت‌های ۸ تا ۹، ۹ تا ۱۰، ۱۰ تا ۱۱ و ۱۱ تا

۱۲، کامل کنید.

۴- انتخاب‌های ساعت تدریس برای هر درس، مستقل از هم هستند یا وابسته

به هم؟ چرا؟

مسائل

۱- دبیرستان جلال‌آل احمد، تصمیم گرفته است تا از طریق انتخابات، شورای دانش‌آموزی تشکیل دهد. دانش‌آموزان به چند راه ممکن می‌توانند نام‌های ۵ نامزد انتخاباتی برای شورا را، روی برگه‌های رأی بنویسند؟

۲- به چند راه مختلف، از بین ۸ دوندۀ یک مسابقه، نفرات اول تا سوم می‌توانند مشخص شوند؛ بدون آن که هیچ دو نفری هم‌زمان، به خط پایان برسند؟

۳- به چند راه ممکن، شماره تلفن‌های ۷ رقمی، می‌توانند ساخته شوند، به طوری که در آن‌ها، رقم صفر نباشد؟

۴- اگر وجود رقم صفر در بین رقم‌های شماره تلفن‌های ۷ رقمی مسأله ۳ جایز باشد، چه تغییری در تعداد راه‌های ممکن ایجاد می‌شود؟ چرا؟

۵- به چند راه مختلف، ۸ نفر می‌توانند برای تهیهٔ بلیط سینما، در یک صف بایستند؟

۶- «مرکز گفتگوی تمدن‌ها» در سال ۱۳۸۰، مسابقه‌ای با چهار جایزهٔ ۵۰,۰۰۰ تومانی، ۳۰,۰۰۰ تومانی، ۲۰,۰۰۰ تومانی و ۱۰,۰۰۰ تومانی برای بهترین نقاشی دانش‌آموزان ۱۴ تا ۱۷ سال و با موضوع «نقش دانش‌آموزان در گفتگوی تمدن‌ها» ترتیب داده است. شرط مسابقه این است که کسی نمی‌تواند بیش از یک جایزه را ببرد.

اگر ۱۰۰۳ دانش‌آموز ۱۴ تا ۱۷ سال، نقاشی‌های خود را برای این مسابقه فرستاده باشند، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) به چند راه ممکن، دو جایزهٔ اول و دوم، کسب خواهند شد؟

ب) به چند راه ممکن، سه جایزهٔ اول، دوم و سوم، کسب خواهند شد؟

پ) به چند راه ممکن، هر چهار جایزه، کسب خواهند شد؟

۷- تعداد جایگشت‌های حرف‌های کلمهٔ «قناعت» را بنویسید.

۸- اگر بخواهید با رقم‌های ۲، ۵، ۶، ۹ و ۳، کدهای ۵ رقمی بسازید، تعداد راه‌های ممکن را

بنویسید.

زنگ تفریح ریاضی!

احمد ۱۳ نفر از دوستان خود را برای تماشای یک فیلم به سینما دعوت کرد. او برای این منظور ۱۴ بلیت در یک ردیف رزرو کرده بود. اگر مسئول سالن بخواهد این ۱۴ نفر را به صندلی‌ها راهنمایی کند، هر یک از ۱۴ نفر می‌تواند صندلی اول را اشغال کند. بعد از او، صندلی دوم می‌تواند توسط هر یک از ۱۳ نفر باقی مانده اشغال شود. با استفاده از اصل اساسی شمارش، $14 \times 13 = 182$ راه ممکن وجود دارد که دو نفر، بتوانند دو صندلی از ۱۴ صندلی را اشغال کنند. با همین استدلال، تعداد جایگشت‌های ۱۴ نفر یعنی $P_{14} = 14!$ است که برابر است با:

$$14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 87,178,291,200$$

یعنی $87,178,291,200$ راه ممکن، برای نشستن این ۱۴ نفر روی صندلی‌ها وجود دارد. این عدد آن قدر بزرگ است که اگر این ۱۴ نفر، می‌توانستند در هر ثانیه - و بدون توقف - یک ترتیب جدید نشستن درست کنند، بیش از ۲۷۰۰ سال طول می‌کشید تا ۱۴ نفر، با هر جایگشت ممکن، روی صندلی‌ها بنشینند! در این مدت آنها چند فیلم می‌توانستند ببینند!؟



۱-۳-۳- جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز: با دقت در مسأله‌هایی که راجع به جایگشت تا به حال حل کرده‌اید، حتماً متوجه می‌شوید که فعالیت ۳-۴ و مسأله ۶، با سایر مسأله‌ها، کمی فرق داشت. در فعالیت ۳-۴، مدیر دبیرستان می‌خواست راه‌های ممکن را برای تنظیم ساعت‌های دو درس از چهار درس خود را پیدا کند. در مسأله ۶ نیز، از تمام ۱۰۰۳ نفر شرکت کننده، تنها ۴ نفر موفق به کسب جایزه می‌شدند. یعنی، هر کدام از ۱۰۰۳ نفر شرکت کننده، امکان کسب جایزه اول را داشتند، اما به محض آن که جایزه اول به برنده آن تعلق گرفت، جایزه دوم به یکی از ۱۰۰۲ نفر باقی مانده، جایزه سوم به یک نفر از بین ۱۰۰۱ شرکت کننده دیگر و بالاخره؛ جایزه چهارم به یکی از ۱۰۰۰ شرکت کننده مسابقه تعلق می‌گرفت. یعنی تعداد راه‌های مختلفی که چهار جایزه به چهار نفر برگزیده از بین ۱۰۰۳ نفر تعلق می‌گیرد برابر $1000 \times 1001 \times 1002 \times 1003$ است که بسیار کوچک‌تر



از ۱۰۰۳! است.

– اگر تعداد دانش‌آموزان شرکت‌کننده در مسابقه n نفر باشد چهار جایزهٔ اول به چند راه ممکن به چهار نفر از n نفر تعلق می‌گیرد؟
– آیا می‌توانید یک فرمول کلی، برای پیدا کردن تعداد چنین جایگشت‌هایی پیدا کنید؟
برای مثال به مسألهٔ ۲ همین فصل

بازگردید؛ دیدید که هر یک از ۸ نفر دوندۀ می‌توانستند برندهٔ مقام اول باشند. وقتی نفر اول تعیین می‌شود، هر یک از ۷ نفر باقیمانده می‌توانند مقام دوم را کسب کنند و بالاخره یکی از بین ۶ نفر باقیمانده مقام سوم را به دست خواهد آورد. پس طبق اصل اساسی شمارش تعداد راه‌های ممکن برای اینکه از بین ۸ دوندۀ ۳ نفر حائز مقام‌های اول تا سوم شوند برابر $8 \times 7 \times 6 = 336$ خواهد بود. در این مسأله، در واقع به جای آن که تعداد جایگشت‌های ۸ یعنی $8!$ را حساب کنیم؛ تعداد جایگشت‌های ۳ از ۸ را پیدا کردیم یعنی:

$$8 \times 7 \times 6 = 8(8-1)(8-2) \quad (1)$$

اگر بخواهیم قانونی به دست آوریم که تعداد جایگشت‌های ۳ از ۸ را نشان دهد می‌توانیم به طریق زیر عمل کنیم:

$$8! = 8 \times 7 \times 6 \times \underbrace{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{\text{می‌دانیم}}$$

به جای $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ می‌توانیم $5!$ را قرار دهیم. پس:

$$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5!$$

دو طرف تساوی را بر $5!$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6$$

در رابطهٔ (۱) جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{8!}{5!} = 8(8-1)(8-2)$$

اگر $8(8-1)(8-2)$ را که جایگشت ۳ از ۸ است با $P(8, 3)$ نشان دهیم، آن‌گاه:

$$P(8, 3) = \frac{8!}{5!}$$

از طرفی، ۵! همان $(۸-۳)!$ است پس :

$$P(۸, ۳) = \frac{۸!}{(۸-۳)!}$$

در حالت کلی، برای پیدا کردن تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء، یعنی $P(n, r)$ و با فرض این که $r \leq n$ است (چرا؟) با استفاده از الگوی استدلالی مثال قبل، می‌نویسیم :

$$P(n, r) = n(n-۱)(n-۲)\dots(n-r+۱)$$

از طرفی،

$$n! = n.(n-۱)(n-۲)\dots(n-r+۱)(n-r)!$$

$$n! = P(n, r)(n-r)! \quad \text{یا}$$

چون می‌خواهیم $P(n, r)$ را محاسبه کنیم، پس دو طرف معادله را بر $(n-r)!$ تقسیم نموده، و معادله را برای $P(n, r)$ حل می‌کنیم :

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

تعریف

اگر n شیء مختلف داشته باشیم، تعداد جایگشت‌های r شیء از این n شیء برابر است با

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

که در آن، $r \leq n$ و r و n ، هر دو عدد طبیعی هستند.

مثال

تعداد جایگشت‌های n شیء از n شیء را پیدا کنید.

حل: چون $r = n$ ، پس :

$$\begin{aligned} P(n, n) &= \frac{n!}{(n-n)!} \\ &= \frac{n!}{0!} = n! \end{aligned}$$

۱- به چند راه ممکن، می توان با حرف های کلمه «دشت مغان» کلمات سه حرفی ساخت (بی معنی بودن کلمات اشکالی ندارد).

۲- با رقم های شماره تلفن ۲۳۸۵۴۷۸، چند عدد سه رقمی می توان ساخت؟

۳- هر یک از مقادیر زیر را محاسبه کنید؛

الف) $P(13, 5)$ ب) $P(4, 4)$ پ) $P(n, 0)$

۴- به چند راه مختلف، با حرف های کلمه «روستا» می توان کلمه های سه حرفی ساخت؟

۵- از بین ۱۲ داوطلب عضویت در هیأت رئیسه یک مؤسسه، یک نفر به عنوان رئیس، یک نفر معاون و یک نفر خزانه دار، توسط اعضای مؤسسه انتخاب شدند. تعداد راه های ممکن برای انتخاب این هیأت را پیدا کنید.

۶- مقادیر زیر را به دست آورید:

الف) $P(100, 1)$ ب) $P(100, 50)$

پ) $P(n, (n-1))$ ت) $P((n+2), 4)$

۷- درستی تساوی های زیر را نشان دهید؛

الف) $P(n, (n-1)) = P(n, n)$

ب) $P((n+2), 4) = P(n, 3)$

پ) $P(n, 5) = 18P((n-2), 4)$

۸- از یک گروه ۱۰۰ نفری دانش آموزی، به چند راه ممکن می توان ۴ نفر را برای فعالیت های فوق برنامه مدرسه انتخاب کرد؟ به طوری که یک نفر مسئول گروه سرود، یک نفر مسئول گروه دانش، یک نفر مجری برنامه ها و یک نفر مسئول مسابقات علمی شود.

۲-۳- جایگشت های متمایز^۱

مثال

با حروف کلمه BANANA، چند ترتیب مختلف می توان ساخت؟

حل: اگر تمام حرف های کلمه BANANA از هم متمایز بودند، ما می توانستیم ۶! ترتیب مختلف بسازیم (که همان تعداد راه های ممکن ساختن کلمات جدید با این ۶ حرف است). در واقع،

۱- Distinguishable Permutation

اگر A ها و N ها را شماره گذاری کنیم تا از هم متمایز شوند، تعداد راه‌های ممکن، همان تعداد جایگشت‌های ۶ حرف یعنی $6!$ است. اما $(A_1A_2A_3)$ می‌توانند به $3!$ راه مختلف، جایگشت داشته باشند. تعداد جایگشت‌های (N_1N_2) نیز $2!$ است. اما چون واقعاً A ها و N ها از هم متمایز نیستند، پس $3! \times 2!$ ترتیب مشابه داریم. یعنی $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$ ، از تعداد واقعی راه‌های ممکن (یا ترتیب‌های ممکن) ساختن کلمات با حرف‌های کلمه BANANA، $2 \times 3 \times 2 = 12$ ، $3! \times 2!$ بار بزرگتر است. به همین دلیل، برای پیدا کردن تعداد واقعی راه‌های ممکن، باید $6!$ را بر $3! \times 2! = 12$ تقسیم کنیم. برای وضوح بیشتر، به نمونه زیر توجه کنید:

$A_1BN_1A_2NA_3$	$A_1BN_1A_2NA_3$
$A_1BN_2A_2NA_3$	$A_1BN_2A_2NA_3$
$A_2BN_1A_1NA_3$	$A_2BN_1A_2NA_1$
$A_2BN_2A_1NA_3$	$A_2BN_2A_2NA_1$
$A_3BN_1A_1NA_2$	$A_3BN_1A_2NA_1$
$A_3BN_2A_1NA_2$	$A_3BN_2A_2NA_1$

همان‌طور که می‌بینید، برای هر راه ممکن، 12 گروه از کلماتی داریم که اگر A ها و N ها را با شماره گذاری متمایز نکنیم، همگی یکسان هستند؛ پس باید تعداد کل راه‌های ممکن را بر $3! \times 2!$ که همان 12 باشد، تقسیم کنیم.

به طور کلی، تعداد جایگشت‌های n شیء، که در آن، a_1 شیء مثل هم a_2 شیء مثل هم و $a_k \dots$ شیء مثل هم باشند برابر است با:

$$\frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_k!}$$

مسائل

۱- راه‌های مختلفی که حروف کلمه نادر را می‌توان مرتب کرد، در زیر آمده است:

نردا	نراد	ندرا	ندار	نارد	نادر
اردن	ارند	ادرن	ادنر	انرد	اندر
دران	درنا	دارن	دانر	دنرا	دنار
ردان	ردنا	رادن	راند	رندا	رناد

- نشان دهید که بدون تهیة این فهرست، چگونه این تعداد به دست می‌آید؟
- ۲- فهرستی از تمام راه‌های مختلفی که می‌توان حروف کلمه سارا را مرتب کرد، تهیة کنید.
- ۳- چرا تعداد راه‌هایی که می‌توان حروف کلمه سارا را مرتب کرد، کمتر از تعداد راه‌هایی است که می‌توان حروف کلمه نادر را مرتب کرد؟
- نشان دهید که بدون تهیة فهرست، چگونه تعداد راه‌های مرتب کردن حرف‌های کلمه سارا به دست می‌آید؟
- ۴- کدام یک از کلمه‌های زیر، دارای تعداد ترتیب‌های مساوی با کلمه سارا است؟
دارا، سوسن، شبنم، زهرا، مریم و مهدی
- ۵- الف) فهرستی از تمام راه‌هایی که می‌توان حروف کلمه بابا را مرتب کرد، بنویسید.
ب) نشان دهید چگونه این تعداد، بدون تهیة فهرست به دست می‌آید؟
- ۶- به چند طریق ممکن، می‌توان جایگشت‌های مختلفی با رقم‌های عدد ۲۸۵۸۸۸۸۸۸۸ ساخت؟
- ۷- شماره پلاک ماشینی ۴۴۴ ک ۲۲ است. چند پلاک ماشینی با همین ۵ رقم و حرف «ک» می‌توان ساخت؟

فعالیت ۳-۵

شعر فردوسی را در نظر بگیرید :



حسین کیانکابانی
تذهیب، گواش و آبرنگ

تمام راه‌های ممکن که بتوان حروف این بیت شعر را جابه‌جا کرد؛ یعنی تعداد تمام جایگشت‌های ۳۶ حرف این شعر را پیدا کنید (به عبارتی دیگر، تمام ترتیب‌های مختلف را پیدا کنید). برای این کار، از رابطه زیر می‌توانید استفاده کنید:

$$36!$$

$$\frac{36!}{4!6!4!4!6!2!3!}$$

الف) فاکتوریل‌های رابطه بالا از کجا آمده‌اند؟

ب) رابطه‌ای بنویسید که با آن، بتوان تعداد راه‌های مختلف ترتیب حروف ۶ کلمه مصرع اول را نوشت.

پ) آن راه‌ها، چند تا هستند؟

ت) رابطه‌ای بنویسید که با آن، بتوان تعداد راه‌های مختلف نوشتن ۱۲ حرف اول این بیت را پیدا کرد.

ث) آن راه‌ها، چند تا هستند؟

ج) فرمول $\frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_k!}$ را با نتیجه این فعالیت مقایسه کنید سپس تعریف

جایگشت را مجدداً، از زبان خود، بنویسید.

مسائل

۱- با استفاده از فرمول $\frac{n!}{a_1! a_2! a_3! \dots a_k!}$ ، تعداد ترتیب‌های مختلف عبارت «آفتاب آمد دلیل آفتاب» را بنویسید.

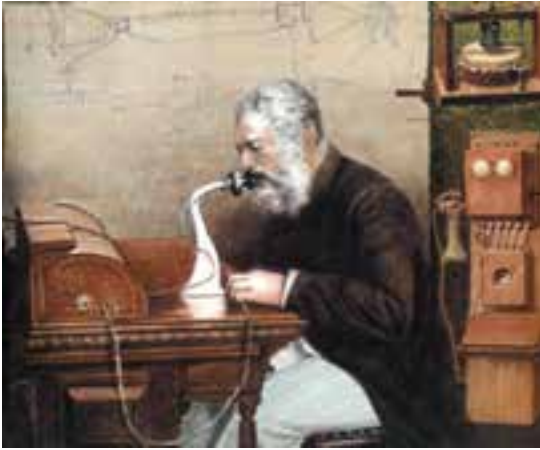
۲- با رقم‌های عدد ۲۴۲۳۳۷۳، چند ترتیب مختلف می‌توانید داشته باشید؟

۳- عنوان مجله‌ای که با هدف آموزش شهروندان برای استفاده صحیح از نان، به تازگی اجازه انتشار گرفته است، نان و نان^۱ است. این عنوان غیر معمول است؛ زیرا اگر آن را از سمت چپ هم بخوانید، باز همان نان و نان می‌شود. یعنی با برعکس کردن ترتیب حرف‌های نان و نان، ترتیب عنوان تغییر نمی‌کند.

با استفاده از فرمول «جایگشت‌های متمایز»، تعداد ترتیب‌های مختلف حرف‌های این عنوان را پیدا کنید.

۱- به این نوع واژه‌ها که از هر دو طرف یک‌جور خوانده می‌شوند، متقارن می‌گویند. برای اطلاعات بیشتر به کتاب «مهارت‌های پایه ریاضی» سال اول متوسطه مراجعه کنید.

۴-۳ ترکیب^۱



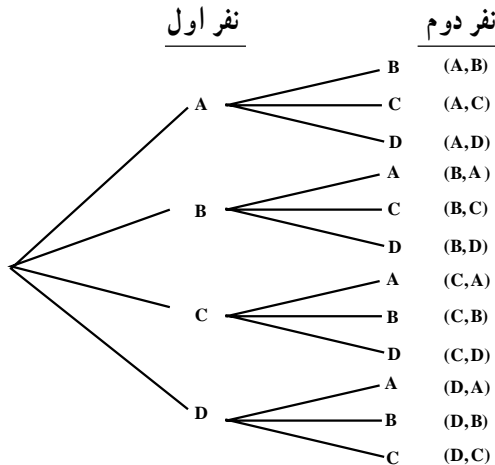
الکساندر گراهام بل

اولین مبادله صدا توسط تلفن، در شهر نیویورک در ایالت کانکتیکت ایالات متحده آمریکا، در سال ۱۸۷۸ انجام شد. این شبکه، در توسعه خود توانست ۲۱ مشترک تلفن را به هم مرتبط کند. اولین کتاب راهنمای تلفن که در همان سال، در شهر نیویورک چاپ شد، شامل فهرست نام ۵۰ مشترک تلفن بود. این شبکه در فاز اول، توانست ۲۱ مشترک تلفن را به

۲۱ راه مختلف، دوبه دو به هم مرتبط کند (از طریق مبادله صدا بین هر جفت از آنها). با راه اندازی فاز بعدی شبکه، ۵۰ مشترک تلفن به ۱۲۲۵ راه مختلف، توانستند دوبه دو با هم مرتبط شوند. به نظر شما، این تعداد راه‌ها، چگونه محاسبه شده‌اند؟

فعالیت ۳-۶

راه‌هایی که می‌توان از بین چهار نفر داوطلب نمایندگی شورای شهر، دو نفر را انتخاب کرد، در نمودار درختی زیر نشان داده شده است.



الف) اگر ترتیب مهم باشد، چند راه در نمودار نشان داده شده است؟ (یعنی اگر (A, B) با (B, A) فرق داشته باشد).

ب) با استفاده از اصل اساسی شمارش، چه عددهایی را باید در هم ضرب کنید تا این جواب به دست آید؟

پ) اگر ترتیب مهم نباشد (مثلاً (A, B) با (B, A) یکی باشد)، چند راه ممکن برای انتخاب دو نماینده، وجود دارد؟

ت) آیا می‌توانید این جواب را، بدون نگاه کردن به نمودار درختی، به دست آورید؟ چگونه؟ بحث کنید.

ترکیب، انتخابی از شیء‌هاست که در آن، ترتیب مهم نیست.

برای پیدا کردن تعداد ترکیب‌های ممکن، اول از اصل اساسی شمارش شروع کنید و سپس، بر تعداد راه‌هایی که آن شیء‌ها می‌توانند مرتب شوند، تقسیم کنید.

در واقع، تفاوت ترکیب با جایگشت r شیء از n شیء در این است که چون ترتیب در ترکیب مهم نیست؛ در نتیجه، تعداد ترکیب‌ها به نسبت جایگشت‌های r یعنی $r!$ ، از $P(n, r)$ کوچک‌تر است.

به همین علت است که بر تعداد راه‌هایی که r شیء می‌توانند مرتب شوند، تقسیم می‌کنیم و تعداد ترکیب‌ها را با $C(n, r)$ نشان می‌دهیم:

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} \quad (1)$$

اما

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (2)$$

پس با جایگزینی (2) در (1)، داریم:

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

مثال

در روز تولد امام رضا (ع)، ده نفر در فهرست انتظار پرواز ساعت ۴ بعد از ظهر تهران - مشهد هواپیمایی جمهوری اسلامی ایران - هما قرار داشتند.

الف) اگر سه جای خالی در این پرواز وجود داشته باشد، به چند راه مختلف، ممکن است نام سه نفر به ترتیب، برای سوار شدن به هواپیما خوانده شود؟

ب) چند ترکیب مختلف از این سه نفر، برای پرواز ذکر شده می توان انتخاب کرد؟
حل:

الف) طبق اصل اساسی شمارش، برای نفر اول ۱۰ انتخاب، برای نفر دوم ۹ انتخاب و برای نفر سوم، ۸ انتخاب وجود دارد. یعنی تعداد انتخاب های ممکن، $10 \times 9 \times 8 = 720$ است. این عدد را می توان از فرمول جایگشت ۳ از ۱۰ نیز به دست آورد

$$P(10, 3) = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720$$

ب) برای پیدا کردن تعداد ترکیب های خواسته شده، باید تعداد جایگشت ها را بر تعداد جایگشت های ۳ یعنی ۳! تقسیم کنیم پس

$$C(10, 3) = \frac{P(10, 3)}{3!} = \frac{720}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

مسائل

۱- مقدارهای زیر را محاسبه کنید :

الف) $C(n, n)$ ب) $C(n, 0)$ پ) $C(7, 3)$

۲- یکی از راه هایی که معماها و بازی های مختلف کلامی ساخته می شوند، به هم ریختن حروف کلمات و ساختن کلمات جدید (با معنی یا بی معنی) است، به چند راه مختلف، می توان از تغییر ترتیب حرف های کلمه های زیر، ترکیب های جدید ساخت؟

الف) کامیاران ب) مینادشت باغدشت پ) سوسنگرد ت) بندر لنگه

خط بریل به زبان فارسی که توسط افراد نابینا مورد استفاده قرار می‌گیرد، از کُدی با ۶۳ کاراکتر تشکیل شده است. کاراکترها ترکیب‌هایی از نقاط برجسته هستند که از ۱ تا ۶ در تغییرند.



نمونه‌هایی از حروف فارسی به خط بریل، در زیر نشان داده شده است.

● ●	○ ●	● ●	○ ●	● ●	● ○	● ○
○ ○	● ●	○ ●	● ●	● ○	● ○	○ ○
○ ○	○ ○	○ ●	● ○	● ○	○ ○	○ ○
ج	ج	ث	ت	پ	ب	الف

دایره‌های توپُر معرف نقاط برجسته و دایره‌های توخالی نشان دهندهٔ موقعی هستند که کاغذ صاف است و برجستگی ندارد.

به چند راه مختلف ممکن است :

الف) یکی از ۶ نقطه برجسته شود؟

ب) دو تا از ۶ نقطه برجسته شوند؟

پ) ۳ تا از ۶ نقطه برجسته شوند؟

ت) ۴ تا از ۶ نقطه برجسته شوند؟

ث) ۵ تا از ۶ نقطه برجسته شوند؟

ج) تمام ۶ نقطه برجسته شوند؟

چ) آیا کُد بریل، از تمام ترکیب‌های مختلف ۱ تا ۶ نقطه، استفاده کرده است؟

۱- پرچم‌های نه کشور دنیا، الگویی دارند که در زیر می‌بینید :



رنگ هر یک از این سه نوار عمودی پرچم، در جدول ۵ آمده است :

جدول ۵

پرچم	نوار سوم	نوار دوم	نوار اول	کشور
	قرمز	زرد	سیاه	بلژیک
	قرمز	زرد	آبی	چاد
	قرمز	سفید	آبی	فرانسه
	سبز	زرد	قرمز	آلمان
	طلایی	سفید	سبز	ایرلند
	قرمز	سفید	سبز	ایتالیا
	سبز	سفید	طلایی	ساحل عاج
	قرمز	زرد	سبز	مالی
	سبز	سفید	سبز	نیجریه

الف) اگر نوارهای اول و سوم فقط سیاه، آبی، طلایی، سبز یا قرمز باشند و نوار دوم سفید یا زرد باشد، چند پرچم مختلف با این الگو ممکن است وجود داشته باشند؟
 ب) اگر هر نوار پرچم بتواند یکی از هفت رنگ جدول باشد، اما هر نوار دارای رنگ متفاوتی باشد، چند پرچم مختلف با این الگو می‌توان داشت؟
 ۲- عبارت‌های زیر را ساده کنید :

الف) $\frac{n!}{(n-5)!}$

ب) $\frac{(2n)!}{4(2n-3)!}$

۳- نشریه‌ای، تصمیم گرفته بود یک مسابقه ادبی برگزار کند. در این مسابقه، تصویر چهار شاعر معروف ایرانی قرن هفتم هجری قمری؛ مولانا جلال‌الدین محمد بلخی مشهور به مولانا، سعدی شیرازی، خواجه کرمانی و عطار نیشابوری؛ همراه با چهار بیت شعر، چاپ شده و از خوانندگان، خواسته شده بود تا هر بیت شعر را با سراینده آن جور کنند و برای دریافت یک سکه بهار آزادی به



عنوان جایزه، حداکثر تا ۱۰ روز پس از انتشار نشریه، جواب‌های خود را به دفتر نشریه ارسال کنند و شانس خود را امتحان کنند! احسان مصر بود که این جایزه را ببرد. برای این منظور، او تصمیم گرفت تمام پاسخ‌های ممکن به این سؤال را به دفتر نشریه ارسال کند.

الف) تعداد پاسخ‌های ممکن چند تا بود؟

ب) آیا به نظر منطقی می‌رسید که احسان فکر کند اگر تمام انتخاب‌ها را به درستی انجام دهد، یک سکه بهار آزادی را حتماً به دست می‌آورد؟

۴- از فهرست نام ۲۴ عضو یک باشگاه ورزشی، ۴ نام برای انتخاب رئیس، نایب رئیس، خزانه‌دار و منشی باشگاه، به قید قرعه انتخاب می‌شوند. تعداد راه‌های ممکن برای انتخاب این ۴ نفر چند تاست؟

(توجه کنید که با وجودی که ترتیب باید مهم باشد، اما این ترتیب رعایت نشده است. چرا؟!)

۵- یک بستنی فروشی، ۱۰ طعم مختلف بستنی دارد که عبارتند از: وانیلی، پرتغالی، زعفرانی، توت‌فرنگی، موز، شاه‌توت، آناناس، قهوه، شکلاتی و پسته‌ای.

الف) اگر بخواهید از این بستنی فروشی، یک بستنی قیفی با سه طعم مختلف بخرید، چند انتخاب ممکن از بین ۱۰ طعم بالا وجود دارد؛ به شرطی که ترتیب قرار گرفتن طعم‌های مختلف، برای شما مهم باشد؟

ب) اگر بخواهید از این بستنی فروشی، یک بستنی قیفی با سه طعم مختلف بخرید و اگر ترتیب قرار گرفتن طعم‌های مختلف، برای شما مهم نباشد، چند انتخاب ممکن از بین ۱۰ طعم بالا، وجود دارد؟

۶- درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید.

$$\text{الف) } C(n, m) = \frac{P(n, m)}{m!} \quad \text{ب) } C(n, n) = C(n, 0)$$

۷- عبارت «زندگی یعنی امید به آینده»^۱ را در نظر بگیرید و به سؤال‌های زیر، پاسخ دهید.

الف) چند ترتیب مختلف با حرف‌های این عبارت می‌توانیم بسازیم؟

ب) اگر بخواهیم کلمه «امید»، همه جا به همین شکل بیاید، آن وقت چند ترتیب مختلف با حرف‌های این عبارت می‌توانیم بسازیم؟

۸- ۱۰۰ عضو یک باشگاه کوهنوردی دانش‌آموزی، به همراه دو مربی، قصد صعود به بلندترین

۱- این جمله را استاد بیرشک در موقعی که دانشگاه شهید بهشتی در سال ۱۳۷۷، به ایشان، دکترای افتخاری ریاضی را اعطا کرد، بیان نمودند و گفتند که این عبارت، شعار دانشگاه ملی سابق (شهید بهشتی فعلی) بوده است.

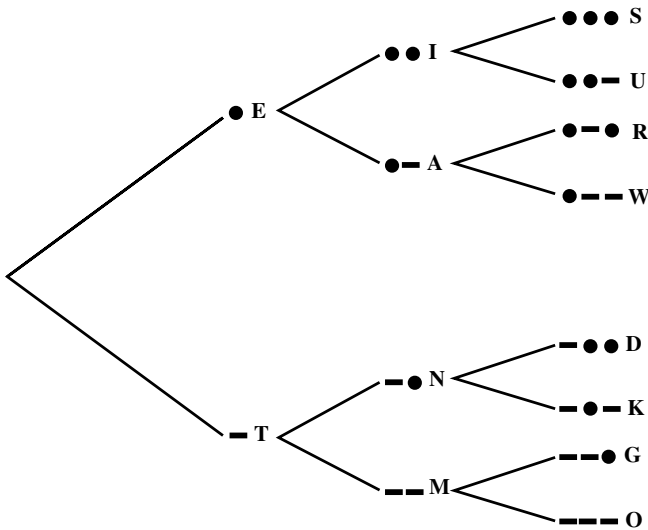
قله شهر خود را دارند. قرار است برای حفظ نظم و ایمنی دانش‌آموزان، همگی با صف حرکت کنند و یکی از مرتبی‌ها پیشاپیش و دیگری، در انتهای صف، به صعود خود ادامه دهند. تعداد ترتیب‌های مختلفی که افراد می‌توانند در صف ظاهر شوند، عددی است که باورنکردنی بزرگ است. نگاه کنید!

۹۳,۳۲۶,۲۱۵,۴۴۳,۹۴۴,۱۵۲,۶۸۱,۶۹۹,۲۳۸,۸۵۶,۲۶۶,۷۰۰,۴۹۰,۷۱۵,۹۶۸,۲۶۴,
 ۳۸۱,۶۲۱,۴۶۸,۵۹۲,۹۶۳,۸۹۵,۲۱۷,۵۹۹,۹۹۳,۲۲۹,۹۱۵,۶۰۸,۹۴۱,۴۶۳,۹۷۶,۱۵۶,
 ۵۱۸,۲۸۶,۲۵۳,۶۹۷,۹۲۰,۸۲۷,۲۲۳,۷۵۸,۲۵۱,۱۸۵,۲۱۰,۹۱۶,۸۶۴,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,
 ۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰

شکل کوتاهتری برای این عدد بنویسید.

مجله ریاضی

کُد مورس، حدود سال ۱۸۳۸ توسط ساموئل مورس^۱ و برای استفاده در تلگراف، اختراع شد. کُد مورس از الگوهایی که با نقطه و خط فاصله ایجاد شده است استفاده می‌کند تا حروف الفبا را معرفی کند. بخشی از نماد بین‌المللی این کُد، توسط نمودار درختی زیر، نشان داده شده است:



۱- Samuel Morse

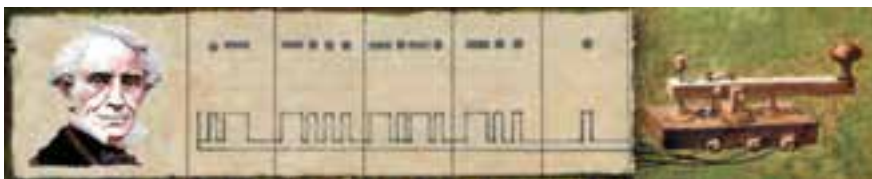
این نمودار نشان می‌دهد که اگر فقط از یک نماد استفاده شود یعنی • که معرف E و – که معرف T است، دو الگو ممکن است.

الف) چند الگو را می‌توان با استفاده از ۲ نماد ساخت؟

ب) چند الگو را می‌توان با استفاده از ۳ نماد ساخت؟

پ) به نظر شما، با استفاده از ۴ نماد، چند الگو می‌توان ساخت؟

ت) آیا تمام حروف الفبای انگلیسی را می‌توان با الگویی که دارای ۴ نماد یا کمتر هستند، نشان داد؟ توضیح دهید.



ساموئل مورس

منابع

1- Brousseau, G. (1997). **Theory of Didactical Situations in Mathematics**. Edited and translated by N. Balacheff; M.Cooper; R. Sutheland; and V. Warfield. Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers.

2 - De lange, J. (1998). Real Problems with Real world Mathematics, In C. Alsina & et. al (eds). **Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education**, S. A. E. M. THALES.

3 - Eisner, E. (1994). **The Educational Imagination: On the Design and Evaluation of school Programs**. Third Edition. Macmillan College Publishing Company.

4 - Ferrini - Mundy, J. & Lauter, D. (1993). Teaching and Learning Calculus. In P. S. Wilson. [ed.] **Research Ideas for the Classroom: High school Mathematics**: National Council of Teachers of Mathematics Research Interpretation Project. Academic Macmilan Publishing Company.

5 - Hubbard, E. & Robinson, R. D. (1999). **Elementary and Intermediate Algebra**. Houghton Mifflin Company. Boston - Ny.

6 - Hughes - Hallett, D. and et. al. (1994). **Calculus: Harvard Project**. John Wiley & Sons, Inc.

7 - Jacobs, H. R. (1982). **Mathematics: A Human Endeavor**. (2nd Ed.) Freeman & company, Ny.

8 - Larson, R. E. & Hostetler, R. P. (1993). **Precalculus**. D. C. Heath & Company.

9 - National Council of Teachers of Mathematics (1996). Communication in Mathematics k -12 and Beyond: 1996 year Book. Reston, VA. Author.

10 - National Council of Teachers of Mathematics. (2000). **Principles and**

Standards for school. Reston, Va. Author.

11 - Skemp, R. R. (1978). Relational Understanding and Instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*. pp. 9-15.

12 - Spence, L. E & et al. (1990). **Applied Mathematics for the Management, Life, and Social Sciences**. Scott, Foresman / Little, Brown Higher Education.

۱۳- انگلیش، لین ووارن، الیزابت، (۱۳۷۷) معرفی مفهوم متغیر از طریق الگویابی. ترجمه سهیلا غلام‌آزاد. *مجله رشد آموزش ریاضی*. شماره ۵۴، زمستان ۱۳۷۷.

۱۴- بابلیان، اسماعیل و همکاران (۱۳۸۰)، ریاضیات ۲: نظری (رشته‌های علوم تجربی - ریاضی و فیزیک). *فنی و حرفه‌ای*. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۵- پیشاپ، آلن (۱۳۷۶). رابطه بین آموزش ریاضی و فرهنگ. ترجمه زهرا گویا. *مجله رشد آموزش ریاضی*، شماره ۵۰.

۱۶- توماس، جرج و فینی، راس (۱۹۸۸). *حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی: جلد اول*. ترجمه مهدی بهزاد و همکاران. (چاپ اول سال ۱۳۷۰ - ویرایش هفتم). مرکز نشر دانشگاهی.

۱۷- داریوش همدانی، حمیده و همکاران (۱۳۷۹). *مهارت‌های پایه ریاضی*. سال اول دبیرستان. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۱۸- غلام‌آزاد، سهیلا (۱۳۸۰). دوباره نگرى به برنامه جبر دبیرستانی، *مجله رشد آموزش ریاضی*. شماره ۶۳.

۱۹- گویا، زهرا و همکاران (چاپ ششم، ۱۳۷۹). *ریاضی پایه دوره پیش دانشگاهی رشته علوم انسانی*. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۲۰- گویا، زهرا (ترجمه) (۱۳۷۷). مرکز بین‌المللی مطالعه تیمز - کالج بوستون: سومین مطالعه بین‌المللی ریاضیات و علوم، *مجله رشد آموزش ریاضی*. شماره ۵۲، تابستان ۱۳۷۷.

۲۱- گویا، زهرا (۱۳۷۷)، روایت معلمان. *مجله رشد آموزش ریاضی*. شماره ۵۴، زمستان ۱۳۷۷.

