بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضیات ۲

سال دوم آموزش متوسطه

نظری (رشته‌های علوم تجربی ـ ریاضی و فیزیک) ـ
فنی و حرفه‌ای

۱۳۹۴

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : **دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطه نظری**

نام کتاب : **ریاضیات(۲) ـ ۲۳۴/۲**

اعضای شورای برنامه‌ریزی ریاضی : **بهمن اصلاح پذیر، علی ایرانمنش، ناصر بروجردیان، محسن جمالی، زین‌العابدین دهقانی ابیانه، اسدالله رضوی، حمیدرضا ربیعی، حسین رودسری، محمد هاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، احمد شاهورانی، وحید عالمیان، سعید قریشی، حمید مسگرانی، سید محمد کاظم نائینی، شهرناز بخشعلی زاده و مینو رحیمی**

مؤلفان : **علی ایرانمنش، محسن جمالی، حمید رضا ربیعی، ابراهیم ریحانی، احمد شاهورانی و وحید عالمیان**

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : **ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی**
تهران :خیابان ایرانشهرشمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهیدموسوی)
تلفن : ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،
وب سایت : www.chap.sch.ir

مدیر هنری و صفحه‌آرا : **مریم کیوان**

رسام : **هدیه بندار**

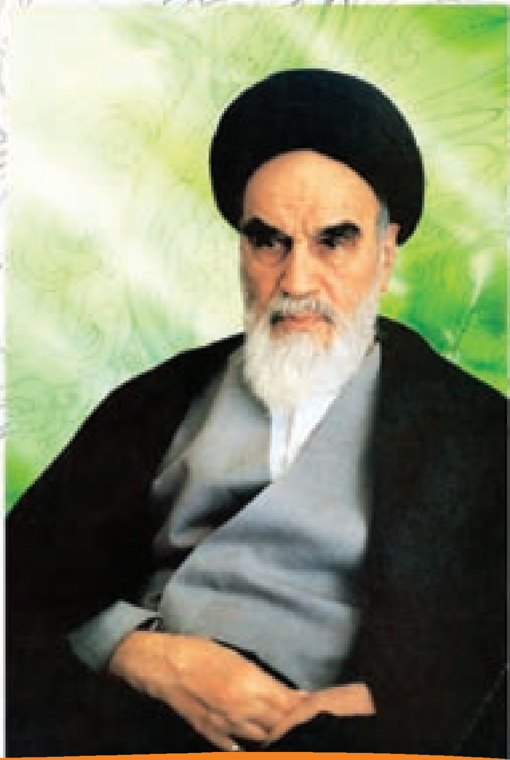
طراح جلد : **مریم کیوان**

ناشر : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران : تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادّهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (دارو پخش)**
تلفن : ۵ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۱۳۹ـ ۳۷۵۱۵

چاپخانه : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»**

سال انتشار و نوبت چاپ : **چاپ هفتم ۱۳۹۴**

ISBN 964 – 05 – 1707 – 0 شابک ۰-۱۷۰۷-۰۵-۹۶۴



- اساس همه‌ی شکست‌ها و پیروزی‌ها از خود آدم شروع می‌شود.
- انسان اساس پیروزی است و اساس شکست است.
- باور انسان اساس تمام امور است.

امام خمینی(ره)

فهرست

فصل ۱ــ الگو و دنباله

فصل ۲ــ تابع

فصل ۳ــ توابع خاص ـ نامعادله و تعیین علامت

فصل ۴ــ توابع نمایی و لگاریتمی

فصل ۵ ــ مثلثات

فصل ۶ــ ماتریس

فصل ۷ــ ترکیبیات

مقدمه

اندیشه‌ی ریاضی یکی از ابزارهای اساسی تفکر است و تقویت تفکر از اهداف برنامه‌های درسی و تربیتی ما است. ایجاد توانایی تفکر، بخش مهمّی از برنامه‌ی درسی است که در هر کتاب مورد توجه قرار می‌گیرد. اگر چه تفکر ریاضی تفکر تجریدی است ولی شهودی‌سازی ریاضی و توانایی به‌کارگیری ریاضی در حل مسائل روزمره از اهداف برنامه‌ی درسی است. باید به این نکته توجه داشت که بدون علم نمی‌توان جامعه‌ای مستقل، آزاد و سربلند به‌وجودآورد. ریاضیات در زمره علوم مفید و ضروری برای بشر به حساب می‌آید. به همین دلیل آموزش ریاضیات و فراگیری آن و به ویژه کتاب درسی دارای جایگاهی خاص است.
کتاب حاضر به گونه‌ای تدوین شده است که دانش‌آموز با درگیر شدن در فعالیت‌ها و تکالیف داده شده به تدریج به درک مناسبی از مفاهیم ریاضی برسد و صدالبته این کار بدون کمک و راهنمایی معلم امکان‌پذیر نمی‌باشد. برخی از ویژگی‌هایی که در تألیف این کتاب مدّنظر بوده‌اند، عبارتند از :

- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت‌های محاسبات صوری و درک مفهومی
- تأکید بر ارتباط بین ریاضیات و علوم دیگر و دنیای واقعی
- استفاده از مسائل پاسخ باز
- توجه به دانش قبلی دانش‌آموزان
- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه‌های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب
- استفاده از تجربیات عینی دانش‌آموز

مؤلفان به این نکته واقفند که موانع زیادی برای تحقق کامل اهداف نوین آموزشی وجود دارد. عدم توجه جدی و پشتیبانی در امر آموزش معلمان ریاضی ، شیوه‌های آموزشی نامناسب مرسوم و روند متداول کتاب‌های درسی در ارایه‌ی رویه‌ای از جمله این موانع‌اند. با این حال امید است که به همت همه‌ی اعضای جامعه آموزش ریاضی کشورمان و به ویژه دبیران محترم ریاضی ، با غلبه بر مشکلات موجود، حرکتی که با تألیف کتاب‌های ریاضی ۱ و ریاضی ۲ آغاز شده است را تکمیل کنیم و آن را استمرار و شتاب بخشیم .

در خاتمه از همه‌ی عزیزانی که نظرات مناسبی برای اصلاح کتاب ارایه کرده‌اند، اعضای شورای برنامه‌ریزی ریاضی ، گروه‌های ریاضی استان‌ها ، شرکت‌کنندگان در دوره‌های تأمین مدرس ، دبیران منتخب شهر تهران و انجمن معلمان ریاضی تقدیر و تشکر می‌نماییم .

مؤلفان

فصل ۱

الگو و دنباله

زیبایی تلفیق الگوی عددی و هندسی به‌کار رفته در این معماری ایرانی- اسلامی اوج مهارت و دقت خالق این اثر را تداعی می‌کند. آیا با تفکر در الگوی به‌کار رفته در نظام آفرینش به عظمت و قدرت خالق آن اندیشیده‌اید؟

مفهوم دنباله

آیا می‌دانید که قاره‌ها ابتدا به هم پیوسته بوده‌اند و یک خشکی بزرگ را تشکیل می‌دادند و در طول زمان با حرکت قسمت‌هایی از این خشکی بزرگ، قاره‌ها به وجود آمدند. براساس یک نظریه‌ی علمی، اندازه‌ی حرکت قاره‌ها در هر ۱ میلیون سال حدود ۱۹ کیلومتر و ۲۰۰ متر می‌باشد. آیا به این موضوع فکر کرده‌اید که ممکن است قاره‌ها دوباره به هم بپیوندند؟

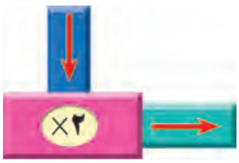
فرض کنیم قاره‌ها در هرسال حدود۲ سانتی‌متر حرکت می‌کنند. می‌خواهیم حرکت قاره‌ها را از سال جاری بررسی کنیم. جدول زیر اندازه حرکت قاره‌ها را در ۷ سال آینده نشان می‌دهد :

سال‌ها	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم
اندازه حرکت قاره‌ها بر حسب سانتی‌متر	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴

۱- جدول فوق را تا پایان سال دهم تکمیل کنید.

۲- در پایان چه سالی قاره‌ها به اندازه ۴۰ سانتی‌متر حرکت می‌کنند؟

۳- اعداد ۷ , ۶ , ۵ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱ را در داخل ماشین زیر قرار دهید و اعداد به دست آمده را با اعداد سطر دوم مقایسه کنید و نتیجه‌ی حاصل از مقایسه را بنویسید.



۴- نقاط نظیر جدول بالا را روی محورهای مختصات مشخص کنید.

۵- اگر بخواهیم اندازه‌ی حرکت قاره‌ها را بعد از یک میلیون سال به دست آوریم، چه راه حلی را پیشنهاد می‌کنید؟

اندازه حرکت قاره‌ها الگویی دارد که با استفاده از آن می‌توانیم حرکت آن‌ها را در سال‌های مختلف برآورد کنیم. نگاه آگاهانه و دقیق و یافتن الگوهای مهارتی، برای حل مسئله و به طور کلی کشف ایده‌های ریاضی در پدیده‌های واقعی ضرورت دارد. در روند پیدا کردن یک الگو، سازماندهی و تنظیم داده‌ها از اهمیت خاصی برخوردار است. در مثال حرکت قاره‌ها، اگر عدد هر سال را با نماد n و اندازه حرکت قاره‌ها را با نماد a_n نمایش دهیم، اطلاعات مربوط به این مثال را به شکل زیر می‌توانیم نمایش دهیم:

اندازه حرکت قاره‌ها بر حسب سانتی متر	عدد سال
$a_۱ = ۲\times۱$	۱
$a_۲ = ۲\times۲$	۲
$a_۳ = ۲\times۳$	۳
...	...
...	...
$\vdots$	$\vdots$
$a_n = ۲\times n$	n

با توجه به جدول بالا می‌بینیم که اندازه حرکت قاره‌ها پس از n سال، $۲n$ سانتی‌متر می‌باشد.

$۲n$ سانتی‌متر = اندازه حرکت قاره‌ها پس از n سال

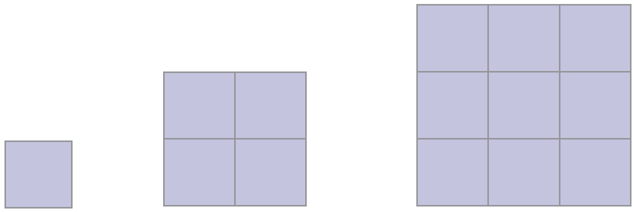
به عبارت دیگر $a_n = ۲n$. با استفاده از این تساوی می‌توانیم اندازه حرکت قاره‌ها را در سال‌های مختلف محاسبه کنیم.

اگر اندازه حرکت قاره‌ها را در سال‌های متوالی پشت سرهم بنویسیم، دنباله‌ای از اعداد به شکل زیر ساخته می‌شود:

$$۲, ۴, ۶, ۸, \ldots, ۲n, \ldots$$

اولین عدد در این دنباله، ۲ است و آن را جمله‌ی اول این دنباله می‌نامند. جملات بعدی این دنباله اعداد ۴ , ۶ , ۸ , ... هستند. nامین جمله این دنباله عدد $۲n$ است.

در فعالیت بعد دنباله‌ی دیگری از اعداد را بررسی می‌کنیم.



شماره‌ی ۳ شماره‌ی ۲ شماره‌ی ۱

با توجه به تغییرات شکل بالا در هر مرحله :

۱- جدولی تشکیل دهید که با استفاده از آن بتوان تعداد مربعات کوچک را تا شکل شماره‌ی ۶ پیدا کرد.

۲- رابطه‌ی بین شماره‌ی شکل و تعداد مربعات کوچک را حدس بزنید.

۳- تعداد مربعات کوچک در شکل‌ها را با فاصله پشت سر هم بنویسید.

۴- قانونی که الگوی بالا از آن پیروی می‌کند را به‌دست آورید و درستی آن را بررسی کنید.

۵- با استفاده از الگوی به دست آمده، سی‌امین عدد را پیدا کنید.

در فعالیت بالا اگر اعداد به دست آمده در هر مرحله را پشت سرهم بنویسیم، دنباله‌ای از اعداد به شکل زیر ساخته می‌شود :

$$۱, ۴, ۹, \dots , n^{۲} , \dots$$

جمله‌ی اول این دنباله عدد ۱ و جمله‌ی دوم آن عدد ۴ و جمله nام آن $n^{۲}$ است.

هر تعدادی از اعداد را که پشت سرهم نوشته باشیم، یک دنباله از اعداد می‌نامند.
به هر عدد که در یک دنباله قرار گرفته است، یک جمله‌ی آن دنباله گفته می شود.
جمله‌ی nام دنباله را که n یک عدد طبیعی دلخواه است، جمله‌ی عمومی دنباله می‌نامند.

در برخی از دنباله‌ها الگویی وجود دارد که بر اساس آن می‌توانیم جملات آن دنباله را تعیین کنیم.

مثال

... , ۸ , ۶ , ۴ , ۲ یک دنباله است که از اعداد زوج متوالی ساخته شده است. اگر جمله‌ی اول این دنباله را با $a_۱$ و جمله‌ی دوم را با $a_۲$ و به همین ترتیب جمله‌ی nام این دنباله را با a_n نشان دهیم، داریم :

$$a_۱ = ۲ \, , \; a_۲ = ۴ = ۲ \times ۲ \, , \; a_۳ = ۶ = ۲ \times ۳ \, , \; a_۴ = ۸ = ۲ \times ۴ \, , \ldots , \; a_n = ۲n$$

کار در کلاس

۱- با استفاده از چوب کبریت، سه شکل زیر ساخته شده است. تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته در شکل nام چند تا است؟

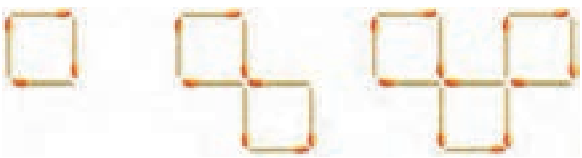
۲- ابتدا سه جمله‌ی بعدی هر یک از دنباله‌های زیر را پیدا کنید، سپس جمله‌ی nام آن را بنویسید.

الف) ... ,۱۷ ,۱۲ ,۷ ,۲

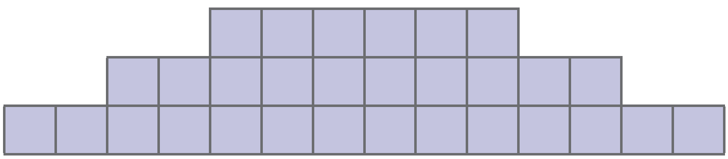
ب) $\frac{۱}{۴} , \frac{۱}{۲} , \frac{۳}{۴} , ۱ , ۱\frac{۱}{۴} , ۱\frac{۱}{۲} , \ldots$

تمرین

۱- با استفاده از چوب کبریت، سه شکل زیر ساخته شده است. تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته در شکل nام چند تا است؟



۲- شکل زیر سه ردیف از صندلی‌های یک سالن تئاتر را نشان می‌دهد. اگر تعداد صندلی‌های ردیف‌های بعدی از الگوی افزایش صندلی‌های این سه ردیف پیروی کنند، تعداد صندلی‌ها را تا ردیف هفتم به‌دست آورید :



۳- اگر جمله‌ی nام دنباله‌ای $a_n = ۳n$ باشد، با تشکیل یک جدول، چهار جمله‌ی اول آن را بنویسید.

۴- اگر یک مستطیل کاغذی را در هر مرحله با تا زدن نصف کنیم، تعداد مستطیل‌های به‌دست آمده در هر مرحله را در یک دنباله بنویسید. جمله‌ی عمومی این دنباله را بنویسید. (اولین مرحله با اولین تا زدن آغاز می‌شود).

۵- چهار جمله‌ی اول هر یک از دنباله‌های زیر که جمله‌ی عمومی آن‌ها داده شده است را بنویسید.

الف) $a_n = \frac{۲n}{n+۱}$ ب) $a_n = ۳n^۲ - \frac{۱}{n}$ ج) $a_n = ۲^n - n^۲$

۶- چهار دنباله و چهار جمله‌ی عمومی دنباله به‌صورت زیر داده شده است. مشخص کنید که هر جمله‌ی عمومی مربوط به کدام دنباله است.

$۱, \frac{۳}{۲}, \frac{۹}{۵}, \ldots$	$\frac{۳n}{n+۲}$
$۱, \frac{۴}{۳}, \frac{۳}{۲}, \ldots$	$(-۳)^{n-۱}$
$۱, -۳, ۹, \ldots$	$n^۲ + ۵n$
$۶, ۱۴, ۲۴, \ldots$	$۲n+۱$

۷- اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا $n + \frac{۱}{۲}$ می‌تواند قانون دنباله‌ی $\ldots, \frac{۵}{۶}, \frac{۳}{۴}, \frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۲}$ باشد؟ دلیل خود را بیان کنید.

۸- رضا اول هر هفته ۱۶۰۰ تومان پول توجیبی می‌گیرد و در کشوی میز خود می‌گذارد و تا آخر هر هفته نیمی از پول کشو را خرج می‌کند. اگر از قبل، پولی در کشو نباشد، رضا در پایان هفته‌ی اول چه‌قدر پول در کشو دارد؟ در پایان هفته‌ی دوم چه‌قدر پول در کشو دارد؟ در پایان هفته‌ی سوم چه‌قدر پول در کشو دارد؟ پول‌های رضا در پایان هر هفته را به صورت یک دنباله در نظر بگیرید و چهار جمله‌ی اول این دنباله را بنویسید. بین جمله‌ی nام و جمله‌ی n+۱ام این دنباله چه رابطه‌ای وجود دارد؟

دنباله‌ی حسابی

یک بازیکن فوتبال در هنگام بازی صدمه می‌بیند و مجبور می‌شود زانوی پای خود را عمل کند. بعد از عمل، پزشک معالج به او پیشنهاد می‌کند در هفته‌ی اول روزی ۱۲ دقیقه بدود و هر هفته ۳ دقیقه به زمان دویدن روزانه‌ی خود اضافه کند. هنگامی که زمان دویدن او به ۱۳۸ دقیقه در روز برسد، می‌تواند برای تیم خود بازی کند.

علی که از علاقه‌مندان این بازیکن می‌باشد، می‌خواهد بداند که این بازیکن بعد از چند هفته می‌تواند بازی کند. علی جدولی به صورت زیر تشکیل داد تا بتواند قانون حاکم بر الگوی جدول را به‌دست آورد. او تعداد هفته‌ها را با n و زمان دویدن در هفته‌ی nام را با a_n نشان داده است.

هفته‌ها	۱	۲	۳	۴
زمان دویدن روزانه	$a_{۱}=۱۲$	$a_{۲}=۱۲+۳=۱۵$	$a_{۳}=۱۵+۳=۱۸$	$a_{۴}=۱۸+۳=۲۱$

فعالیت

۱- به علی کمک کنید تا جدول را برای هفت هفته کامل کند.

۲- چه رابطه‌ای بین زمان دویدن در هر دو هفته‌ی متوالی وجود دارد؟

۳- جمله‌ی nام را بر حسب جمله‌ی اول و n بنویسید.

۴- با به‌دست آوردن قانون حاکم بر الگوی فوق، بگویید که این بازیکن بعد از طی چند هفته می‌تواند بازی کند؟

۵- اگر این بازیکن هر هفته ۶ دقیقه مدت زمان دویدن خود را افزایش می‌داد بعد از طی چه مدتی می‌توانست بازی کند؟

در فعالیت بالا با تشکیل دنباله‌ی نشان‌دهنده‌ی میزان دویدن این بازیکن در هر هفته، دیده می‌شود که میزان افزایش بین هر دوجمله‌ی متوالی مقداری ثابت است.

دنباله هایی که هرجمله‌ی آن (غیر از جمله‌ی اول) از افزودن یک مقدار ثابت به جمله‌ی قبلی به دست می‌آید را دنباله‌ی حسابی می‌نامیم و به این مقدار ثابت قدر نسبت دنباله می‌گوئیم.

اگر اولین جمله‌ی یک دنباله‌ی حسابی a و قدر نسبت این دنباله d باشد، جملات این دنباله به شکل زیر خواهند بود:

$$a \text{ و } a+d \text{ و } a+۲d \text{ و } \dots \text{ و } a+(n-۱)d \text{ و } \dots$$

جمله‌ی nام این دنباله $a+(n-۱)d$ است.

در فعالیت قبل، دنباله‌ی به‌دست آمده، یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۳ است.

مثال

۱- ماشینی با سرعت ثابت ۷۰ کیلومتر در ساعت حرکت می‌کند و در حال دور شدن از شهر کرمان است. این ماشین در شروع حرکت ۱۵ کیلو متر با کرمان فاصله دارد. اگر فاصله‌ی این ماشین تا شهر کرمان را در پایان ساعت اول و دوم و سوم و چهارم بنویسیم، دنباله‌ای به صورت زیر تشکیل می‌شود:

۸۵, ۱۵۵, ۲۲۵, ۲۹۵

این دنباله یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۸۵ و قدر نسبت ۷۰ است.

۲- شمعی ۲۵ سانتی‌متری را روشن کرده‌ایم. این شمع در هر دقیقه ۲ میلی‌متر کوتاه می‌شود. طول این شمع با گذشت زمان پس از هر دقیقه که می‌گذرد یک دنباله از اعداد به صورت زیر تشکیل می‌دهد.

۲۴/۸ , ۲۴/۶ , ۲۴/۴ , ...

این یک دنباله‌ی حسابی است و هر جمله از این دنباله با اضافه کردن عدد ۰/۲- به جمله‌ی قبلی به‌دست می‌آید. پس این یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۲۴/۸ و قدر نسبت ۰/۲- است.

در دنباله‌ی حسابی، اگر قدرنسبت، مثبت باشد، جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی افزایش می‌یابند و اگر قدرنسبت منفی باشد، جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی کاهش می‌یابند.

مثال

۱- ... , ۱۴ , ۱۱ , ۸ , ۵ , ۲ یک دنباله‌ی حسابی است. در این دنباله داریم: $a=۲$ و $d=۳$
جملات این دنباله در حال افزایش هستند و جمله‌ی nام این دنباله عبارت است از:

$$a_n = ۲+۳(n-۱) = ۳n-۱$$

۲- .... , ۱- , $-\frac{۱}{۲}$, ۰ , $\frac{۱}{۲}$, ۱ یک دنباله‌ی حسابی است. در این دنباله داریم: $a=۱$ و $d=-\frac{۱}{۲}$. جملات این دنباله در حال کاهش هستند و جمله‌ی nام این دنباله عبارت است از:

$$a_n = ۱+(-\frac{۱}{۲})\times(n-۱) = ۱-\frac{n}{۲}+\frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲}-\frac{n}{۲}$$

شیر آبی در هر دقیقه ۳/۵ لیتر آب وارد یک حوض می کند. اگر این حوض از ابتدا ۲۵ لیتر آب داشته باشد، مقدار آب حوض را پس از گذشت یک ، دو ، سه ، چهار و پنج دقیقه در یک دنباله بنویسید . آیا این یک دنباله‌ی حسابی است؟ چرا؟ پس از گذشت چند دقیقه آب این حوض ۱۰۲ لیتر می‌شود؟

۱- با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از دنباله‌های زیر حسابی هستند؟ سپس الگوی ساختن هر دنباله را پیدا کنید.

الف) $۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۵}, \ldots$ ب) $-۱۵, -۱۸, -۲۱, -۲۴$

ج) $\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \frac{۴}{۵}, \frac{۵}{۶}$ د) $۰, \sqrt{۳}, ۲\sqrt{۳}, ۳\sqrt{۳}, ۴\sqrt{۳}, \ldots$

۲- اگر دو جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی ۱۰ و ۳ باشند، سه جمله‌ی بعدی این دنباله را بنویسید. (چند دنباله وجود دارد؟)

۳- در دنباله‌ی حسابی $a_۱, a_۲, a_۳, \ldots, a_n, \ldots$ نشان دهید $a_n - a_{n-۱}$ مقدار ثابتی است. این مقدار ثابت چه عددی را نشان می‌دهد؟

۴- اگر در جملات یک دنباله‌ی حسابی، اول عدد $\frac{۱}{۳}$ و بعد عدد $\frac{۱}{۴}$ قرار گرفته باشند، جمله‌ی قبل از $\frac{۱}{۳}$ را بنویسید.

۵- اگر x و y و z به ترتیب جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، نشان دهید : $y = \frac{۱}{۲}(x+z)$

۶- اگر جمله‌ی پنجم یک دنباله‌ی حسابی ۱۷ و جمله‌ی دوازدهم آن ۵۲ باشد، جمله‌ی عمومی این دنباله را به‌دست آورید.

۷- دنباله‌ی زیر به ازای چه مقداری از x ، یک دنباله‌ی حسابی خواهد بود :

$۱-x\ ,\ ۲+x\ ,\ ۱+۲x$

۸- نشان دهید که اگر جملات یک دنباله‌ی حسابی را در عددی ضرب کنیم، دنباله‌ی جدید نیز یک دنباله‌ی حسابی است.

۹- اگر زاویه‌های مثلثی را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و یک دنباله‌ی حسابی تشکیل شود، نشان دهید که یکی از زاویه‌های این مثلث ۶۰ درجه است.

۱۰- مثلث قائم الزاویه‌ای ارائه کنید که طول ضلع کوچک آن ۱ باشد و اگر طول اضلاع آن را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم یک دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند. اگر طول ضلع کوچک این مثلث a باشد، طول بقیه‌ی اضلاع را بر حسب a حساب کنید.

دنباله‌ی هندسی

یکی از بازی‌های دوران کودکی به هوا انداختن توپ بود که در آن بارها شاهد به زمین خوردن و دوباره به هوا رفتن آن بوده‌ایم و احتمالاً تعداد دفعات زمین خوردن و به هوا رفتن توپ برایمان جالب بوده است. اکنون که بزرگ‌تر شده‌ایم، می‌توانیم با توصیف ریاضی این بالا و پایین رفتن‌های توپ، درک عمیق‌تری از آن به‌دست آوریم.

توپی در اختیار داریم که هرگاه آن را از ارتفاعی به زمین رها کنیم در برخورد با زمین مقداری از انرژی خود را از دست می‌دهد و در هر برگشت به بالا به ۶۰ درصد ارتفاع قبلی خود بر می‌گردد.

۱- این توپ را از ارتفاع ۲۵ متری رها می‌کنیم. میزان ارتفاعی که توپ پس از اولین و دومین و سومین برخورد با زمین به بالا می‌آید را بنویسید.

۲- هر جمله‌ی این دنباله با جمله‌ی قبلی چه رابطه‌ای دارد؟

۳- پس از n برخورد با زمین، توپ تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

۴- آیا این دنباله یک دنباله‌ی حسابی است؟

دنباله‌هایی که هر جمله‌ی آن (غیر از جمله‌ی اول) با ضرب یک مقدار ثابت در جمله‌ی قبلی به دست می‌آیند را دنباله‌ی هندسی می‌نامند.

مثال

هر کدام از دنباله‌های زیر یک دنباله‌ی هندسی هستند. در هر کدام از آن‌ها هر جمله (غیر از جمله‌ی اول) با ضرب عددی معین در جمله‌ی قبلی ساخته شده است.

الف) $۳ , ۶ , ۱۲ , ۲۴ , ۴۸$

ب) $۱ , \sqrt{۵} , ۵ , ۵\sqrt{۵} , ۲۵$

ج) $۲ , \frac{۲}{۳} , \frac{۲}{۹} , \frac{۲}{۲۷}$

د) $۱ , -۱ , ۱ , -۱$

کار در کلاس

۱- وقتی می‌گویند در یک کشور نرخ رشد سالیانه‌ی جمعیت ۳ درصد است، یعنی جمعیت آن کشور در هر سال به میزان ۳ درصد جمعیت سال قبل، افزایش می‌یابد. فرض کنید یک کشور ۵۰ میلیون نفر جمعیت دارد و نرخ رشد سالیانه‌ی جمعیت آن ۳ درصد است.

الف) جمعیت سال دوم چند برابر جمعیت سال اول است؟ جمعیت سال سوم چند برابر جمعیت سال دوم است؟

ب) جمعیت این کشور را در سال‌های اول تا پنجم بنویسید. (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)

ج) این دنباله یک دنباله‌ی حسابی یا یک دنباله‌ی هندسی است؟

د) جمعیت این کشور پس از گذشت n سال چه‌قدر خواهد بود؟

۲- کدام یک از دنباله‌های زیر دنباله‌های هندسی هستند؟ دلیل خود را ارائه کنید.

الف) $۵ , ۵ , ۵ , ۵ , ۵ , \ldots$

ب) $-۱ , ۲ , -۴ , ۸ , -۱۶ , \ldots$

ج) $۲ , ۴ , ۶ , ۸ , \ldots$

د) $۱-\pi , ۱-\pi^{۲} , (۱-\pi^{۲})(۱+\pi) , \ldots$

در یک دنباله‌ی هندسی، هر جمله (غیر از جمله‌ی اول) با ضرب یک مقدار ثابت مانند q در جمله‌ی قبلی به دست می‌آید. q را قدر نسبت این دنباله می نامند. اگر اولین جمله‌ی یک دنباله‌ی هندسی a و قدر نسبت آن q باشد، جملات این دنباله به شکل زیر خواهند بود:

$$a\ ,aq\ ,aq^{۲},aq^{۳},\dots,aq^{n-۱},\dots$$

جمله‌ی nام این دنباله $aq^{n-۱}$ است.

ازجمله دانشمندان ایرانی و مسلمان که به معرفی دنباله‌ی هندسی و به کارگیری آن پرداخته‌اند، ابوریحان بیرونی بوده است که در کتاب «راشیکات» به بحث راجع به آن پرداخته‌اند.

۱- اگر یکی از جملات یک دنباله‌ی هندسی ۵ و جمله‌ی بعدی آن ۱- باشد، سه جمله‌ی بعدی این دنباله را بنویسید.

۲- اگر یکی از جملات یک دنباله‌ی هندسی ۳ و جمله‌ی بعدی ۴ باشد، جمله‌ی قبل از ۳ را بنویسید.

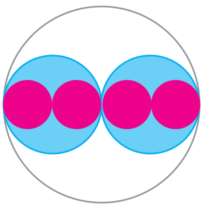
۳- اگر دو جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی به‌ترتیب a $(a \neq ۰)$ و b باشند، جمله‌ی بعد از b چه خواهد بود؟

۴- اگر x و y و z به ترتیب جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، نشان دهید: $y^{۲} = xz$.

۵- اگر جمله‌ی چهارم یک دنباله‌ی هندسی ۱ و جمله‌ی هفتم آن ۸ باشد، جمله‌ی عمومی این دنباله را بنویسید.

۶- در دنباله‌ی زیر عدد x را طوری تعیین کنید تا این دنباله یک دنباله‌ی هندسی شود. مسئله چند جواب دارد؟

$$۱-x\ ,\ x\ ,\ ۱+x$$



۷- اگر مساحت یک دایره برابر $S_۱$ و داخل آن دو دایره به شکل روبرو رسم کنیم و مجموع مساحت آن‌ها را $S_۲$ بنامیم، با تکرار این عملیات دنباله‌ی $\dots S_۱, S_۲, \dots, S_n,$ ساخته می‌شود.

جمله‌ی عمومی این دنباله را به‌دست آورید و نشان دهید این یک دنباله‌ی هندسی است.

۸– اگر جملات یک دنباله‌ی هندسی را در عددی ضرب کنیم، نشان دهید دنباله‌ی حاصل نیز یک دنباله‌ی هندسی است.

۹– اگر جملات یک دنباله‌ی هندسی را به توان ۲ برسانیم، نشان دهید دنباله‌ی حاصل نیز یک دنباله‌ی هندسی است.

۱۰– آیا یک دنباله می‌تواند هم یک دنباله‌ی هندسی باشد و هم یک دنباله‌ی عددی؟ توضیح دهید.

۱۱– اگر $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ یک دنباله‌ی هندسی باشد و $a_1 a_3 = 4$ و $a_3 a_5 = 16$ جمله‌ی اول و قدر نسبت این دنباله‌ی هندسی را بیابید.

نزدیک شدن جملات یک دنباله به یک عدد

دنباله‌های حسابی و هندسی دسته‌ی خاصی از دنباله‌ها هستند. در حالت کلی جمله‌ی عمومی یک دنباله می‌تواند شکل‌های مختلفی داشته باشد. برخی دنباله‌ها به گونه‌ای هستند که اگر به جملات آن‌ها نگاه کنیم، متوجه می‌شویم که این جملات به عدد خاصی نزدیک می‌شوند.

۱– در تقسیم ۱ بر ۳ خارج قسمت را تا ۱ رقم اعشار و ۲ رقم اعشار و ۳ رقم اعشار و ۴ رقم اعشار به دست آورید.

۲– خارج قسمت تقسیم‌های فوق را در یک دنباله بنویسید.

۳– چه الگویی در جملات این دنباله وجود دارد؟ جمله‌ی ششم این دنباله چیست؟

۴– تفاضل شش جمله‌ی اول این دنباله را از $\frac{1}{3}$ حساب کنید و دنباله‌ی این تفاضل‌ها را تشکیل دهید.

۵– چه الگویی در جملات دنباله‌ی تفاضل‌ها مشاهده می‌کنید؟ جملات دنباله‌ی تفاضل‌ها به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

۶– جملات دنباله‌ی اصلی از خارج قسمت‌ها به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

اگر جملات دنباله‌ای را از یک عدد معین کم کنیم و جملات حاصل، به صفر نزدیک شوند، گوییم جملات آن دنباله به آن عدد نزدیک می‌شوند.

مثال

در تقسیم ۲ بر ۳، خارج قسمت‌ها از ۱ رقم تا n رقم اعشار دنباله‌ی زیر را تشکیل می‌دهند.

$$۰/۶\ ,\ ۰/۶۶\ ,\ ۰/۶۶۶, \ldots\ ,\ ۰/۶\ldots۶\ ,\ \ldots.$$

تفاضل جملات این دنباله از $\frac{۲}{۳}$ به شکل زیر است :

$$\frac{۲}{۳}-۰/۶=\frac{۲}{۳}-\frac{۶}{۱۰}=\frac{۲۰-۱۸}{۳۰}=\frac{۲}{۳۰}=\frac{۰/۲}{۳}$$

$$\frac{۲}{۳}-۰/۶۶=\frac{۲}{۳}-\frac{۶۶}{۱۰۰}=\frac{۲۰۰-۱۹۸}{۳۰۰}=\frac{۲}{۳۰۰}=\frac{۰/۰۲}{۳}$$

$$\frac{۲}{۳}-۰/۶۶۶=\frac{۲}{۳}-\frac{۶۶۶}{۱۰۰۰}=\frac{۲۰۰۰-۱۹۹۸}{۳۰۰۰}=\frac{۲}{۳۰۰۰}=\frac{۰/۰۰۲}{۳}$$

$$\frac{۲}{۳}-۰/۶۶۶۶=\frac{۲}{۳}-\frac{۶۶۶۶}{۱۰۰۰۰}=\frac{۲۰۰۰۰-۱۹۹۹۸}{۳۰۰۰۰}=\frac{۲}{۳۰۰۰۰}=\frac{۰/۰۰۰۲}{۳}$$

دنباله‌ی تفاضل به شکل زیر است :

$$\frac{۰/۲}{۳}\ ,\ \frac{۰/۰۲}{۳}\ ,\ \frac{۰/۰۰۲}{۳}\ ,\ \frac{۰/۰۰۰۲}{۳}\ ,\ \ldots.$$

همان طور که دیده می‌شود، جملات دنباله‌ی تفاضل به صفر نزدیک می‌شوند. پس جملات خود دنباله به $\frac{۲}{۳}$ نزدیک می‌شوند.

مثال

جملات یک دنباله‌ی ثابت مانند : $a\,,a\,,a\,,\ldots a\,,\ldots$ به همان مقدار ثابت دنباله نزدیک می‌شوند.

در این حالت خاص، جملات دنباله دقیقاً برابر همان عددی هستند که به آن نزدیک می‌شوند.

با تقسیم ۱ بر ۹ خارج قسمت‌های به‌دست آمده در هر مرحله را در یک دنباله بنویسید. این دنباله به چه عددی نزدیک می‌شود؟ دلیل خود را ارائه دهید.

دنباله‌ی تقریبات اعشاری

در بخش قبل دیدیم که برای هر عدد گویای $\frac{a}{b}$ با انجام عمل تقسیم a بر b و نوشتن اعدادی که در خارج قسمت به‌دست می‌آیند، دنباله‌ای از اعداد اعشاری می‌توان ساخت که جملات آن به عدد

گویای $\frac{a}{b}$ نزدیک می‌شوند.

در فعالیت زیر خواهیم دید که چگونه می‌توانیم برای هر عدد حقیقی(گویا یا گنگ)، دنباله‌ای از اعداد اعشاری به دست آوریم که جملات آن رفته رفته به آن عدد نزدیک می‌شوند.

فعالیت

فرض کنید x عددی بین ۰ و ۱ باشد. مثلاً : $x = \frac{۳}{۷}$ ، شما عدد دیگری را در نظر بگیرید.

۱- روی محور اعداد، فاصله‌ی بین نقاط متناظر ۰ و ۱ را به ده قسمت مساوی تقسیم کنید. اعداد متناظر این نقاط جدید را به صورت اعداد اعشاری بنویسید. x بین کدام‌یک از این اعداد قرار می‌گیرد؟ برای عدد $\frac{۳}{۷}$ داریم : $۰/۴ < \frac{۳}{۷} < ۰/۵$.

۲- با بزرگ‌نمایی فاصله‌ی بین نقاط متناظر دو عدد قسمت بالا که x بین آن‌ها بوده است این فاصله را به ده قسمت مساوی تقسیم کنید. اعداد متناظر این نقاط جدید را به صورت اعداد اعشاری بنویسید. x بین کدام‌یک از این اعداد قرار می‌گیرد؟

در مورد عدد $\frac{۳}{۷}$ این عدد بین ۰/۴ و ۰/۵ بوده است و پس از رسم بزرگ‌تر این فاصله و تقسیم آن به ده قسمت مساوی داریم : $۰/۴۲ < \frac{۳}{۷} < ۰/۴۳$.

۳- با بزرگ‌نمایی فاصله‌ی بین نقاط متناظر دو عدد قسمت بالا که x بین آن‌ها بوده است این فاصله را به ده قسمت مساوی تقسیم کنید. اعداد متناظر این نقاط جدید را به صورت اعداد اعشاری بنویسید. x بین کدام‌یک از این اعداد قرار می‌گیرد؟

در مورد عدد $\frac{۳}{۷}$ این عدد بین ۰/۴۲ و ۰/۴۳ بوده است و پس از رسم بزرگ‌تر این فاصله و تقسیم آن به ده قسمت مساوی داریم : $۰/۴۲۸ < \frac{۳}{۷} < ۰/۴۲۹$.

با تکرار مراحل فعالیت بالا در هر مرحله اعدادی اعشاری به‌دست می‌آیند و دنباله‌ای تشکیل می‌دهند که به عدد انتخاب شده نزدیک می‌شوند. در مورد عدد $\frac{۳}{۷}$ این دنباله به شکل زیر است.

۰/۴ , ۰/۴۲ , ۰/۴۲۸ , ۰/۴۲۸۵ , ...

برای هر عدد حقیقی مثبت x می‌توان دنباله‌ای از اعداد اعشاری ساخت که جملات آن به x نزدیک می‌شوند. جمله‌ی nام این دنباله یک عدد اعشاری با n رقم اعشار است و هر جمله‌ی آن با اضافه شدن یک رقم اعشار به جمله‌ی قبلی به دست می‌آید. این دنباله را دنباله‌ی تقریبات اعشاری x می‌نامند و جمله‌ی nام آن را تقریب اعشاری x با n رقم اعشار می‌نامند.

مثال

با تقسیم ۱۱ بر ۶ در خارج قسمت به ترتیب اعداد زیر ساخته می‌شوند که دنباله‌ی تقریبات اعشاری $\frac{۱۱}{۶}$ است.

۱/۸ و ۱/۸۳ و۱/۸۳۳ و ۱/۸۳۳۳ و ...

مسائل

۱– در مورد هر یک از دنباله‌های زیر حدس بزنید جملات این دنباله‌ها به چه عددی نزدیک می‌شوند و با تشکیل دنباله ی تفاضل حدس خود را بیازمایید.

الف) ۰/۹,۰/۹۹,۰/۹۹۹,...

ب) ۲/۹,۲/۹۹,۲/۹۹۹,...

ج) ۵/۰۵ , ۵/۰۰۵ , ۵/۰۰۰۵ ,...

د) ۱/۱۹,۱/۱۹۹,۱/۱۹۹۹,...

۲– در چه حالتی جملات یک دنباله‌ی حسابی به عدد خاصی نزدیک خواهند شد؟

۳– اگر قدر نسبت یک دنباله‌ی هندسی عددی بزرگ‌تر از ۱ باشد و جمله‌ی اول آن صفر نباشد، توضیح دهید که چرا جملات این دنباله به عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند؟

۴– اگر قدر نسبت یک دنباله‌ی هندسی برابر ۱ باشد، جملات این دنباله به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

۵– اگر x عددی باشد که در نامعادلات زیر صدق می‌کند، چهار جمله‌ی اول دنباله‌ی تقریبات اعشاری آن را بنویسید.

$$۲x+۱<۸/۱۳۱۶ \quad , \quad ۴-x<۰/۴۳۴۳$$

۶– دو جمله‌ی اول تقریبات اعشاری $\sqrt{۲}$ را با استفاده از روش فعالیت این بخش بنویسید.

ریشه گیری اعداد حقیقی

در سال گذشته با ریشه‌های دوم و سوم اعداد حقیقی آشنا شدیم. فرض کنید k یک عدد طبیعی بزرگ‌تر یا مساوی ۲ باشد.

عدد حقیقی b را یک ریشه‌ی kام عدد حقیقی a نامیم هرگاه: $b^k = a$

مثال

۱- عدد ۴ یک ریشه‌ی سوم ۶۴ است، زیرا $۶۴ = ۴^۳$. همچنین عدد ۲ یک ریشه‌ی چهارم ۱۶ است زیرا $۱۶ = ۲^۴$.

۲- عدد (۲-) یک ریشه‌ی پنجم ۳۲- است، زیرا $-۳۲ = (-۲)^۵$.

اگر k زوج باشد، فقط اعداد نامنفی ریشه kام دارند(چرا؟) و اگر b یک ریشه‌ی kام عدد نامنفی a باشد، آنگاه $-b$ نیز یک ریشه‌ی kام a است، زیرا $(-b)^k = b^k = a$.

برای kهای زوج، آن ریشه‌ی kام عدد نامنفی a که نامنفی است را با $\sqrt[k]{a}$ نشان می‌دهند.

۳- $\sqrt[k]{۱} = ۱$, $\sqrt[k]{۰} = ۰$, $\sqrt[۴]{۸۱} = ۳$, $\sqrt[۴]{۱۶} = ۲$, $\sqrt[۴]{۱۶} \neq -۲$

برای k های فرد هر عددی، مثبت یا منفی، مانند a ریشه‌ی kام دارد و فقط یک ریشه‌ی kام دارد که با $\sqrt[k]{a}$ نشان می‌دهند. برای kهای فرد، علامت $\sqrt[k]{a}$ و علامت a یکی است. (چرا؟)

۴- (k فرد است) $\sqrt[k]{-۱} = -۱$, $\sqrt[۵]{-۳۲} = -۲$

توجه داشته باشید که ریشه kام یک عدد مانند a را که با $\sqrt[k]{a}$ نشان داده‌ایم، عددی است که اگر به توان k برسد برابر a می‌شود، پس $(\sqrt[k]{a})^k = a$.

علامت‌گذاری $\sqrt[k]{a}$ در حالتی که a منفی و k زوج باشد معنا ندارد و هر وقت از این علامت استفاده کنیم به طور ضمنی فرض بر آن است که اگر k زوج باشد a نامنفی است.

فعالیت

۱- فرض کنید k یک عدد طبیعی فرد است. توان kام چه عددی برابر a^k است. نتیجه بگیرید :

$$\sqrt[k]{a^k} = a$$

۲- فرض کنید k یک عدد طبیعی زوج است. توان kام چه اعدادی برابر a^k است؟ توان kام چه عدد مثبتی برابر a^k است. نتیجه بگیرید : $\sqrt[k]{a^k} = |a|$.

۳- بنا به تعریف دیدیم : $(\sqrt[k]{a})^k = a$. مقدار $(\sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b})^k$ را حساب کنید و نتیجه بگیرید :

$$\sqrt[k]{ab} = \sqrt[k]{a}\sqrt[k]{b}$$

۴- از تساوی بالا استفاده کنید و نشان دهید : $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$.

۵- دلیل درستی تساوی‌های زیر را بیان کنید.

$$(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^{nk} = ((\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^n)^k = (\sqrt[k]{a})^k = a$$

از این تساوی‌ها نتیجه بگیرید : $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

مثال

الف) $\sqrt[۳]{۶} = \sqrt[۳]{۲\times ۳} = \sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۳]{۳}$

ب) $\sqrt[۶]{۸} = \sqrt{\sqrt[۳]{۸}} = \sqrt{۲}$

توان‌رسانی با توان اعداد گویا

پدر محمد یک زیست‌شناس است و در آزمایشگاه روی باکتری‌ها کار می‌کند. در یک آزمایش کشت یک نوع باکتری، دیده شد که در شرایط مساعد وزن این باکتری‌ها در هر ساعت ۲ برابر می‌شود.

بنابراین اگر با ۱ گرم باکتری شروع کنیم، در پایان ساعت اول، دوم، ... ، nام، وزن باکتری‌ها را می‌توانیم از دنباله‌ی زیر پیدا کنیم.

$$۲^۱, ۲^۲, ۲^۳, \ldots , ۲^n$$

محمد از پدرش پرسید : آیا باید حتماً تا پایان ساعت منتظر شویم؟ آیا می‌توانیم وزن باکتری‌ها را

پس از نیم ساعت هم پیدا کنیم؟

پدر محمد گفت : تو فکر می‌کنی پس از نیم ساعت وزن باکتری‌ها چه‌قدر شده باشد؟

محمد گفت : حدس می‌زنم وزن آن‌ها $۲^{\frac{۱}{۲}}$ گرم شده باشد.

پدر محمد گفت : $۲^{\frac{۱}{۲}}$ چه‌قدر است؟

محمد گفت : نمی‌دانم ولی باید بتوانیم مقدار آن را بیابیم. اگر فرض کنیم در هر نیم‌ساعت وزن باکتری‌ها b برابر شود، در این صورت بعد از یک ساعت وزن باکتری‌ها برابر $b \times b = b^۲$ می‌شود. از طرفی پس از یک ساعت باکتری‌ها دو برابر می‌شوند؛ پس $b^۲ = ۲$. بنابراین $b = \sqrt{۲}$ (زیرا b مثبت است)، پس : $۲^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۲}$.

فعالیت

۱– با تکرار روش مشابه چه مقداری برای $۲^{\frac{۱}{۳}}$ به دست می‌آورید؟

۲– با تکرار روش مشابه چه مقداری برای $۲^{\frac{۱}{n}}$ به دست می‌آورید؟

۳– اگر باکتری‌ها در هر ساعت ۳ برابر می‌شدند، و با ۱ گرم باکتری شروع می‌کردیم، وزن باکتری‌ها پس از نیم ساعت چه‌قدر می‌شد؟

۴– با روش‌های مشابه چه مقداری را برای $۳^{\frac{۱}{۲}}$ و $۳^{\frac{۱}{n}}$ به دست می‌آورید؟

۵– اگر a عددی مثبت و n یک عدد طبیعی باشد، چه مقداری را برای $a^{\frac{1}{n}}$ پیشنهاد می‌کنید؟

۶– اگر a عددی مثبت و n یک عدد طبیعی و p یک عدد صحیح باشد، چه مقداری را برای $a^{\frac{p}{n}}$ پیشنهاد می‌کنید؟

فعالیت بالا نشان می‌دهد که برای یک عدد حقیقی مثبت a و عدد گویای $r = \frac{p}{n}$ که p عددی صحیح و n یک عدد طبیعی است، a^r که توان rام a نام دارد، به شکل زیر تعریف می‌شود :

$$a^r = a^{\frac{p}{n}} = (\sqrt[n]{a})^p$$

مثال

۱- $4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt[2]{4})^{3} = 2^{3} = 8$

۲- $6^{-\frac{1}{2}} = (\sqrt[2]{6})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

۳- $\sqrt{2}^{\frac{3}{5}} = (\sqrt[5]{\sqrt{2}})^{3} = \sqrt[10]{2^{3}} = \sqrt[10]{8}$

۱- هر یک از اعداد $\sqrt{2}$ و $\sqrt[4]{2^{2}}$ و $\sqrt[6]{2^{3}}$ را با استفاده از تعریف توان رسانی به توان اعداد گویا حساب کنید و پس از ساده کردن، نتیجه بگیرید که همگی آن‌ها با هم برابرند.

۲- اگر p یک عدد صحیح و n یک عدد طبیعی باشد، برای یک عدد طبیعی k داریم $\frac{p}{n} = \frac{kp}{kn}$ با استفاده از تعریف توان رسانی با توان اعداد گویا با محاسبه‌ی هریک از توان‌رسانی‌های داده شده پس از ساده کردن نتیجه بگیرید : $a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{kp}{kn}}$ $(a>0)$

قوانین توان‌رسانی توان‌های صحیح برای توان‌های گویا نیز برقرار است. در زیر a و b دو عدد حقیقی مثبت و r و s دو عدد گویا هستند.

$$a^{r+s} = a^{r}a^{s}$$

$$(a^{r})^{s} = a^{rs}$$

$$(ab)^{r} = a^{r}b^{r}$$

با نوشتن r و s به صورت تقسیم یک عدد صحیح بر یک عدد طبیعی و استفاده از تعریف توان‌رسانی به توان اعداد گویا و استفاده از روابط ریشه‌گیری درستی این تساوی‌ها را می‌توان به‌دست آورد.

مثال

الف) $۵^{\frac{۷}{۶}} = ۵^{۱+\frac{۱}{۶}} = ۵\times ۵^{\frac{۱}{۶}} = ۵\sqrt[۶]{۵}$

ب) $(\sqrt{۲})^{\frac{۳}{۲}} = (۲^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۳}{۲}} = ۲^{\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}} = ۲^{\frac{۳}{۴}} = (\sqrt[۴]{۲})^{۳} = \sqrt[۴]{۸}$

ج) $۸^{\frac{۱}{۲}} = (۴\times ۲)^{\frac{۱}{۲}} = ۴^{\frac{۱}{۲}}\times ۲^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۴}\times\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲}$

مسئله

۱- برای هر عدد گویای r نشان دهید : $۱^{r} = ۱$.

۲- برای هر عدد گویای r و عدد حقیقی مثبت a نشان دهید : $a^{-r} = \frac{۱}{a^{r}}$.

۳- عدد $\sqrt[۱۲]{۶۴}$ را به صورت یک عدد رادیکالی با فرجه‌ی ۳ بنویسید.

۴- ریشه‌گیری‌های زیر را بر حسب توان‌های گویا بنویسید و پس از ساده کردن مجدداً بر حسب ریشه‌گیری بنویسید.

الف) $\sqrt[۴]{۵\sqrt[۳]{۵}}$ ب) $\sqrt[۶]{\sqrt[۳]{۷}\times\sqrt[۳]{۱۴}}$ ج) $\sqrt[۵]{۴}\div\sqrt[۸]{۸}$

۵- برای هر عدد حقیقی مثبت a و اعداد طبیعی m و n درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$$

۶- فرض کنید a عددی بزرگ‌تر از ۱ باشد، با ضرب طرفین نامساوی $۱ < a$ در a و ضرب مجدد نامساوی به‌دست آمده در a و ادامه‌ی این عمل نتیجه بگیرید :

$$۱ < a < a^{۲} < a^{۳} < \dots < a^{n} < \dots$$

اما اگر a عددی مثبت و کمتر از ۱ باشد با روش مشابه نشان دهید :

$$\dots < a^{n} < \dots < a^{۳} < a^{۲} < a < ۱$$

توان‌رسانی با توان اعداد حقیقی

محمد که توانسته بود توان‌رسانی به توان اعداد گویا را تعریف کند، به این فکر افتاد که آیا می‌توان، توان‌رسانی به توان اعداد گنگ را هم تعریف کرد. مثلاً، آیا می‌توان $۲^{\sqrt{۲}}$ را تعریف کرد و معنایی برای آن پیدا کرد؟

محمد نزد دبیر ریاضی خود رفت و از او کمک خواست. دبیر به او گفت از تجربه‌ی خود در تعریف $۲^{\frac{۱}{۲}}$ استفاده کند.

محمد گفت : در تعریف $۲^{\frac{۱}{۲}}$ از وزن باکتری‌هایی که در هر ساعت ۲ برابر می‌شدند استفاده کردیم. اگر با ۱ گرم باکتری شروع می‌کردیم، پس از r ساعت که r یک عدد گویا است، وزن باکتری‌ها ۲^r گرم بود. بنابراین پس از $\sqrt{۲}$ ساعت نیز وزن باکتری‌ها باید $۲^{\sqrt{۲}}$ گرم باشد.

دبیر گفت : این معنای مناسبی برای $۲^{\sqrt{۲}}$ است ولی چگونه آن را محاسبه می‌کنید؟

محمد گفت : در محاسبه‌ی $۲^{\frac{۱}{۲}}$ از ریشه‌گیری استفاده کردیم اما برای محاسبه‌ی $۲^{\sqrt{۲}}$ راهی به نظر من نمی‌رسد.

دبیر گفت : در کار کردن با اعداد حقیقی معمولاً محاسبه‌ی دقیق امکان‌پذیر نیست و بهتر است دنبال یافتن تقریبات اعشاری آن‌ها باشیم. آیا می‌توان تقریبات اعشاری $۲^{\sqrt{۲}}$ را به دست آورد؟

محمد گفت : این ممکن است، زیرا ما تقریبات اعشاری $\sqrt{۲}$ را می‌شناسیم که دنباله‌ای به شکل زیر است.

$$۱/۴\ ,\ ۱/۴۱\ ,\ ۱/۴۱۴\ ,\ ۱/۴۱۴۲\ ,\ ....$$

پس با محاسبه‌ی مقدارهای $۲^{۱/۴}\ ,\ ۲^{۱/۴۱},\ ۲^{۱/۴۱۴},\ ۲^{۱/۴۱۴۲},\ ....$ می‌توانیم مقدارهای تقریبی $۲^{\sqrt{۲}}$ را به‌دست آوریم.

دبیر گفت : درست است. سپس افزود به طور کلی می‌توان همانند توان‌رسانی به توان اعداد گویا برای اعداد حقیقی توان‌رسانی را تعریف نمود. دلایل آن را سال‌های بعد می‌بینید. شما با این روش می‌توانید برای هر عدد حقیقی b و عدد حقیقی مثبت a توان bام a را تعریف کنید.

چرا برای هر عدد حقیقی b می‌توانیم نشان دهیم : $۱^{b} = ۱$ ؟

توان bام a را با a^{b} نشان می‌دهند. توجه داشته باشید که در توان رسانی، پایه همواره عددی مثبت است ولی نما هر عددی می‌تواند باشد.

قوانین توان رسانی به توان اعداد گویا برای توان رسانی به توان اعداد حقیقی هم برقرارند. در زیر a و c اعداد حقیقی مثبتی هستند و b و d اعداد حقیقی دل‌خواهی هستند.

$$a^{b+d} = a^{b}a^{d}$$
$$(a^{b})^{d} = a^{bd}$$
$$(ac)^{b} = a^{b}c^{b}$$

الف) $۵^{۱-\sqrt{۳}} \times ۵^{۱+\sqrt{۳}} = ۵^{۱-\sqrt{۳}+۱+\sqrt{۳}} = ۵^{۲} = ۲۵$

ب) $(\sqrt{۳}^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}} = (\sqrt{۳})^{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}} = (\sqrt{۳})^{۲} = ۳$

ج) $(\pi-۱)^{\sqrt{۳}}(\pi+۱)^{\sqrt{۳}} = ((\pi-۱)(\pi+۱))^{\sqrt{۳}} = (\pi^{۲}-۱)^{\sqrt{۳}}$

۱- مقدارهای زیر را حساب کنید.

الف) $۲^{\sqrt{۳}} \times ۲^{\sqrt{۳}}$

ب) $(\sqrt{۳}^{\sqrt{۳}})^{\sqrt{۱۲}}$

ج) $(\sqrt{۱۵}^{(۲-\sqrt{۲})})^{(۲+\sqrt{۲})}$

د) $(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}+۱}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}}$

۲- مقدار مثبت x را به گونه‌ای تعیین کنید که $x^{\sqrt{۲}}$ برابر ۲ شود.

(راهنمایی : در معادله‌ی $x^{\sqrt{۲}} = ۲$ طرفین را به توان $\sqrt{۲}$ برسانید.)

۳- نشان دهید : $\sqrt{a^b} = (\sqrt{a})^b$. $(a>۰)$

۴- برای اعداد حقیقی مثبت a و c و اعداد حقیقی b و d نشان دهید :

$$a^{-b} = \frac{۱}{a^b} \quad , \quad \frac{a^b}{a^d} = a^{b-d} \quad , \quad (\frac{a}{c})^b = \frac{a^b}{c^b}$$

۵- با استفاده از خواص اساسی توان‌رسانی، برای هر عدد حقیقی مثبت a و عدد حقیقی دلخواه b نشان دهید : $a^b = (a^{\frac{b}{۲}})^۲$ و نتیجه بگیرید : a^b همواره عددی مثبت است.

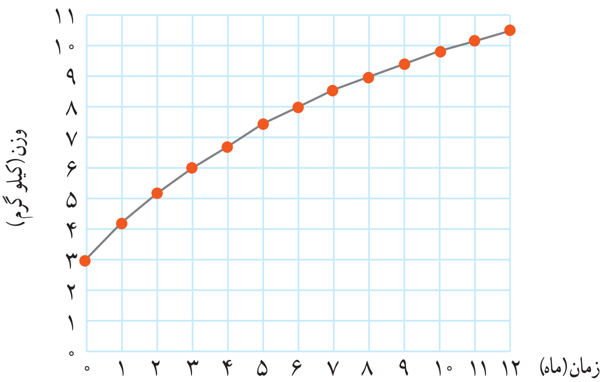
فصل ۲

تابع

مفهوم رابطه و تابع

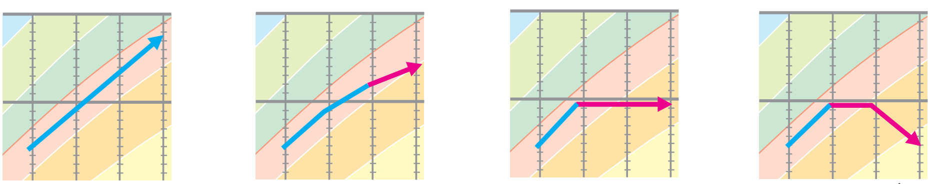
در موارد زیادی پدیده‌های پیرامون ما با یک‌دیگر در ارتباط هستند. به طور مثال «رشد» پدیده‌ای است که با زمان در ارتباط است. تغییرات رشد در موجودات زنده نوعی وابستگی به تغییرات زمان دارد. تغییرات در درجه حرارت و تغییرات ارتفاع به یکدیگر وابسته هستند. مساحت یک دایره به شعاع آن وابسته است. بنابراین طبیعی به نظر می‌رسد که این ارتباط‌ها را به طور دقیق‌تر مطالعه کنیم و در نتیجه کنترل و آگاهی بیشتری درمورد آن‌ها و نیز اسرار خلقت داشته باشیم.

شاید بیشتر شما نمودارهای وزن و یا قد یک کودک از بدو تولد تا هنگام ورود به مدرسه را دیده باشید. شکل (۱) نمودار تغییرات وزن یک کودک طبیعی را از هنگام تولد تا یک سالگی نشان می‌دهد[1].



شکل ۱ : نمودار تغییرات در وزن یک کودک طبیعی

هنگامی که پزشکان می‌خواهند درمورد رشد وزن یک کودک اظهار نظر کنند، نمودار وزن او را با نمودار شکل (۱) مقایسه می‌کنند. در مقایسه‌ی نمودار وزن هر کودک با نمودار شکل (۱)، چهار وضعیت متفاوت ممکن است رخ دهد که در شکل (۲) نشان داده شده‌اند.



الف) رشد مطلوب — ب) کندی رشد — ج) توقف رشد — د) اُفت رشد

شکل ۲

---

۱. برای سادگی یک نمونه از نمودارهای واقعی ارائه شده است.

فعالیت

جدول زیر نشان دهنده وزن یک کودک است که در پایان هرماه طی یک سال، توسط پزشک (یا یک مرکز بهداشتی) ثبت شده است.

زمان(ماه)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
وزن(کیلوگرم)	۲/۸	۳/۳	۴/۲	۵	۵	۵	۴/۸	۴/۵	۵/۵	۶/۵	۷/۲	۸	۸/۵

الف) به نظر شما در فاصله زمانی تولد تا سه ماهگی، رشد کودک با کدام‌یک از چهار وضعیت نشان داده شده در شکل (۲) مطابقت دارد؟

ب) در چه فاصله‌ی زمانی وزن او ثابت مانده است؟

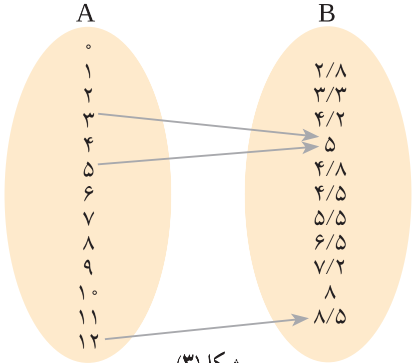
ج) اعداد داده شده در جدول را روی شکل (۱) مشخص کنید. نقاط به‌دست آمده را به یک‌دیگر وصل کنید تا نمودار جدیدی به‌دست آید. با مقایسه‌ی این نمودار با نمودار اصلی، رشد کودک از نظر وزن را در طی یک‌سال بررسی کنید.

اگرچه وزن کودک در فاصله‌ی بین ماه‌ها اندازه‌گیری نشده بود ولی به کمک نموداری که رسم کرده‌اید، می‌توانید وزن او را در فاصله‌ی بین ماه‌ها نیز به صورت تقریبی تعیین کنید.

اطلاعات داده شده در جدول را علاوه بر این‌که به صورت یک نمودار می‌توان ارائه کرد، به صورت‌های دیگر نیز می‌توان نمایش‌داد. مثلاً، می‌توانیم ماه‌های یک سال را در مجموعه‌ای مانند A و وزن‌های نظیر کودک در هر ماه را در مجموعه‌ای مانند B نمایش‌دهیم (شکل ۳). همچنین برای نشان دادن وابستگی و ارتباط بین این دو مجموعه، هر عدد در مجموعه‌ی A را با یک پیکان، به عدد نظیر آن در مجموعه‌ی B وصل می‌کنیم. این گونه نمایش رابطه‌ی بین دو مجموعه را «نمودار ون» می‌نامند.

کار در کلاس

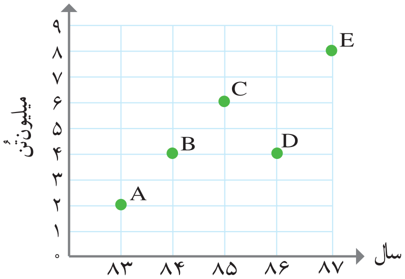
با توجه به فعالیت بالا، نمودار ون داده شده در شکل (۳) را تکمیل کنید :



شکل(۳)

هر یک از سه روشی که برای نشان دادن وابستگی و ارتباط بین دو مجموعه ذکر شد (جدول، نمودار و نمودار ون) دارای مزایایی است. شیوه و نوع مطالعه پدیده‌ها، بر استفاده از یک یا چند نوع نمایش تأثیر می‌گذارد. در هر حال هر یک از سه نمایش ذکر شده، نمایش یک «رابطه» یا وابستگی بین اعضای دو مجموعه هستند.

۱ــ شکل (۴) نمودار میزان تولید یک محصول کشاورزی را در طی سال‌های ۱۳۸۳ تا ۱۳۸۷ نشان می‌دهد.



شکل۴ : نمودار میزان محصول کشاورزی

الف) نمایش‌های دیگر این رابطه (جدول و نمودار ون) را ارائه کنید.

ب) نقاط A و B و C و D و E هر یک چه چیزی را بازگو می‌کنند؟

ج) آیا این امکان وجود دارد که در یک سال معین، میزان محصول به‌دست آمده دو عدد متفاوت باشد؟! آیا سال‌هایی را می‌توان یافت که میزان محصول تولید شده در آن سال‌ها یکسان باشد؟

اگر در شکل (۴) محور افقی را محور طول و محور عمودی را محور عرض در نظر بگیریم، مختصات هر یک از نقاط داده شده را می‌توان با یک «زوج» از اعداد به صورت زیر نمایش داد :

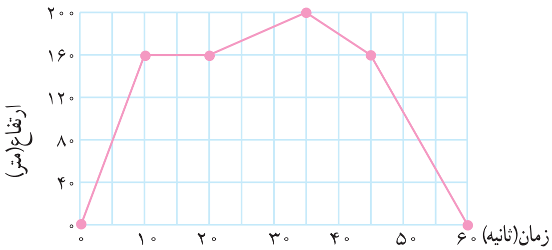
A(۸۳,۲)   B(۸۴,۴)   C(۸۵,۶)   D(۸۶,۴)   E(۸۷,۸)

ترتیب نوشتن اعداد در هر زوج مهم است. مثلاً زوج های (۸۳,۲) و (۲,۸۳) برابر نیستند و دو نقطه متفاوت را در یک دستگاه مختصات نشان می‌دهند. از این جهت به هر یک از زوج های متناظر با نقاط A تا E یک «زوج مرتب» می‌گوییم. حال اگر همه این زوج های مرتب داده شده را در مجموعه‌ای قرار دهیم، یک نمایش دیگر برای رابطه ارائه شده در فعالیت (۲) به‌دست می‌آید.

مجموعه‌ی : {(۸۳,۲),(۸۴,۴),(۸۵,۶),(۸۶,۴),(۸۷,۸)}

نمایش زوج مرتبی رابطه‌ی داده شده می‌باشد. در زوج مرتب (۸۵,۶)، ۸۵ را مؤلفه‌ی اول و ۶ را مؤلفه‌ی دوم می‌نامیم.

۲ــ شکل (۵) نمودار ارتفاع پرواز یک پرنده از سطح زمین را، در طی ۱ دقیقه نشان می‌دهد.



شکل۵ : نمودار ارتفاع یک پرنده

الف) چه تفاوت ظاهری بین این نمودار و نمودار فعالیت (۲) مشاهده می‌کنید؟

ب) این نمودار، رابطه‌ی بین چه مجموعه‌هایی را نشان می‌دهد؟

ج) از بین چهار نمایش مختلفی که برای این رابطه می‌شناسید، به نظر شما کدام‌یک مناسب‌تر است؟

د) آیا این امکان وجود دارد که پرنده در یک زمان معین در دو ارتفاع متفاوت از سطح زمین باشد؟!

هـ) آیا زمان‌هایی وجود دارند که در آن‌ها پرنده ارتفاعی یکسان از سطح زمین داشته باشد؟

شهرهای تهران، مشهد، اصفهان، شیراز و تبریز در یک سطر جدول زیر نوشته شده‌اند. در سطر دیگر جمعیت آن شهرها را به طور تقریبی بنویسید.

شهر	تهران	مشهد	اصفهان	شیراز	تبریز
جمعیت(میلیون نفر)					

الف) با استفاده از محورهای مختصات نموداری برای رابطه‌ی داده شده در جدول رسم کنید. همچنین این رابطه را با نمودار ون نمایش دهید.

ب) آیا امکان دارد که یک شهر دو جمعیت مختلف داشته باشد؟! آیا به طور کلی این امکان وجود دارد که دو یا چند شهر جمعیتی یکسان داشته باشند؟

مفهوم تابع

در این‌جا ویژگی‌های مشترک رابطه‌های ذکر شده در صفحات قبل را مرور می‌کنیم. همان‌طور که درمورد تغییرات وزن یک کودک دیدید، این امکان وجود دارد که در پایان همه‌ی ماه‌ها، کودک

دارای وزن‌های متفاوت باشد (نمودار رشد یک کودک معمولی). همچنین ممکن است در پایان دو یا چند ماه مختلف دارای وزنی یکسان باشد و به عبارت دیگر وزن او ثابت مانده‌باشد. اما :

غیر ممکن است که یک کودک «در پایان یک ماه معین دو یا چند وزن متفاوت داشته باشد».

غیر ممکن است که در پایان یک سال معین «میزان محصول به‌دست آمده دو یا چند مقدار متفاوت باشد».

همچنین غیر ممکن است که یک پرنده « در یک زمان معین در دو یا چند ارتفاع متفاوت باشد».

و سرانجام غیر ممکن است که یک شهر «در یک زمان معین دارای دو یا چند جمعیت متفاوت باشد».

چه مفهوم مشترکی در همه‌ی این رابطه‌ها پیدا می‌کنید؟ در ریاضیات به چنین رابطه‌هایی یک «تابع» گفته می‌شود. به عبارت دقیق‌تر :

یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نظیر می‌شود.

می‌توان با استفاده از نمایش‌های مختلف یک رابطه، در مورد تابع بودن آن رابطه قضاوت کرد. مثلاً به کمک نمودار ون می‌توان تابع بودن یک رابطه را بررسی کرد. به عبارت دیگر با توجه به مفهوم تابع :

یک رابطه بین مجموعه‌ی A و مجموعه‌ی B که با نمودار ون نمایش داده شده است، تنها در صورتی تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود.

این نکته را می‌توان به عنوان معیاری برای تشخیص تابع بودن یک رابطه با استفاده از نمودار ون در نظر گرفت.

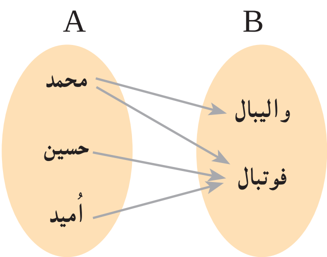
با تکمیل جملات زیر برای تشخیص تابع بودن یک رابطه، هنگامی که آن رابطه به صورت نمودار یا زوج مرتب ارائه می‌شود، معیارهایی به‌دست آورید.

اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار یک تابع است که هر خط موازی محور عرض ها نمودار را حداکثر..

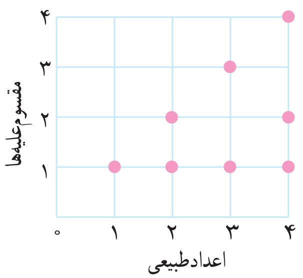
اگر یک رابطه به صورت مجموعه زوج های مرتب داده شده باشد، هنگامی این مجموعه تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی[1] در آن...

توجه داشته باشید که ممکن است یک رابطه‌ی دلخواه، تابع نباشد. به طور مثال رابطه‌های زیر تابع نیستند.

مثال



۱ــ فرض کنید مجموعه‌ی A شامل سه دانش آموز به نام‌های محمد، حسین و امید و مجموعه‌ی B شامل ورزش‌های مورد علاقه‌ی آن‌ها یعنی والیبال و فوتبال باشد. چرا این رابطه یک تابع نیست؟



۲ــ نمودار مقابل رابطه‌ی بین مجموعه‌ی اعداد طبیعی ۱ تا ۴ و مجموعه‌ای که شامل مقسوم‌علیه‌های این اعداد است، را نشان می‌دهد. در این رابطه هر عدد به مقسوم علیه‌های آن نظیر می‌شود.

چرا این نمودار یک تابع را نشان نمی‌دهد؟ سه نمایش دیگر این رابطه را که می‌شناسید، ارائه کنید و توضیح دهید که چرا این نمایش ها، نمایشی از یک تابع نیستند.

مسئله

۱ــ در هر یک از موارد زیر رابطه‌ای بین دو پدیده ذکر شده‌است. توضیح دهید که چگونه این رابطه‌ها را می‌توان به کمک یک تابع توصیف کرد؟

رابطه‌ی بین افراد و قد آن‌ها

رابطه‌ی بین افراد و وزن آن‌ها

۱. دو زوج مرتب (c,d) و (a,b) مساوی هستند هرگاه a=c و b=d در غیر این صورت دو زوج مرتب را متمایز می‌نامیم.

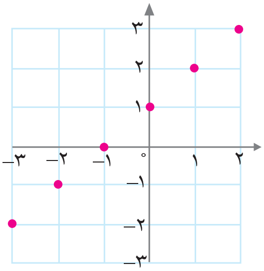
رابطه‌ی بین افراد و سن آن‌ها
رابطه‌ی بین دانش‌آموزان یک کلاس و نمره‌ی ریاضی پایان ترم آن‌ها
رابطه‌ی بین سال‌های مختلف و میزان بودجه‌ی اختصاص یافته به آن سال‌ها در یک کشور
رابطه‌ی بین افراد و دمای بدن آن‌ها در یک زمان خاص
رابطه‌ی بین مستطیل‌ها و محیط آن‌ها

آیا می‌توانید رابطه‌های دیگری را مثال بزنید که تابع باشند؟

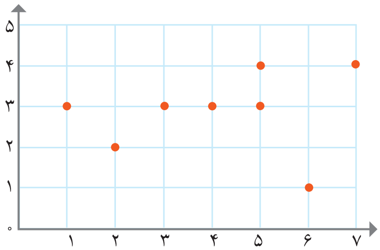
چند رابطه مثال بزنید که تابع نباشند.

کدام‌یک از رابطه‌هایی که به صورت‌های متفاوت در مسائل ۲، ۳ ، ۴ و ۵ نمایش داده شده‌اند، یک تابع هستند؟

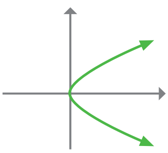
۲– نمودار

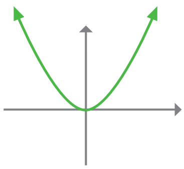


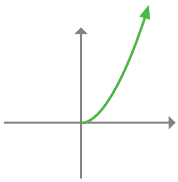
(الف)

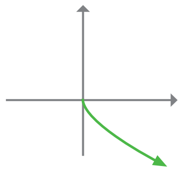


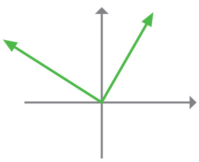
(ب)

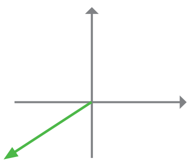

(ج)

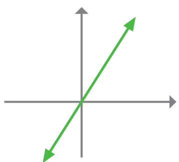

(د)

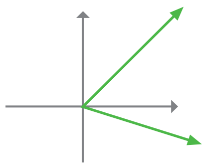

(هـ)


(و)


(ز)


(ح)


(ط)


(ی)

۳- جدول

x	۱	۲	۳	۴	۵	...
y	۶	۷	۸	۹	۱۰	...

(ب)

x	۲	۹	۰	۵	-۱
y	۱	۰	۲	۴	۴

(الف)

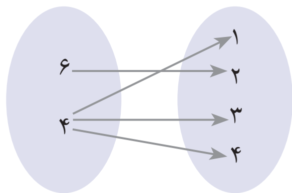
x	۲	۸	۷	۴	۸
y	۲	۷	۷	۹	۴

(د)

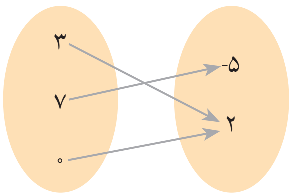
x	$\frac{۱}{۳}$	-۲	۵	-۲	۷	۱۰
y	$\frac{۱}{۳}$	۱	۵	۴	۵	$\sqrt{۲}$

(ج)

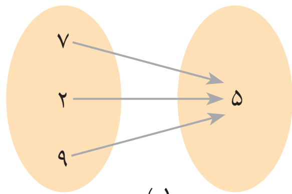
۴- نمودار ون



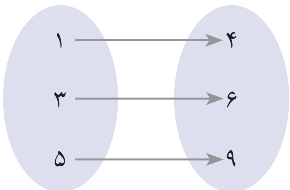
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

۵- زوج‌های مرتب

ب) $\{(۰,۱) , (\frac{۳}{۵},۱) , (-۵,۱) , (۸,۱)\}$

الف) $\{(۲,۱) , (۳,-۵) , (۳,۷)\}$

د) $\{(۵,۲)\}$

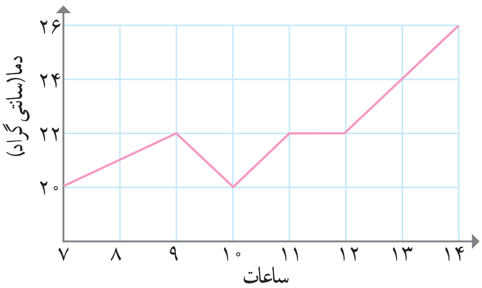
ج) $\{(۱,۱) , (۲,۲) , (\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳}), (-۴,-۴)\}$

و) $\{(۲,۳) , (۳,۲) , (۱,۱)\}$

هـ) $\{(۲,۳) , (۰,-۶) , (۰,۳) , (\sqrt{۷},۱)\}$

۶- اگر بدانیم رابطه‌ی زیر یک تابع است، مقادیر a و b را به‌دست آورید و نمودار تابع را رسم کنید.

$$\{(a-۱,۲)\ ,\ (۵,a-۲)\ ,\ (a-۲,b+۳)\ ,\ (۳,۵)\ ,\ (۵,۳)\}$$



۷- نمودار مقابل تغییرات در دمای یک شهر از ساعت ۷ صبح تا ۱۴ بعد از ظهر را نشان می‌دهد.

آیا این نمودار یک تابع را نشان می‌دهد؟

بیش‌ترین و کم‌ترین دمای ثبت شده چه‌قدر هستند؟

در کدام ساعات دما ثابت مانده است ؟

چگونه به کمک نمودار می‌توان همه‌ی زمان‌هایی را مشخص کرد که دمای هوا در آن زمان‌ها یک مقدار معین است؟

۸- کدام‌یک از نمودارهای زیر، می‌تواند نمایشگر ارتفاع هواپیمایی باشد که از یک فرودگاه بلند می‌شود، مدتی در آسمان پرواز می‌کند و سپس فرود می‌آید؟

نمودارهای دیگر چه چیزهایی را می‌توانند نشان‌دهند؟ آیا هر سه نمودار تابع هستند؟

دامنه و برد توابع

جدول زیر رابطه‌ی بین ساعاتی از روز و دمای بدن یک فرد بیمار را نشان می‌دهد :

ساعات روز	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
دمای بدن(سانتی گراد)	۴۰	۳۸	۳۷	۳۷	۳۷

اطلاعات داده شده در جدول را چگونه تفسیر می‌کنید؟

نمایش رابطه داده شده به صورت زوج‌های مرتب از این قرار است :

$$\{(۸,۴۰)\ ,\ (۹,۳۸)\ ,\ (۱۰,۳۷)\ ,\ (۱۱,۳۷)\ ,\ (۱۲,۳۷)\}$$

مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل دهنده‌ی هر رابطه را «دامنه» رابطه می‌نامند. بنابراین دامنه‌ی رابطه‌ی داده شده برابر است با مجموعه‌ی : $A = \{۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲\}$
مجموعه‌ی مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تشکیل دهنده هر رابطه را «برد» رابطه می‌نامند. بنابراین برد رابطه‌ی داده شده برابر است با مجموعه‌ی : $B = \{۳۷, ۳۸, ۴۰\}$.

فعالیت

الف) اگر بخواهیم با استفاده از جدول داده شده، دامنه و برد رابطه را بیابیم چگونه این کار را انجام دهیم؟

ب) نمایش‌های دیگر این رابطه را ارائه کنید و دامنه و برد رابطه را از آن‌ها تعیین کنید. آیا می‌توانید روشی برای یافتن دامنه و برد از نمایش‌های مختلف یک رابطه ارائه دهید؟

ج) چرا رابطه‌ی داده شده یک تابع است؟

توجه داریم که دامنه و برد یک تابع دقیقاً مشابه دامنه و برد یک رابطه تعریف می‌شود، بنابراین :

مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های اول زوج های مرتب تشکیل دهنده یک تابع را «دامنه» و مجموعه‌ی همه مؤلفه‌های دوم زوج های مرتب تشکیل دهنده یک تابع را «برد» تابع می‌نامند.

دامنه‌ی تابع مورد بحث در فعالیت قبل مجموعه $A = \{۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲\}$ و برد آن مجموعه $B = \{۳۷, ۳۸, ۴۰\}$ می‌باشد.

کار در کلاس

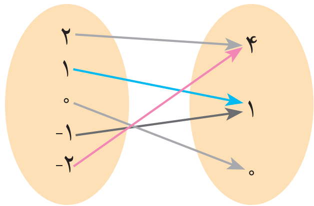
۱– دامنه و برد رابطه‌های زیر را که به شکل‌های مختلفی ارائه شده‌اند به‌دست آورید. در هر مورد تابع بودن رابطه‌ی داده شده را نیز بررسی کنید.

الف) $\{(۲, ۳), (-۳, ۵), (۲, ۷)\}$

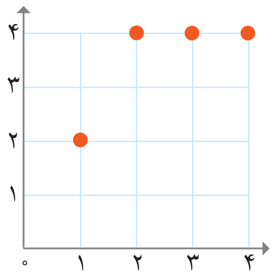
ب)

چند ضلعی	مثلث	مربع	مستطیل	متوازی الاضلاع
مجموع زوایای داخلی(درجه)	۱۸۰	۳۶۰	۳۶۰	۳۶۰

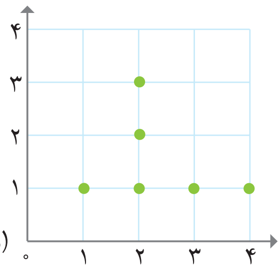
ج)



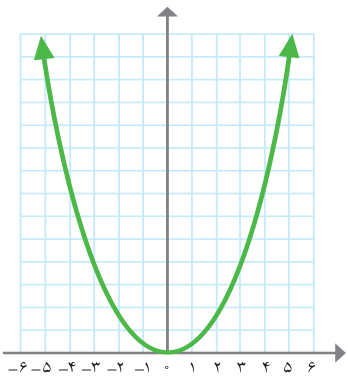
د)



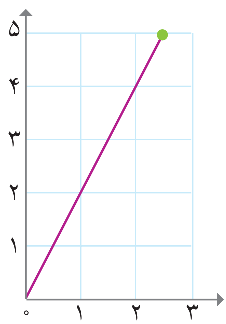
هـ)



و)



ز)



۲- تابعی مثال بزنید که :

الف) دامنه‌ی آن تنها شامل دو عضو باشد.

ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد.

ج) دامنه‌ی آن تنها یک عضو داشته باشد.

د) دامنه‌ی آن نامتناهی باشد ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.

هـ) دامنه و برد آن نامتناهی باشند.

توابع خطی

نام‌گذاری توابع

همان‌گونه که مجموعه‌ها، بردارها، خطوط و بسیاری از مفاهیم ریاضی را نام‌گذاری می‌نماییم، برای رابطه‌ها و توابع نیز می‌توان نام‌هایی را انتخاب کرد. معمولاً رابطه‌ها را با حروفی مانند R و S و T و ... و توابع را با حروفی مانند f و g و h و ... نام‌گذاری می‌کنیم[۱]. به طور مثال :

$$R=\{(۱,۲)\ ,\ (۳,۵)\ ,\ (۱,۷)\}$$

$$S=\{(۰,-۲)\ ,\ (۴,۷)\}$$

R و S دو رابطه هستند. رابطه‌ی S تابع نیز هست ولی رابطه‌ی R تابع نیست.

همچنین f و g که به صورت زیر تعریف شده‌اند، دو تابع هستند :

$$f=\{(\frac{۱}{۲}\ ,\ -۳)\ ,\ (۴\ ,\ ۵)\ ,\ (۲\ ,\ ۲)\}$$

$$g=\{(۲\ ,\ ۵)\ ,\ (۳\ ,\ ۷)\ ,\ (۴,۹)\}$$

در سال گذشته در درس ریاضی ۱ با روابط خطی آشنا شده‌اید. رابطه‌ی بین بسیاری از پدیده‌ها، یک رابطه‌ی خطی است.

فعالیت

وقتی که آذرخش رخ می‌دهد، اندکی پس از دیدن نور آن، صدای آن را می‌شنویم. در جدول زیر زمان شنیده شدن صدای آذرخش پس از مشاهده نور آن و نیز فاصله‌ی ما، تا مکانی که آذرخش به وقوع پیوسته است، داده شده‌است. زمان را با t و مسافت را با h نمایش می‌دهیم.

t (ثانیه)	۰	۱	۲	$\frac{۵}{۲}$	۳	۴	۵	۶	۹	۱۲	...
h (کیلومتر)	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۵}{۶}$	۱	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$	۲	۳	۴	...

الف) چه رابطه‌ای بین زمان و مسافت وجود دارد؟ این رابطه را با کلام خود توضیح دهید.

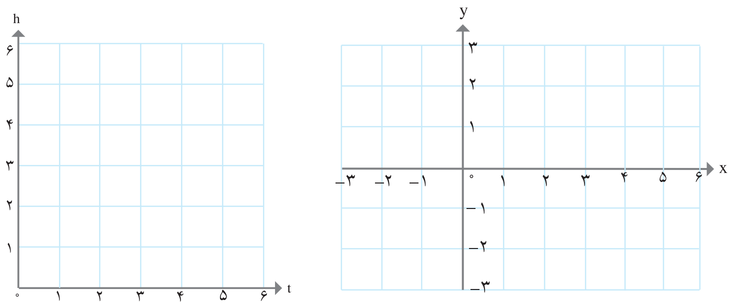
۱. R ابتدای کلمه انگلیسی Relation است که به معنی رابطه و f ابتدای کلمه function می‌باشد که به معنی تابع است.

ب) زمان‌های دیگری را مثال بزنید و فاصله‌ی (مسافت) متناظر را حساب کنید. به طور کلی به جای t چه اعدادی می‌توانیم قرار دهیم؟ آیا همه‌ی زمان‌های ممکن را می‌توان در جدول ارائه کرد؟

ج) به کمک آن چه که در ریاضی ۱ آموخته‌اید، معادله‌ی این رابطه را می‌توان به صورت $h=\frac{۱}{۳}t$ (یا $h=\frac{t}{۳}$) نمایش داد. نمودار این رابطه را در (شکل الف) رسم کنید و دامنه و برد آن را به‌دست آورید.

د) از بین نمایش‌هایی که می‌شناسید، کدام نمایش رابطه‌ی داده شده را بهتر توصیف می‌کند؟
همان گونه که دیده می‌شود، رابطه‌ی داده شده یک تابع است.

هـ) نمودار خط $y=\frac{۱}{۳}x$ را (در شکل ب) رسم کنید و آن را با نمودار رابطه‌ی $h=\frac{t}{۳}$ که در شکل الف رسم کرده‌اید، مقایسه کنید. چه شباهت‌ها و تفاوت‌هایی بین دو نمودار مشاهده می‌کنید.



(الف) (ب)

تفاوت مهم این دو رابطه در آن است که برای t مقدارهای منفی را نداریم درحالی که برای x مقادیر منفی را نیز در نظر گرفته‌ایم. به جز این نکته، اگر به جای t، x و به جای h، y را قراردهیم رابطه‌ی داده شده برای زمان و مسافت آذرخش یعنی $h=\frac{۱}{۳}t$، به معادله‌ی $y=\frac{۱}{۳}x$ تبدیل می‌شود.

این‌چنین توابعی را توابع خطی می‌نامیم.

هر تابع که بتوان آن را به شکل $y=ax+b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می شود.

هر دو نمودار الف و ب در فعالیت قبل توابعی را مشخص می‌کنند که با معادله‌ی $y=\frac{۱}{۳}x$ قابل

نمایش هستند، اما دامنه‌های این دو تابع و برد آن ها نیزمتفاوتند. دامنه و برد تابع آذرخش، مجموعه اعداد حقیقی نامنفی است، در حالی‌که دامنه و برد تابع دیگر مجموعه اعداد حقیقی است.

۱- یک شمع ۲۰ سانتی‌متر ارتفاع دارد و در هر ساعت ۴ سانتی‌متر می‌سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟ جدولی تنظیم کنید و در طی ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید.

x (زمان)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (ارتفاع شمع)						

نمودار این تابع را رسم کنید.
چرا این تابع، یک تابع خطی است؟

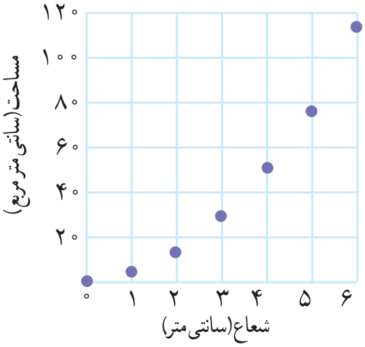
۲- آیا خط $x = ۲$ را می‌توان به عنوان یک تابع در نظر گرفت؟ چرا؟ درمورد خط $y = ۵$ چه‌طور؟ در حالت کلی چه موقع یک خط را می‌توان یک تابع نیز در نظر گرفت؟

۳- معادله‌ای برای هر یک از توابع خطی داده شده با جدول‌های زیر بنویسید.

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y	۱	۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶

x	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲
y	۶	۴	۲	۰	-۲	-۴

مسائل

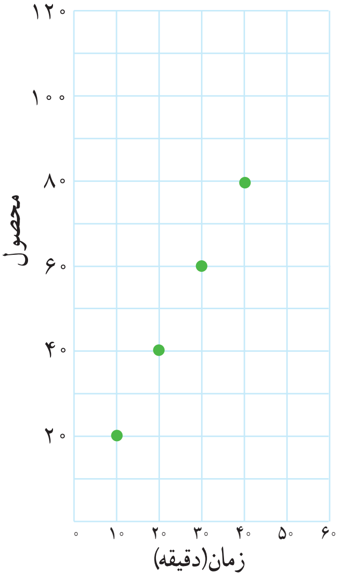


۱- نمودار مقابل رابطه‌ی بین شعاع و مساحت دایره را نشان می‌دهد.
درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های داده شده درمورد این نمودار را بررسی کنید.

الف) رابطه‌ی داده شده یک تابع است.

ب) رابطه‌ی داده شده یک تابع خطی است.

ج) با افزایش شعاع مساحت نیز افزایش پیدا می‌کند.



۲- نمودار مقابل تعداد تولید یک نوع اسباب بازی را در یک کارخانه در پایان فاصله‌های زمانی ۱۰ دقیقه نشان می‌دهد. پیش‌بینی شما برای تعداد اسباب‌بازی‌های تولید شده پس از یک ساعت چیست؟

الف) پس از پایان ۲۵ دقیقه مناسب‌ترین پیش‌بینی برای تعداد محصول چیست؟

ب) زمان‌های دیگری را مثال بزنید و تعداد محصول تولیدشده در پایان آن زمان را حدس بزنید.

ج) نمودار داده شده با نمودار چه خطی قابل مقایسه است؟ آیا می‌توانید رابطه‌ای ریاضی برای تعداد محصول تولیدی در هر دقیقه به‌دست آورید؟

د) توضیح دهید که چرا این نمودار تابعی را مشخص می‌کند.

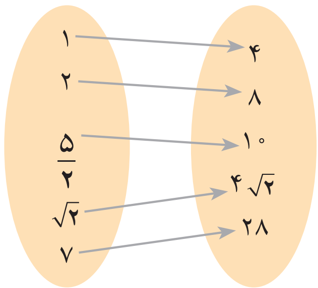
۳- سودی که از تولید یک کالا توسط یک شرکت حاصل می‌شود از معادله‌ی : $y=-۳۰۰+۶x$ به‌دست می‌آید. در این معادله، x تعداد کالای تولیدی و y سود حاصل برحسب تومان است.

الف) نمودار این خط را رسم کنید.

ب) سود این شرکت را وقتی که تعداد کالاهای تولید شده برابر ۱۰۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰ است به‌دست آورید.

ج) محل برخورد خط $y=-۳۰۰+۶x$ با محور xها چه چیزی را نشان می‌دهد؟ این شرکت باید حداقل چه تعداد از این کالا تولید کند، تا سود دهی آغاز شود؟

وارون یک رابطه



رابطه‌ی بین طول ضلع یک مربع و محیط آن را در نظر می‌گیریم. طول ضلع یک مربع چه اعدادی می‌تواند باشد؟ برای پنج طول ضلع متفاوت، این رابطه به صورت نمودار ون نشان داده شده است:

دامنه‌ی رابطه‌ی بالا مجموعه‌ی

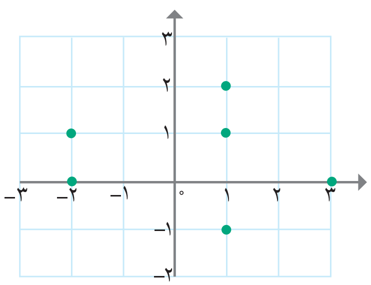
$$A=\{۱ , ۲ , \frac{۵}{۲} , \sqrt{۲} , ۷\}$$

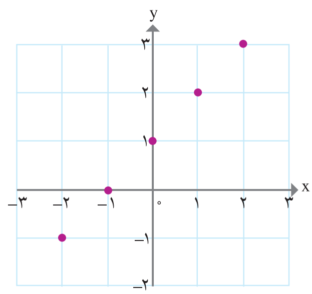
و برد آن مجموعه‌ی $B=\{۴ , ۸ , ۱۰ , ۴\sqrt{۲} , ۲۸\}$ است. نمایش زوج مرتبی رابطه‌ی بالا عبارت است از: $R=\{(۱,۴) , (۲,۸) , (\frac{۵}{۲},۱۰) , (\sqrt{۲}, ۴\sqrt{۲}) , (۷,۲۸)\}$ اگر جای مؤلفه‌های اول و دوم را در هر یک از زوج‌های مرتب رابطه عوض کنیم، رابطه‌ای به‌دست می‌آید که به آن وارون رابطه داده شده می‌گویند و با نماد $R^{-۱}$ نمایش می‌دهند. بنابراین:

$$R^{-۱}=\{(۴,۱) , (۸,۲) , (۱۰,\frac{۵}{۲}) , (۴\sqrt{۲}, \sqrt{۲}) , (۲۸,۷)\}$$

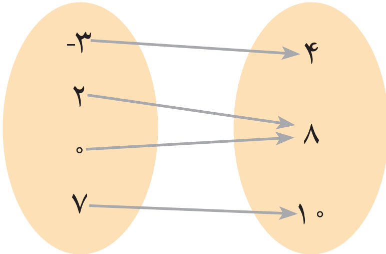
دامنه و برد $R^{-۱}$ به ترتیب با برد و دامنه‌ی R برابر است. همان‌طور که دیدید، وارون یک رابطه نیز، خود یک رابطه است.

هر یک از رابطه‌های زیر را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و سپس وارون آن را به‌دست آورید.





x	y
۱	۵
۲	۱۰
۳	۱۵
۴	۲۰
۵	۲۵

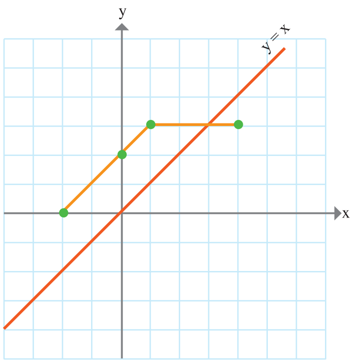


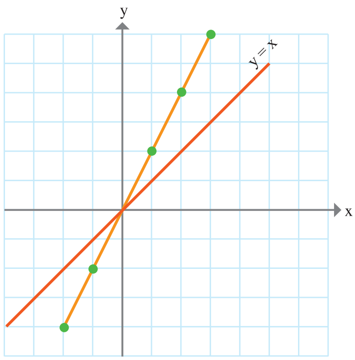
الف) وارون رابطه‌های داده شده در تمرین در کلاس قبل را با همان نمایش رابطه‌ی داده شده ارائه کنید.

ب) در حالت کلی اگر یک رابطه به صورت نمودار ون یا جدول نمایش داده شده باشد، وارون آن چگونه به‌دست می‌آید؟

در حالتی که رابطه‌ای به صورت یک نمودار نمایش داده شده باشد، با پیدا کردن قرینه‌ی هر نقطه از نمودار نسبت به خط $y = x$ (یا همان نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم)، نمودار وارون آن رابطه به‌دست می آید.

۱- در شکل‌های زیر نمودار دو رابطه و خط $y = x$ رسم شده‌اند. به کمک نقاط مشخص شده، نمودار وارون این رابطه‌ها را رسم کنید. کدام‌یک از این رابطه‌ها و وارون آن هر دو تابع هستند؟





۲- الف) کدام‌یک از رابطه‌های داده شده در تمرین در کلاس، تابع هستند؟

ب) کدام‌یک از رابطه‌های تمرین در کلاس و وارون آن، هر دو تابع هستند؟

ج) اگر رابطه‌ای تابع باشد، آیا وارون آن رابطه هم تابع است؟

۳- وارون کدام‌یک از توابع مقابل، خود یک تابع است؟

$$f=\{(۰,۲),(۱,۵),(۴,\frac{۱}{۲})\}$$

$$g=\{(۷,۲),(۵,۲)\}$$

همان‌طور که مشاهده کردید وارون هر رابطه، خود یک رابطه است. اما اگر رابطه‌ای تابع باشد، وارون آن رابطه لزوماً یک تابع نمی‌باشد.

اگر وارون تابعی مانند f، خود نیز یک تابع باشد، آن را «تابع وارون» f می‌نامیم (تابع معکوس). در این صورت f را وارون پذیر (معکوس پذیر) می‌نامند. تابع وارون f را با نماد f^{-1} نمایش می‌دهیم.

توابع یک به یک

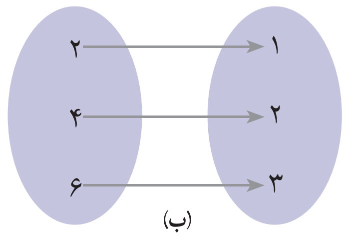
سؤال اساسی این‌است که چه توابعی وارون‌پذیرند؟ یعنی یک تابع باید چه شرطی داشته باشد تا وارون آن هم یک تابع باشد. واضح است که همه توابع چنین خاصیتی ندارند. به عبارت دیگر باید دنبال رابطه‌هایی بگردیم که علاوه بر تابع بودن، دارای ویژگی یا ویژگی‌های دیگری نیز باشند.

فعالیت

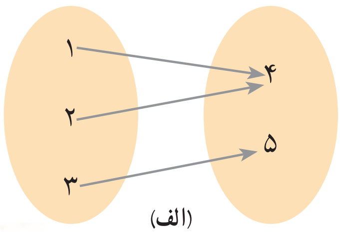
در ادامه تعدادی تابع به صورت نمودار ون داده شده‌اند.

الف) وارون کدام‌یک از آن‌ها تابع است؟

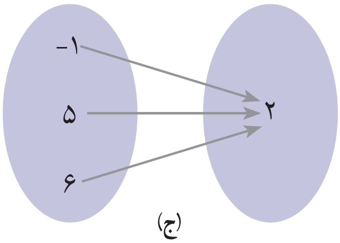
ب) ویژگی مشترک آن‌هایی که وارونشان نیز تابع است، چیست؟



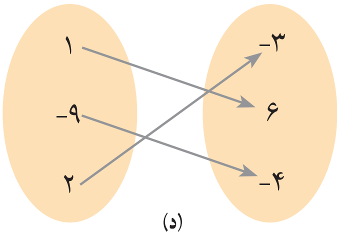
(ب)



(الف)



(ج)



(د)

وارون هر یک از توابع داده شده را می‌توان (با عوض کردن جهت پیکان‌ها در نمودارهای ون) به‌دست آورد. همان‌گونه که دیدید، فقط وارون توابع داده شده در (ب) و (د) نیز، خود تابع می‌باشند و وارون توابع داده شده در (الف) و (ج) تابع نمی‌باشند (چرا؟).

در توابع (الف) و (ج) حداقل به عضوی از مجموعه‌ی دوم بیش از یک پیکان وارد شده است. این موضوع درباره‌ی توابع (ب) و (د) اتفاق نمی‌افتد. این ویژگی مشترک توابع(ب) و (د) است. یعنی در این توابع به هر عضو مجموعه‌ی دوم بیش از یک پیکان وارد نشده‌است. به چنین توابعی، توابع یک به یک می‌گویند.

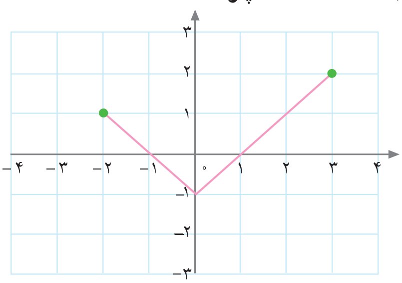
تابعی که بین دو مجموعه تعریف می‌شود، هنگامی یک به یک است که به هر عضو مجموعه‌ی دوم بیش از یک عضو از مجموعه‌ی اول نظیر نشود.

در این‌جا (الف) و (ج) توابعی یک به یک نمی‌باشند در حالی‌که (ب) و (د) توابعی یک به یک هستند. بنابراین :

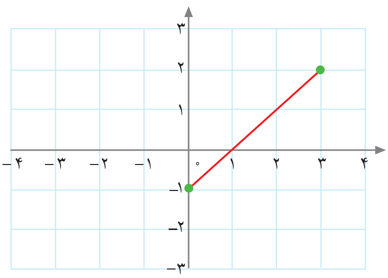
یک تابع در صورتی وارون‌پذیر است (یعنی وارون آن تابع است) که یک به یک باشد.

مثال

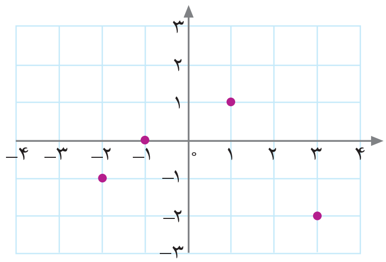
توابع داده شده در (الف) و (د) یک به یک هستند، در حالی‌که توابع داده شده در (ب) و(ج) یک به یک نیستند (چرا؟).



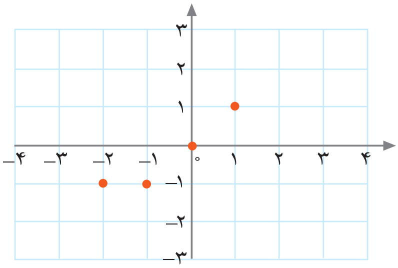
(ب)



(الف)



د)



ج)

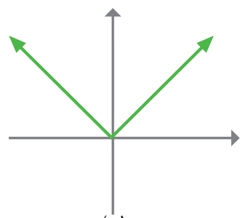
الف) در حالت کلی روشی برای بررسی یک به یک بودن یک تابع با استفاده از نمودار آن ارائه کنید. از خطوطی که به موازات محور xها رسم می‌شوند، استفاده کنید.

ب) نمودار تابع مربوط به سوختن شمع را به خاطر آورید. آیا این تابع یک به یک است؟ چگونه از روی نمودار تابع می‌توان به این موضوع پی برد. آیا تابع مربوط به مسیر پرواز پرنده یک به یک است؟

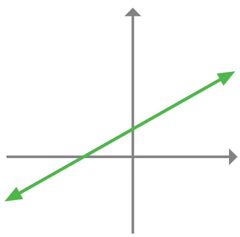
به طور کلی می‌توان گفت که یک تابع در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور xها نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مسائل

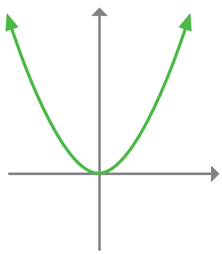
۱- کدام‌یک از توابع داده شده یک به یک هستند؟



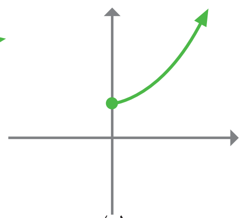
(ج)



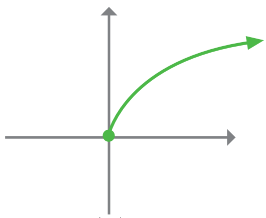
(ب)



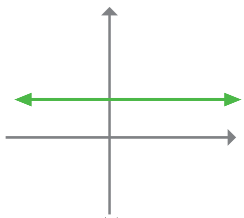
(الف)



(و)



(هـ)



(د)

ز) $f=\{(۱,۱),(-۱,۱),(۲,۴),(-۲,۴)\}$

ح) $g=\{(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}),(۰,۱),(۲,۳)\}$

۲ـ تابع زیر را در نظر می‌گیریم :

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶

الف) آیا این تابع یک به یک است؟ معادله‌ای برای آن بنویسید.
ب) وارون این تابع را به‌دست آورید. معادله‌ای برای وارون آن بنویسید.
پ) نمودار تابع و نمودار وارون آن را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۳ـ در تمرین ۱ کدام‌یک از توابع وارون‌پذیرند؟ نمودار تابع وارون را برای آن‌ها (در همان شکل) رسم کنید.

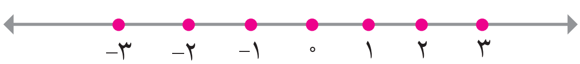
۴ـ فرض کنید به اعضای یک کلاس کد ملی آن‌ها را نسبت دهیم. توضیح دهید که چگونه رابطه‌ی بین افراد و کد ملی آن‌ها تابعی یک به یک را معلوم می‌کند.

بازه (فاصله)

مجموعه‌ی همه‌ی اعداد صحیح بین ۳- و ۳ به همراه خود این اعداد را می‌توان در مجموعه‌ای مانند A به شکل زیر نمایش داد :

$A=\{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$

نمایش هندسی مجموعه‌ی A به صورت زیر است :



حال اگر مجموعه‌ی همه‌ی اعداد گویا وگنگ بین ۳ - و ۳، یعنی همه‌ی اعداد حقیقی بین دو عدد ۳- و ۳ به همراه خود این دو عدد را در نظر بگیریم، می‌توانیم آن را به‌صورت زیر نمایش دهیم :

$B=\{x \mid x\in \mathbb{R}, -۳\le x\le ۳\}$

نمایش هندسی مجموعه‌ی B به‌صورت زیر است :

در این‌گونه موارد برای سادگی از نماد دیگری به‌نام «بازه» یا فاصله استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم :

$$B = \{x | x \in \mathbb{R}, -۳ \le x \le ۳\} = [-۳, ۳]$$

$[-۳, ۳]$ را بازه‌ی بسته از ۳- تا ۳ می‌خوانند و اعداد ۳- و ۳ را نقاط انتهایی بازه می‌نامند.
اگر به‌طور مثال از مجموعه‌ی B ، نقطه‌ی انتهایی ۳ را حذف کنیم ومجموعه‌ی به‌دست آمده را C بنامیم، داریم :

$$C = \{x | x \in \mathbb{R}, -۳ \le x < ۳\}$$

مجموعه‌ی C را می‌توان با نماد $[-۳, ۳)$ نمایش داد. در نمایش هندسی مجموعه‌ی C ، نقطه‌ی ۳ روی محور را تو خالی باقی می‌گذاریم.

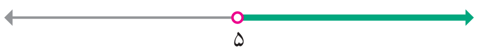
معمولاً بازه‌ی $[-۳, ۳)$ را بازه‌ی «نیم باز» می‌نامند.

۱- به نظر شما تفاوت بازه‌های $(-۳, ۳]$ و $(-۳, ۳)$ در چیست؟ این بازه‌ها را به صورت مجموعه نمایش دهید.
همچنین نمایش هندسی این بازه‌ها را ارایه کنید . بازه‌ی $(-۳, ۳)$ را یک بازه‌ی «باز» می‌نامیم.

اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۵ را در نظر می‌گیریم و آن‌را با F نمایش می‌دهیم :

$$F = \{x | x \in \mathbb{R}, x > ۵\}$$

نمایش هندسی F در شکل زیر ارایه شده است :

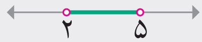
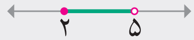


نمایش این مجموعه با نماد بازه به صورت $F = (۵, +\infty)$ است.

توجه داریم که $+\infty$ (بخوانید مثبتِ بی‌نهایت) یک نماد است و یک عدد حقیقی نیست. به طریق مشابه نماد $-\infty$ را نیز می‌توان به کار برد.

بازه‌ی $(۵, +\infty)$ را نیز یک بازه‌ی «باز» می‌نامند و به طریق مشابه بازه‌ی $[۵, +\infty)$ را یک بازه‌ی نیم باز می‌نامند.

۲– جدول زیر را کامل کنید.

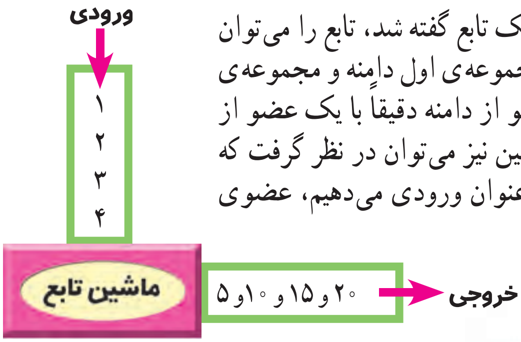
نمایش هندسی	نمایش به صورت مجموعه	نمایش با نماد بازه	نوع بازه
	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, ۲ < x < ۵\}$	$(۲,۵)$	باز
...	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, ۲ \leq x \leq ۵\}$	...	...
	...	...	نیم باز
...	...	$(۲,۵]$	...
	...	...	...
...	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq ۲\}$	...	...
...	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < ۵\}$	...	...
...	...	$(-\infty , ۵]$	...
...	...	$[۰ , +\infty)$	...
...	...	$(-\infty , ۰)$	...
...	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > ۰\}$	...	...
...	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq ۰\}$	...	...
...	...	$(-\infty , +\infty)$	...

آخرین سطر نمایانگر مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. چهار سطر ماقبل آخرین سطر چه مجموعه‌هایی را نمایش می‌دهند؟

۳– اگر a,b دوعدد حقیقی باشند و $a < b$، جدول فوق (به جز پنج سطر آخر) را با a,b تکرار کنید.

مقدار تابع در یک نقطه – نمایش جبری تابع

با توجه به آن‌چه که درمورد دامنه و برد یک تابع گفته شد، تابع را می‌توان تناظری بین دو مجموعه در نظر گرفت که مجموعه‌ی اول دامنه و مجموعه‌ی دوم برد نامیده می‌شود، به قسمی که هر عضو از دامنه دقیقاً با یک عضو از برد نظیر می‌شود. تابع را به عنوان یک ماشین نیز می‌توان در نظر گرفت که هنگامی که یک عضو از دامنه را به آن به عنوان ورودی می‌دهیم، عضوی (منحصربفرد) از برد را به عنوان خروجی به ما می‌دهد.



مثال

۱– تابع $f=\{(۱,۵),(۲,۱۰),(۳,۱۵),(۴,۲۰)\}$ را در نظر می‌گیریم. دامنه‌ی این تابع $\{۱,۲,۳,۴\}$ و برد آن $\{۵,۱۰,۱۵,۲۰\}$ است. ورودی‌های تابع f عبارتند از ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و خروجی‌ها ۵ و ۱۰ و ۱۵ و ۲۰ هستند. به عبارت دقیق‌تر عضو ۱ از دامنه به عضو ۵ از برد نظیر می‌شود. به جای این عبارت، می‌توان با یک قرار داد، کار را ساده‌تر کرد. معمولاً می‌نویسند $f(۱)=۵$ و گفته می‌شود که مقدار تابع f در نقطه‌ی ۱ برابر ۵ است. بنابراین $f(۲)=۱۰$ به این معنی است که عدد ۲ توسط تابع f به ۱۰ نظیر می‌شود، یا این‌که مقدار تابع f در نقطه‌ی ۲ برابر ۱۰ است. به همین ترتیب می‌توان نوشت: $f(۳)=۱۵$ و $f(۴)=۲۰$. این گونه نمایش تابع را در جدول زیر می‌توان خلاصه کرد که جدولی آشنا به حساب می‌آید:

x	۱	۲	۳	۴
f(x)	۵	۱۰	۱۵	۲۰

رابطه‌ی بین دامنه و برد را می‌توان به صورت یک رابطه‌ی ریاضی به شکل $f(x)=۵x$ نوشت.

۲– اگر تابع g به صورت مقابل داده شده باشد: $g=\{(۳,۲),(-۷,۰),(۵,۲)\}$

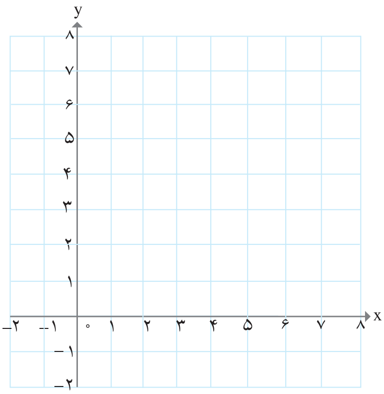
می‌توان نوشت: $g(۳)=۲\ ,\ g(-۷)=۰\ ,\ g(۵)=۲$

x	۳	-۷	۵
g(x)	۲	۰	۲

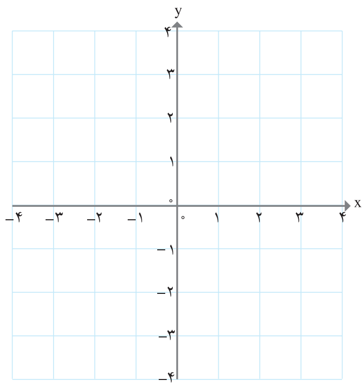
فعالیت

جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی که در جدول، توصیف شده‌اند را رسم کنید.

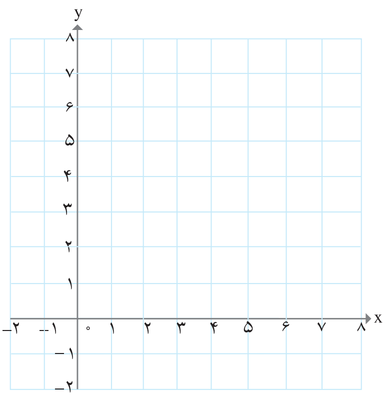
	(الف)	(ب)	(ج)	(د)
تابع	$f(x) = ۲x$	$g(x) = ۲x$	$h(x) = ۲x$	$y = ۲x$
دامنه	$\{۱ , ۲ , ۳ , ۴\}$	مجموعه‌ی اعداد حقیقی	$[۲ , ۳]$	مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی
برد	؟	مجموعه‌ی اعداد حقیقی	؟	؟



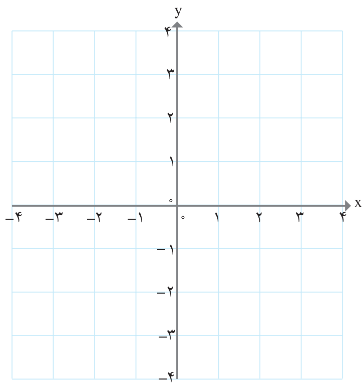
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

گاهی اوقات یک تابع را می‌توان بر حسب یک عبارت جبری از یک متغیر نمایش داد. این گونه نمایش تابع را نمایش جبری یا ضابطه‌ی تابع می‌نامند.

۳- همه‌ی نمایش‌های زیر جبری به حساب می‌آیند.

$$f(x)=\frac{۲}{۵}x-۳ \qquad g(x)=x^{۲} \qquad h(x)=\frac{(x+۱)}{(x+۲)} \qquad k(x)=\sqrt{x}$$

همان گونه که در فعالیت قبل مشاهده کردید، در هنگام نمایش جبری تابع نه تنها عبارت جبری که تابع را نمایش می‌دهد مهم است، بلکه دامنه و برد تابع نیز مهم است. هرچند همه توابع را نمی‌توان با یک عبارت جبری نمایش داد، با این حال تعداد زیادی از آن‌ها با یک عبارت جبری قابل نمایش هستند. در بسیاری از موقعیت‌ها کار با نمایش جبری یک تابع ساده‌تر و مناسب‌تر از کار با دیگر نمایش‌های تابع است. به طور مثال درمورد تابع (خط) $f(x)=۲x$ از نمایش تابع به صورت مجموعه زوج‌های مرتب کم‌تر استفاده می‌شود. البته به جای معادله‌ی $y=۲x$ می‌توانیم از $f(x)=۲x$ استفاده کنیم. در مثال سوختن شمع معادله‌ی تابع را می‌توان به صورت $f(x)=-۴x+۲۰$ یا $y=-۴x+۲۰$ نوشت. همچنین توابع داده شده در مثال ۳ را به صورت زیر نیز نمایش می‌دهیم:

$$y=\frac{۲}{۵}x-۳ \qquad y=x^{۲} \qquad y=\frac{(x+۱)}{(x+۲)} \qquad y=\sqrt{x}$$

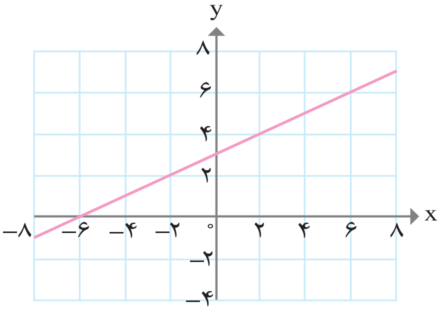
مسائل

۱- اگر تابع f با معادله‌ی $f(x)=۲x-۵$ داده شده باشد، مطلوب‌است:

الف) رسم نمودار تابع f

ب) $f(۲)\ ,\ f(۳)\ ,\ f(۰)\ ,\ f(-۷)\ ,\ f(\frac{۵}{۲})\ ,\ f(\sqrt{۷})$

۲- نمایش جبری تابع صفحه‌ی بعد را که نمودار آن ارائه شده است به‌دست آورید.
از بین نمایش‌های مختلفی که برای نمایش این تابع می‌شناسید، کدام‌یک را مناسب‌تر می‌دانید؟



۳- جدول زیر دمای سنگ‌های زیرزمین را در عمق‌های متفاوت زیر سطح زمین نشان می‌دهد :

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما (سانتی‌گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰

الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به‌دست می‌دهد و نمودار آن را رسم کنید.

ب) معادله‌ای برای این تابع به‌دست آورید.

ج) دمای یک سنگ که در عمق ۱۰ کیلومتری زیرزمین است را بیابید.

۴- تابع ۳- = $f(x)$ را رسم کنید و مقادیر $f(۲)$ و $f(۱۰۰)$ و $f(-۵)$ را به‌دست آورید.

۵- برای یک تابع خطی می‌دانیم که : $f(۲) = ۱۱$ و $f(۰) = ۷$

نمودار این تابع را رسم کنید و معادله‌ی آن (نمایش جبری تابع) را بنویسید.

چرا این تابع وارون‌پذیر است؟ رابطه‌ای ریاضی برای وارون این تابع به‌دست آورید.

۶- آیا جدول زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟ چرا؟

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۴	۹	۱۵	۲۵	۳۶

۷– علی در هر دقیقه پیاده‌روی، مسافت ۰/۲ کیلومتر را طی می‌کند. اگر مسافتی که علی در t دقیقه طی می‌کند را با f(t) نمایش دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به‌دست می‌دهد؟

الف) $f(t) = t - ۰/۲$ ب) $f(t) = ۰/۲t$

ج) $f(t) = t + ۰/۲$ د) $f(t) = ۰/۲ - t$

۸– اگر در مورد تابع g داشته باشیم : $g(۰) = ۲\ ,\ g(۱) = ۵\ ,\ g(-۲) = \frac{۱}{۳}\ ,\ g(۴) = ۳$

g را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. آیا g یک به یک است؟

۹– نمایش جبری تابع زیر را به‌دست آورید.

x	-۲	-۱	۰	۱	۴	۶
f(x)	۱۳	۱۱	۹	۷	۱	-۳

آیا این تابع یک به یک است؟

۱۰– برای اندازه‌گیری دما از واحدهای «سانتی گراد C» و «فارنهایت F» استفاده می‌شود که با رابطه‌ی $F = \frac{۹}{۵}C + ۳۲$ به یک‌دیگر وابسته هستند.

الف) ۲۰– درجه‌ی سانتی‌گراد برحسب فارنهایت چه‌قدر می‌شود؟

ب) ۱۰۴ درجه‌ی فارنهایت چند سانتی‌گراد است؟

ج) معادله‌ای بنویسید که سانتی‌گراد را برحسب فارنهایت به‌دست دهد.

د) آیا رابطه‌ی بین این دو واحد یک تابع خطی را معلوم می‌کند؟

۱۱– طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را برحسب تابعی از عرض آن بیان کند.

۱۲– آیا تابعی یک به یک می‌توان یافت که دامنه‌ی آن شامل سه عضو و برد آن تنها از دو عضو تشکیل شده باشد؟

۱۳- اگر $h(x) = ۲x + ۱$ در هر یک از حالت‌های زیر نمودار $h(x)$ را رسم کنید.

الف) دامنه‌ی h برابر مجموعه‌ی $A = \{۰ , ۱ , ۲ , -۵\}$ باشد.

ب) دامنه‌ی h برابر مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت باشد.

پ) دامنه‌ی h برابر همه‌ی اعداد حقیقی باشد.

۱۴- در یک تابع خطی که نمودار آن از مبدأ مختصات می‌گذرد، داریم : $f(۳)=۱۵$، رابطه‌ای ریاضی برای وارون این تابع به‌دست آورید.

فصل ۳

توابع خاص
نامعادله و تعیین علامت

توابع خاص و حل نامعادله

روابط زیادی بین پدیده‌ها یافت می‌شود که خطی نیست. به‌طور مثال رابطه‌ی بین طول ضلع یک مربع و مساحت آن و یا رابطه‌ی بین شعاع یک دایره و مساحت آن غیر خطی است. اگر x طول ضلع یک مربع باشد، مساحت آن تابعی از x است و به صورت $f(x)=x^۲$ یا $y=x^۲$ قابل نمایش است. این تابع چون به کمک یک چند جمله‌ای درجه دوم از x بیان شده است، یک تابع درجه دوم از x نامیده می‌شود. به جای x که معمولاً آن را متغیر مستقل[1] می‌نامند می‌توان از حروف دیگری نیز استفاده کرد. مثلاً c ، b ، a و ... بنابراین $f(x)=x^۲$ یا $f(a)=a^۲$ یا $f(b)=b^۲$ در حقیقت یک تابع را نمایش می‌دهند، هرگاه مقادیری که برای x یا a یا b در نظر می‌گیریم یکسان باشند. بنابراین اگر شعاع یک دایره را با r نمایش می‌دهیم تابعی که مساحت دایره را بر حسب شعاع آن معلوم می‌کند به صورت $f(r)=\pi r^۲$ است که باز هم یک تابع درجه دوم است. به نظر شما دامنه‌ی این تابع چیست؟

به عنوان مثالی دیگر کُره‌ای به شعاع r را در نظر بگیرید. حجم کُره، تابعی از شعاع آن است. این تابع را می‌توان با نمایش جبری $f(r)=\frac{۴}{۳}\pi r^۳$ معرفی کرد. عبارت جبری $\frac{۴}{۳}\pi r^۳$ یک چند جمله‌ای درجه سوم برحسب r است. بنابراین $f(r)=\frac{۴}{۳}\pi r^۳$ را یک تابع درجه سوم می‌نامند. به همین ترتیب برخی از توابع هستند که معادله‌های آن‌ها، چند جمله‌ای‌های جبری بر حسب یک متغیر هستند. به این گونه توابع، توابع چند جمله‌ای گفته می‌شود.

به طور مثال توابع زیر همگی توابع چند جمله‌ای هستند :

$$h(a)=۲a^۳+۳a^۲-۱ \qquad g(x)=۵x^۳+۷ \qquad f(x)=x^۲+۳x+۱$$

$$f(x)=-۴x+۹ \qquad f(x)=\frac{۳}{۸}x^۵+۶x^۴+۲x-\sqrt{۷} \qquad t(b)=b^۴+۲b-۱$$

---

۱. معمولاً اعضای دامنه را متغیر مستقل و مقادیر تابع را متغیر وابسته می‌نامند.

۱- فرض کنید که تابع $f(x)=x^{۲}$ تابعی باشد که مساحت یک مربع را برحسب طول ضلع آن به‌دست می‌دهد. نمودار این تابع را رسم کنید و آن را با نمودار تابعی که با معادله‌ی $y=x^{۲}$ داده می‌شود مقایسه کنید. دامنه و برد هر دو را به‌دست آورید و با یک‌دیگر مقایسه کنید.

۲- تابع $g(x)$ با جدول زیر داده شده است. جاهای خالی را پر کنید.

x	-۳	-۲	۰	۱	۲	۳
$g(x)=x^{۲}+۵$	۱۴					

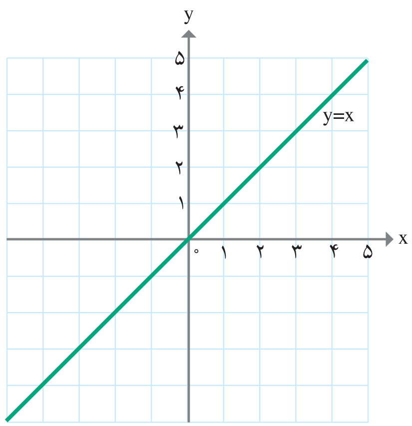
تابع همانی: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو در دامنه دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، آن تابع را تابع همانی می‌نامند.

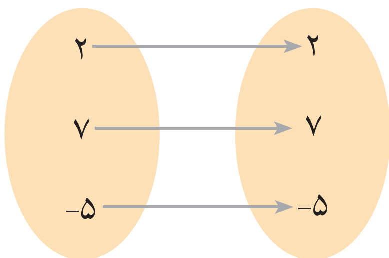
در ادامه سه تابع با نمایش‌های متفاوت ارائه شده است:

الف) توضیح دهید که چرا هر یک از نمونه‌های ارائه شده تابع همانی هستند؟

ب) آیا می‌توانید تفاوت‌های آن‌ها را بیان کنید؟

ج) دامنه و برد هر کدام را به‌دست آورید.





اعداد طبیعی	۱	۲	۳	۴	۵	...
اعداد طبیعی	۱	۲	۳	۴	۵	...

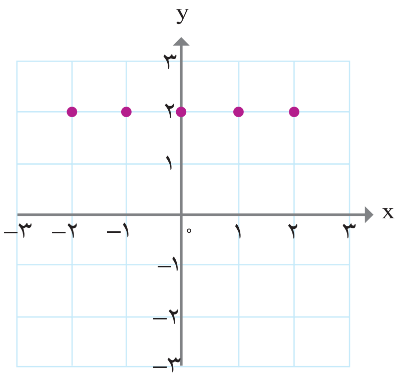
تابع همانی را معمولاً با معادله‌ی $f(x) = x$ نیز نمایش می‌دهند.

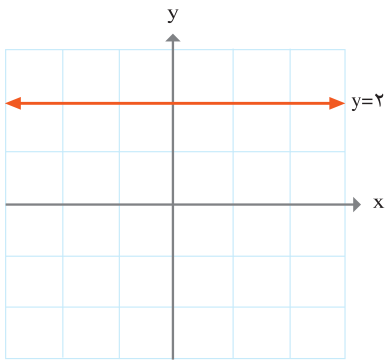
تابع ثابت

فرض کنید که دمای هوا در ساعات ۹ تا ۱۱ صبح تغییر نکند. این رابطه بین ساعات روز و دمای هوا، گونه‌ای از تابع را مشخص می‌کند که تابع ثابت نامیده می‌شود.

نمونه‌هایی از تابع ثابت در این‌جا ارائه شده‌اند، آن‌ها را با هم مقایسه کنید و تفاوت‌ها و شباهت‌های آن‌ها را بیان کنید. بُرد این توابع چه خاصیتی دارد؟

ساعات روز	۹	۹/۵	۱۰	۱۰/۵	۱۱
دمای هوا	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸





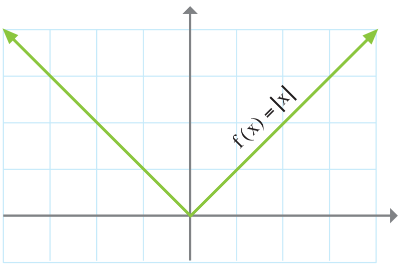
تابع ثابت تابعی است که برد آن تنها شامل یک عضو است.

تابع قدر مطلق

جدول زیر تابعی را نشان می‌دهد که اعداد را به قدر مطلق آن‌ها نظیر می‌کند.

x	-۴	$-\frac{۷}{۳}$	-۲	-۱	۰	۱	$\sqrt{۲}$	$\frac{۷}{۳}$	۳	۴
$f(x)$	۴	$\frac{۷}{۳}$	۲	۱	۰	۱	$\sqrt{۲}$	$\frac{۷}{۳}$	۳	۴

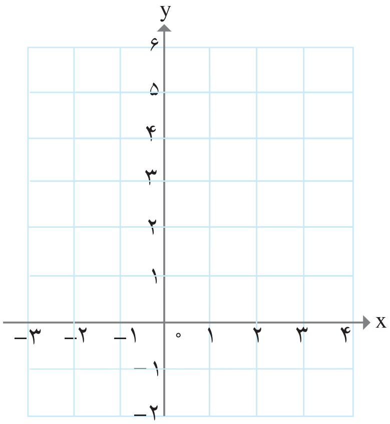
تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدر مطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدر مطلق نامیده می شود. تابع قدر مطلق را با $f(x)=|x|$ نمایش می‌دهند.



در حالتی که دامنه‌ی تابع قدر مطلق مجموعه اعداد حقیقی در نظر گرفته شود، نمودار تابع را رسم کرده‌ایم. برد این تابع، همه‌ی اعداد نامنفی یعنی : $[۰ , +\infty)$ است. همان گونه که از جدول و شکل پیداست، این تابع یک به یک نیست.

با تکمیل جدول، زیر تابع $f(x)=|x|+۳$ را رسم کنید.

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۳
$f(x)=\|x\|+۳$				۳	$\frac{۷}{۲}$			

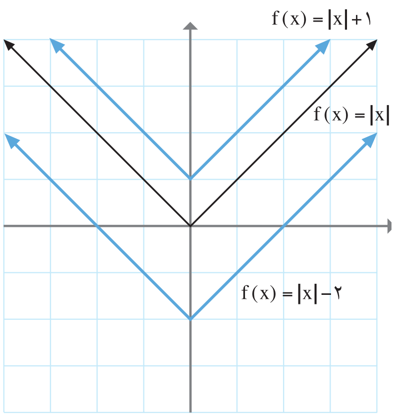


در شکل زیر با کمک تابع $f(x)=|x|$ دو تابع $f(x)=|x|+۱$ و $f(x)=|x|-۲$ را رسم کرده‌ایم.

الف) با استفاده از شکل‌های زیر توضیح دهید که هر یک از آن‌ها چگونه رسم شده است.

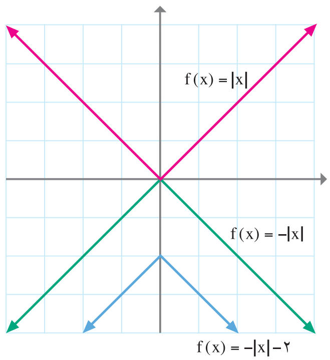
ب) دامنه و برد هر یک را به‌دست آورید. آیا این توابع یک به یک هستند؟

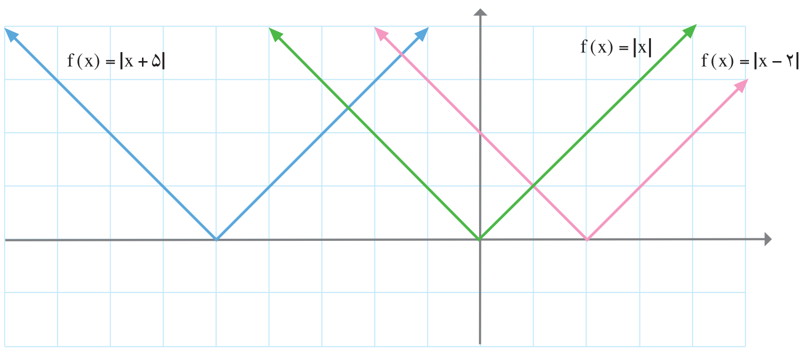
ج) به همین روش تابع $f(x)=|x|+۴$ را رسم کنید.



این گونه رسم یک تابع به کمک تابعی دیگر را «انتقال» نمودار تابع می‌نامند.

در شکل‌های زیر دامنه و برد توابعی که به کمک تابع قدر مطلق $f(x)=|x|$ رسم شده‌اند را بیابید. $f(x)=-|x|$ چگونه رسم شده است؟





مسائل

۱- نمودار تابع قدر مطلق $f(x)=|x-۴|$ را در حالت‌های زیر رسم کنید.

الف) $\{۴$ و ۳ و ۲ و $۱\}=$ دامنه‌ی f

ب) مجموعه‌ی همه‌ی اعداد بزرگ‌تر یا مساوی ۴ = دامنه‌ی f

ج) همه‌ی اعداد حقیقی = دامنه‌ی f

۲- توابع $f(x)=|x|+۲$ و $g(x)=|x+۲|$ و $h(x)=|x|-\frac{۲}{۳}$ را به کمک انتقال تابع قدر مطلق $f(x)=|x|$ رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را به‌دست آورید.

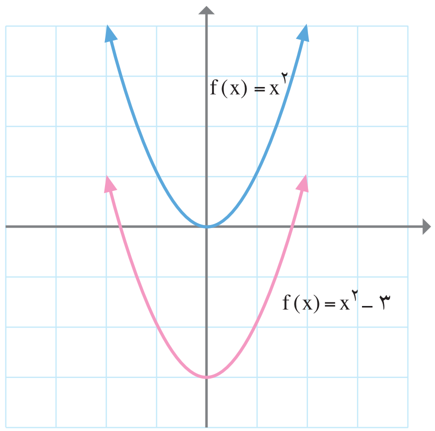
۳- توابع $h(x)=\left|\frac{۱}{۲}x\right|$ و $f(x)=|x|$ و $g(x)=|۲x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و با یک‌دیگر مقایسه کنید. برای رسم این توابع از جدولی شبیه تابع قدر مطلق کمک بگیرید.

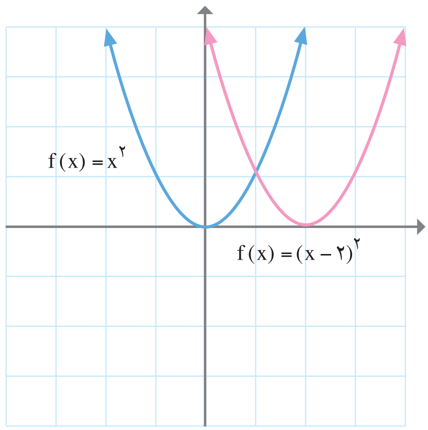
رسم نمودار برخی از توابع درجه دوم به کمک انتقال تابع $f(x)=x^2$

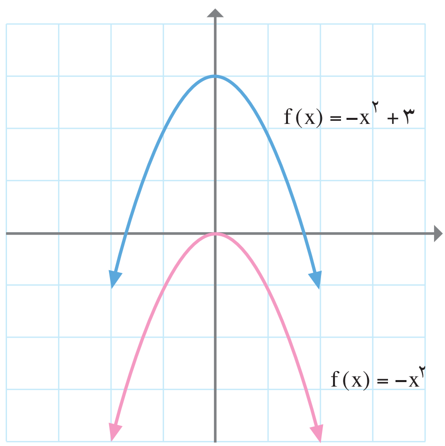
مانند آن چه که در مورد توابع قدر مطلق دیدیم، می‌توان نمودار برخی از توابع درجه دوم را به کمک انتقال تابع $f(x)=x^2$ یا همان $y=x^2$ رسم کرد.

الف) توضیح دهید که هر یک از نمودارهای زیر چگونه به کمک نمودار $y=x^2$ رسم شده‌اند.

ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را با استفاده از نمودار آن‌ها به‌دست آورید.







مسائل

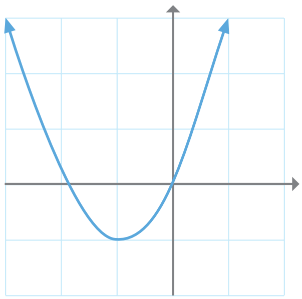
۱– در شکل‌های زیر نمودار توابع درجه دوم زیر رسم شده‌اند.

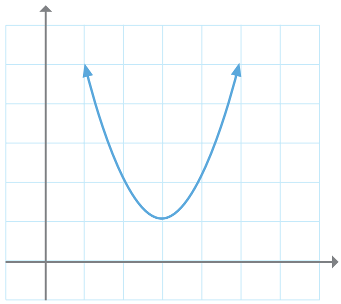
$f(x)=(x+۱)^{۲}-۱$ $\qquad$ $f(x)=(x-۵)^{۲}-۲$

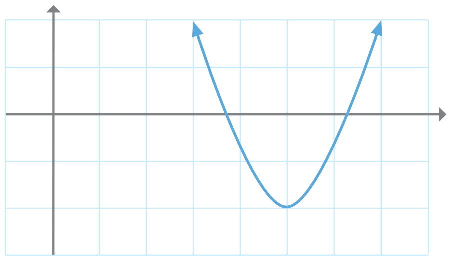
$f(x)=-(x+۱)^{۲}+۳$ $\qquad$ $f(x)=(x-۳)^{۲}+۱$

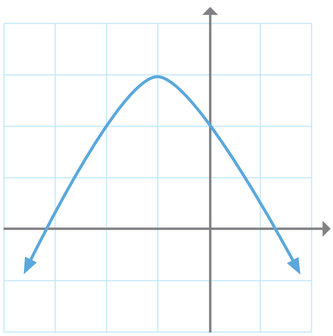
الف) تعیین کنید که هر یک از نمودارها چه تابعی را نشان می‌دهند.

ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را به‌دست آورید :









۲– نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$f(x)=(x-۵)^{۲}$ $\qquad$ $f(x)=۲x^{۲}$ $\qquad$ $f(x)=-(x-۱)^{۲}-۴$ $\qquad$ $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۲}$

توابع گویا

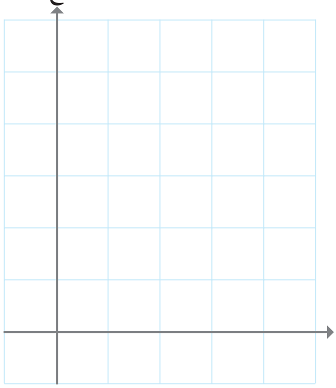
همان‌گونه که برخی از توابع به کمک یک چند جمله‌ای قابل نمایش هستند، بعضی از توابع را می‌توان به کمک یک عبارت گویا نمایش داد. هر یک از توابع زیر یک تابع گویا است :

$$f(x)=\frac{۲}{x+۱} \qquad g(x)=\frac{x^{۲}-۳x+۱}{-\frac{۲}{۵}x+۷} \qquad h(x)=\frac{\sqrt{۲}x-۱}{x^{۲}-۴}$$

۱- جدول زیر رابطه‌ی بین اعداد طبیعی و وارون آن‌ها را نشان می‌دهد.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	...
f(x)	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{۱}{۸}$	...

الف) معادله‌ای برای رابطه‌ی داده شده بر حسب x به‌دست آورید. آیا این معادله یک تابع گویا را نشان می‌دهد؟



ب) دامنه‌ی این تابع را معلوم کنید.

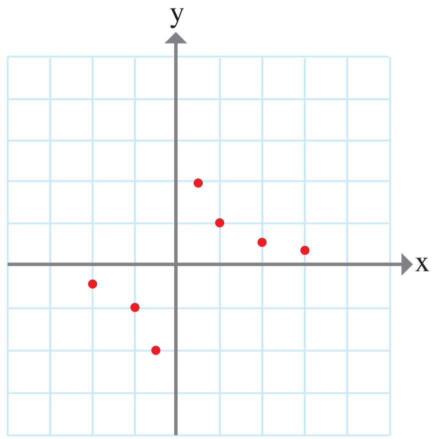
ج) نمودار این تابع را (با مشخص کردن زوج‌های مرتب داده شده در جدول، در یک صفحه مختصات) رسم کنید.

۲- در فعالیت ۱ به جای اعداد طبیعی،اعداد حقیقی را در نظر بگیرید. تنها عدد حقیقی که وارون ندارد، صفر است، زیرا تقسیم بر صفر تعریف نشده است. یک نمایش مناسب برای تابعی که به هر عدد حقیقی، وارون آن را نسبت دهد، نمایش جبری $f(x)=\frac{۱}{x}$ یا معادله‌ی $y=\frac{۱}{x}$ است. دامنه‌ی چنین تابعی، مجموعه‌ی همه‌ی اعدادی است که به ازای آن‌ها عبارت گویای $\frac{۱}{x}$ تعریف شده است،یعنی دامنه‌ی تابع $f(x)$ مجموعه‌ی همه‌ی اعداد حقیقی به‌جز صفر یا همان $R-\{۰\}$ است.

الف) چه تفاوتی بین دامنه‌ی تابع f و دامنه‌ی تابع به‌دست آمده در فعالیت ۱ وجود دارد؟

ب) قسمتی از نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. بقیه‌ی نمودار را کامل کنید. (زوج‌های مرتب بیش‌تری را از تابع مشخص کنید و نقاط به‌دست آمده روی نمودار را به هم وصل کنید.)

ج) آیا می‌توانید به کمک شکل به‌دست آمده، برد تابع f را تعیین کنید؟ آیا این تابع یک به یک است؟



دامنه‌ی توابع گویای زیر را به‌دست آورید :

$$f(x)=\frac{x+۱}{x^{۲}-۹}\qquad g(x)=\frac{۲۵۵x}{۱۰۰-x}\qquad h(x)=\frac{x+۷}{۳x}\qquad k(x)=\frac{\frac{۱}{۲}x-۴}{x^{۲}+۱}$$

توابع گویا در دنیای واقعی دارای کاربردهای زیادی هستند. در فعالیت زیر با یکی از این کاربردها آشنا می‌شویم :

هزینه‌ی پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری وصنعتی از رودخانه‌ای به‌وسیله‌ی تابعی

مانند : $f(x)=\frac{۲۵۵x}{۱۰۰-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و f(x) هزینه‌ی پاک‌سازی بر حسب میلیون تومان است . مثلاً هزینه‌ی پاک‌سازی ۱۰ درصد آلودگی برابر است با :

$$f(۱۰)=\frac{۲۵۵\times ۱۰}{۱۰۰-۱۰}=\frac{۲۵۵۰}{۹۰}=۲۸/۳۳$$

پل زمان خان – استان چهارمحال و بختیاری

الف) هزینه‌ی پاک‌سازی ۵۰ درصد از آلودگی این رودخانه چه‌قدر است؟

ب) آیا امکان داردکه با توجه به تابع داده شده، ۱۰۰ درصد از آلودگی رودخانه را از بین برد؟

ج)دامنه‌ی تابع داده شده را با توجه به رابطه‌ی داده شده به کمک بازه نمایش دهید.

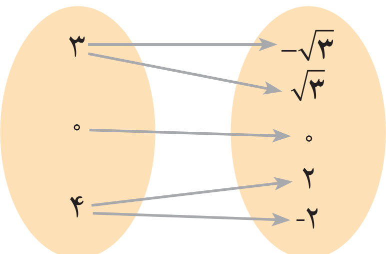
د) دامنه‌ی این تابع را با دامنه‌ی تابع g مطرح شده در تمرین در کلاس مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای از این مقایسه به‌دست می‌آید؟

توابع رادیکالی[1]

پیدا کردن دامنه وبرد هر تابع دلخواهی، همیشه کار ساده‌ای نیست .در این کتاب تأکید بر پیدا کردن دامنه‌ی توابع است. زیرا در بیش‌تر کاربردهای توابع در دنیای واقعی، تعیین دامنه اهمیت بیش‌تری از پیدا کردن برد آن دارد. ضمناً به‌طور معمول پیدا کردن دامنه، کمک به یافتن برد آن می‌نماید.

مثال

۱– می‌دانید که تنها اعداد نامنفی ریشه‌های دوم دارند. در رابطه‌ی مقابل که با نمودار ون نمایش داده شده است ، هر عدد به ریشه‌های دوم آن نظیر شده است، چرا این رابطه یک تابع نیست؟

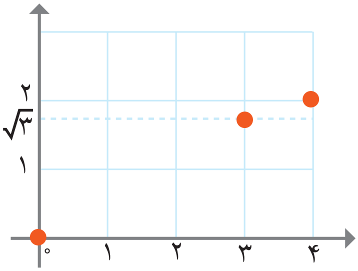


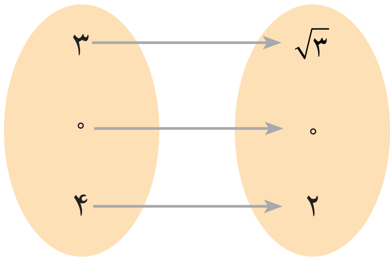
اگر رابطه‌ی بالا را به این شکل تغییر دهیم که هر عدد به ریشه‌ی دوم نا منفی آن نظیر شود یک تابع به‌دست می‌آید. برخی نمایش‌های متفاوت تابع به‌دست آمده در صفحه‌ی بعد ارایه شده است.

۱. در این کتاب تنها با برخی از توابع رادیکالی آشنا می‌شویم.

x	۰	۳	۴
y	۰	$\sqrt{۳}$	۲

$$\{(۰,۰),(۳,\sqrt{۳}),(۴,۲)\}$$

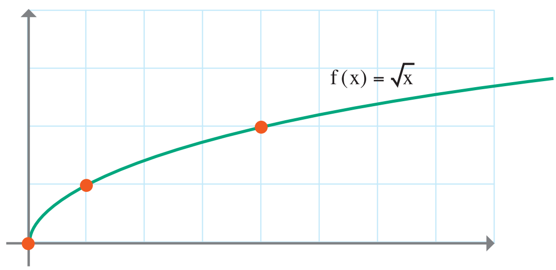




دامنه‌ی این تابع مجموعه‌ی $A=\{۰,۳,۴\}$ وبرد آن $B=\{۰,\sqrt{۳},۲\}$ است.

نمایش جبری این تابع به صورت $y=\sqrt{x}$ است که یک تابع رادیکالی نامیده می‌شود.

۲– در مثال قبل سه عدد ۰ و۳ و۴ به ریشه‌ی دوم نامنفی خود نظیر شدند. حال فرض کنید که تابعی مانند f هر عدد نامنفی را به ریشه‌ی دوم نامنفی آن نظیر کند. دامنه‌ی این تابع مجموعه‌ی همه‌ی اعداد نامنفی است که می‌توان آن را به صورت بازه‌ی $[۰,+\infty)$ نمایش داد. برد تابع f نیز $[۰,+\infty)$ است .



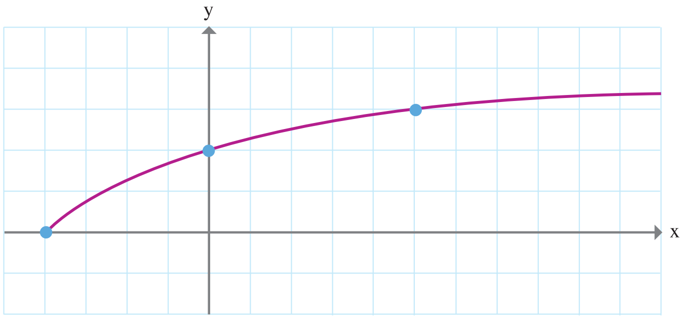
معادله‌ی این تابع به صورت $y=\sqrt{x}$ یا $f(x)=\sqrt{x}$ است و نمودار آن در شکل مقابل رسم شده است.

آیا کار با سه نمایش دیگر این تابع (زوج مرتبی، نمودار ون و جدول) آسان‌تر و کارآمدتر هستند؟

۳– دامنه وبرد تابع $f(x)=\sqrt{x+۴}$ را به‌دست آورید ونمودار آن را رسم کنید.

حل : برای یافتن دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{x+۴}$ یا $y=\sqrt{x+۴}$ باید اعدادی را بیابیم که برای آن‌ها حاصل x+۴ نامنفی باشد. به عبارت دیگر باید داشته باشیم : $x+۴\geq ۰$

جواب این نامعادله $x \geq -۴$ است. پس دامنه‌ی تابع بازه $[-۴,+\infty)$ است. نمودار تابع f چنین است :



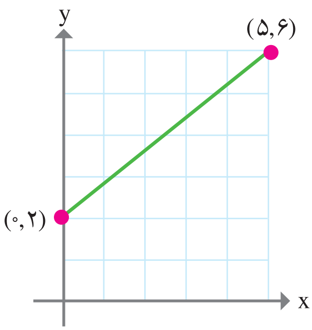
برد این تابع یا مجموعه‌ی مقادیری که برای y به دست می‌آید، بازه‌ی $[۰,+\infty)$ است.

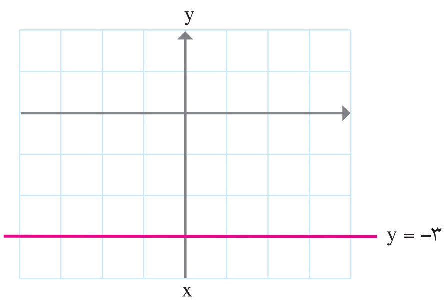
۱– نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را به‌دست آورید.

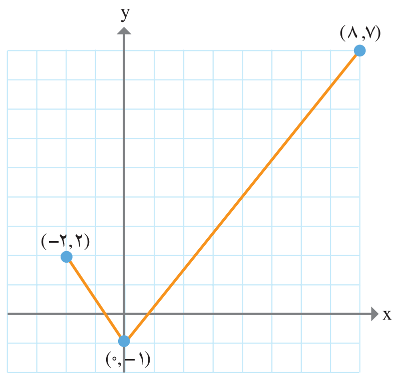
الف) $g(x)=\sqrt{x}+۴$ ب) $h(x)=\sqrt{x-۴}$

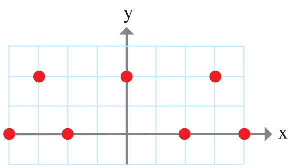
ج) $t(x)=\sqrt{x}-۴$ د) $m(x)=\sqrt{۲x-۵}$

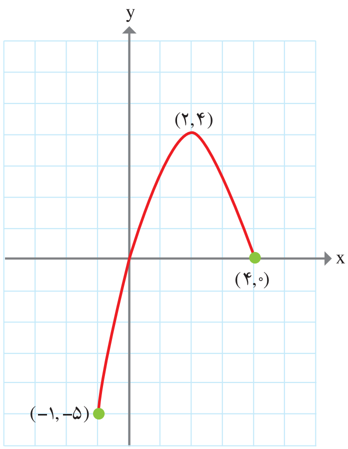
۲– در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هریک از این توابع را به کمک نمودار آن‌ها معلوم کنید. در هر مورد که امکان دارد دامنه و برد را به صورت یک بازه نمایش دهید.

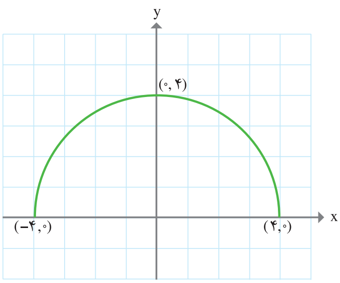


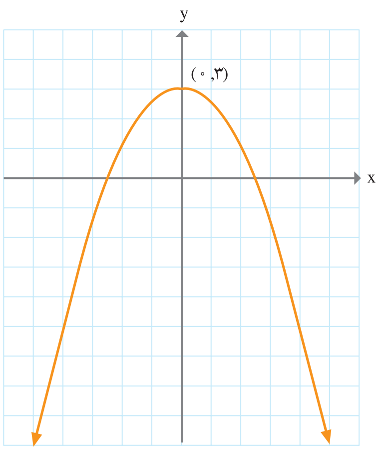



y
x
(۸,۷)
(−۲,۲)
(۰,−۱)


y
x


y
x
(۲,۴)
(۴,۰)
(−۱, −۵)


y
x
(۰, ۴)
(−۴,۰)
(۴,۰)


y
x
(۰ ,۳)

مسائل

۱- نمودار توابع زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید ودامنه وبرد هر یک را به‌دست آورید. کدام‌یک از این توابع خطی است؟

$f(x)=\frac{۱}{۲}x \qquad g(x)=\frac{۱}{۲}x+۲ \qquad h(x)=\frac{۱}{۲}(x-۲)$

۲- دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

$y=\sqrt{۲x} \qquad y=\sqrt{-۵+x} \qquad y=\sqrt{-x+۳} \qquad y=\sqrt[۳]{x}$

$f(x)=\sqrt{x-۲}+۱ \qquad g(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{x+۳} \qquad h(x)=-\sqrt{x}-۱ \qquad y=\sqrt{-۲x+۷}$

۳- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید .

الف) دامنه‌ی تابع $f(x)=x^۲-۱$ برابر $(۰,\infty)$ و بُرد آن نیز $(۰,\infty)$ است.

ب) دامنه‌ی تابع $f(x)=۲|x|-\frac{۱}{۳}$ همه‌ی اعداد حقیقی و بُرد آن $(۲,\infty)$ است.

ج) دامنه‌ی تابع ثابت $f(x)=۲$ برابر $(-\infty,+\infty)$ است.

د) اگر $f(x)=۲x+۱$ آن‌گاه : $f(۱)=\frac{f(۲)}{۲}$

۴- اگر $f(x)=۲x-۳$ مطلوب است :

$f(۰) \qquad f(۱) \qquad f(\frac{۳}{۲}) \qquad f(a) \qquad f(۲x) \qquad f(x+۱)$

۵- دامنه‌ی توابع زیر را به‌دست آورید.

$f(x)=x^۲-\frac{۳}{۵}x-۱ \qquad h(x)=\frac{۵}{x^۲-۲x} \qquad y=\frac{۳x^۲-x+۷}{x^۲-۲x-۳} \qquad g(x)=\frac{۱}{x^۲}$

$y=\frac{۲x-۷}{۴} \qquad y=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}} \qquad f(z)=\frac{z+۲}{\sqrt{z-۲}} \qquad y=\frac{\sqrt{x+۱}}{x}$

۶- نمودار یک تابع خطی f از نقاط (۳ و۴-) و (۳- و ۰) می‌گذرد. مطلوب‌است :

$f(-۱)\ ,\ f(-۴)$

۷- دو مثال از دو تابع متفاوت ارایه کنید که هر دو دارای دامنه‌ها و بردهای مساوی باشند، ولی هیچ زوج مرتبی در بین آن‌ها مشترک نباشد.

۸- فرض کنید برای تابعی مانند f داشته باشیم : $f(x-۱)=۵x$ مطلوب‌است : $f(۷)$.

۹- نمودار تابعی مانند y را رسم کنید که دامنه‌ی آن $[-۳,۳]$ وبرد آن $[۰,۵]$ باشد، مشروط بر آن‌که :

الف) تابع y یک به یک باشد.

ب) تابع y یک به یک نباشد.

۱۰- یک شرکت حمل ونقل مسافر، برای هر گروه ۸۰ نفره یا بیش‌تر از افراد ، نرخ حمل ونقل هر مسافر توسط اتوبوس دربستی را از فرمول زیر تعیین می‌کند :

$n \geq ۸۰ \qquad (n-۸۰)۰/۰۵-۸=$ نرخ حمل ونقل هر مسافر بر حسب هزار تومان

که در آن n تعداد مسافر است و $n\in\{۹۰،۱۰۰،۱۱۰،۱۲۰،۱۳۰،۱۴۰،۱۵۰\}$

الف) نرخ حمل ونقل هر مسافر برای یک گروه ۱۰۰ نفره چه‌قدر است؟

ب) هزینه‌ی حمل ونقل ۱۰۰مسافر چه‌قدر است؟

ج) تابعی بنویسید که هزینه‌ی حمل ونقل را برحسب n به‌دست دهد .

د) جدول زیر را کامل کنید و سپس نمودار R(n) را رسم نمایید. بیش‌ترین مقدار به‌دست آمده برای R(n) را چگونه تفسیر می‌کنید؟

n (تعداد مسافر)	۹۰	۱۰۰	۱۱۰	۱۲۰	۱۳۰	۱۴۰	۱۵۰
R(n) (هزینه‌ی کل بر حسب هزار تومان)	...	...	...	...	۷۱۵	...	...

۱۱- فرض کنید $f(x)=۳x$ و $g(x)=۲x+۱$ کدام‌یک از روابط زیر در مورد f و g درست وکدام‌یک نادرست است ؟

الف) $f(a+b)=f(a)+f(b)\quad,\quad g(a+b)=g(a)+g(b)$

ب) $f(ab)=f(a).f(b)\quad,\quad g(ab)=g(a).g(b)$

ج) $f(kx)=kf(x)\quad,\quad g(kx)=kg(x)$

۱۲– فرض کنید $f(x) = mx + b$ یک تابع خطی باشد وداشته باشیم :

$f(۲) = ۵$ و $f(x + ۲) = f(x) + ۲$

الف) مطلوب‌است تابع f و رسم نمودار آن.

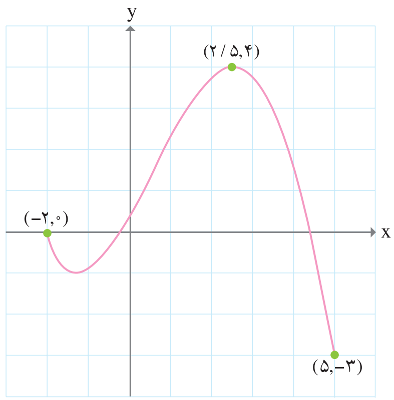
ب) آیا می‌توان گفت که در هر تابع خطی رابطه‌ی $f(x + ۲) = f(x) + ۲$ برقرار است؟

۱۳– یک تانکر گاز از یک استوانه و دونیم‌کره به شعاع r در دوانتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

۱۴– تابعی بنویسید که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی : $\{۰, ۲, ۵\}$ باشد و هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کند :

الف) یک به یک نباشد ب) $f(۰) > f(۲)$

۱۵–دامنه وبرد تابع زیر را پیدا کنید.

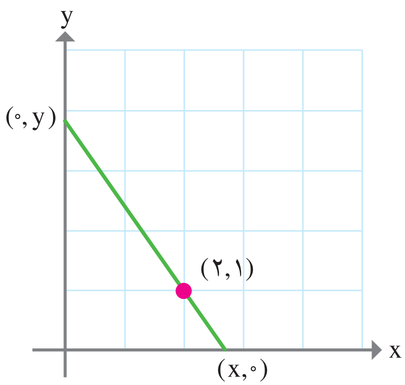


۱۶– اگر $f(x) = \dfrac{x + ۳}{x^۲ - ۴}$ مطلوب‌است :

$f(۰)$ و $f(۱)$ و $f(\sqrt{۲})$

۱۷– اگر $f(x) = x^۳ + ۲x^۲ + ax + b$ و $f(۱) = ۵$ و $f(-۲) = -۱$ مقدار $۳a - ۲b$ را به دست آورید.

۱۸– به ازای هر خط که از نقطه (۱و۲) می‌گذرد وجهت مثبت محورهای مختصات را در نقاط (۰وx) و (۰وy) قطع می‌کند، یک مثلث قائم‌الزاویه در ناحیه‌ی اول محورهای مختصات تشکیل می‌شود.رابطه‌ای ریاضی بنویسید که مساحت هرمثلث قائم‌الزاویه را به عنوان تابعی از x به‌دست دهد. دامنه‌ی این تابع را معلوم کنید.



۱۹- کدام‌یک از توابع زیر وارون پذیرند؟

$f = \{(۳,۲),(۴,۲),(۵,۲)\}$ $\quad$ $g = \{(۱,۲),(۳,۴),(۵,۲)\}$

$h = \{(۴,۱),(۵,۲),(۶,۱)\}$ $\quad$ $k = \{(۱,۱),(۲,۵),(۳,۶)\}$

نامعادله و تعیین علامت

مسائل بسیاری هست که برای حل آن‌ها باید علامت عبارت‌های جبری را مشخص کنیم. به بیان دیگر نیاز است تا بدانیم آن عبارت به ازای چه مقادیری مثبت یا منفی است. به‌طور اختصار این موضوع «تعیین علامت» نامیده می‌شود.

به عنوان مثال و همان‌گونه که در بخش‌های قبل دیده‌اید برای تعیین دامنه‌ی تابعی مثل $f(x)=\sqrt{x-۱}$ نیاز است تا $x-۱$ تعیین علامت شود. همچنین در تمرین‌های گذشته آمده بود که سود حاصل از تولید یک کالا در یک شرکت از رابطه‌ی $y=۶x-۳۰۰$ به دست می‌آید، که x تعداد کالای تولیدی و y سود حاصل از فروش برحسب تومان است. جدول زیر مقادیر y را به ازای چند مقدار مختلف از x نشان می‌دهد.

x	۱	۵	۵۰	۱۰۰	۱۰۰۰
$y=۶x-۳۰۰$	۲۹۴-	۲۷۰-	۰	۳۰۰	۵۷۰۰

همان‌طور که دیده می‌شود با تولید ۵۰ عدد کالا سود ما صفر خواهد بود و اگر کمتر از این تعداد کالا تولید شود ضرر خواهد بود یا به عبارتی سود منفی خواهد شد.

در نتیجه تعیین علامت $y=۶x-۳۰۰$ مشخص می‌کند سود و ضرر به ازای چه تعداد کالا خواهد بود.

در این بخش قصد داریم به تعیین علامت عبارت‌هایی به شکل $y=ax+b$ که در آن a و b اعداد حقیقی و معلومی هستند بپردازیم. هر عبارت جبری به شکل $ax+b$ که a و b دو عدد بوده و $a \neq ۰$ یک «چند جمله‌ای درجه‌ی اوّل» برحسب x نامیده می‌شود.

فعالیت

عبارت $y=۴x+۸$ را درنظر بگیرید.

الف) جدول زیر را تکمیل کنید :

x	-۵	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\sqrt{۲}$
$y=۴x+۸$			۰			۱۰	
علامت y			۰			+	

ب) نامعادله‌ی $۴x+۸\geq ۰$ را حل کنید.

ج) نمودار تابع $f(x)=۴x+۸$ را رسم کرده و با استفاده از آن مقادیری از x که $f(x)=۰$ ، $f(x)>۰$ و $f(x)<۰$ را روی شکل مشخص کنید.

د) قسمت‌های ب و ج را برای $y=-۲x+۶$ انجام دهید. مشخص کنید علامت ضریب x در دو عبارت مذکور چه تغییری در جواب ایجاد می‌کند؟

اکنون به مثال زیر توجه کنید :

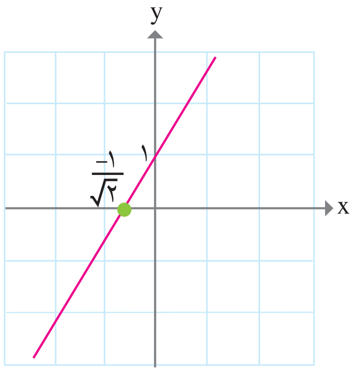
مثال

می‌خواهیم علامت عبارت $y=\sqrt{۲}x+۱$ را به ازای مقادیر مختلف از x مشخص کنیم. روشن است که به ازای $x=\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$ ، داریم: $y=۰$.

اگر $x>\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$ آنگاه $\sqrt{۲}x>-۱$ و در نهایت داریم $\sqrt{۲}x+۱>۰$. پس عبارت فوق به ازای $x>\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$ مثبت است. به سادگی دیده می‌شود که اگر $x<\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$ آنگاه $y<۰$. جمع‌بندی این مطالب در جدول زیر دیده می‌شود.

x	$x<\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$	$\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$	$x>\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$
علامت y	−	۰	+

همچنین نمودار $y=\sqrt{۲}x+۱$ به صورت زیر است :



و می‌توان نتایج جدول فوق را از روی آن به‌دست آورد.

روشن است که به ازای $x>\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$ ، y به دست آمده بالای محور xها، یعنی مثبت است و به ازای $x<\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$ ، $y=\sqrt{۲}x+۱$ پایین محور xها قرار دارد، یعنی منفی است و به ازای $x=\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$ برابر صفر است.

با توجه به فعالیت و مثال بالا در مورد تعیین علامت $y=ax+b$ در حالتی که $a>۰$ می‌توان گفت :

x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x>-\frac{b}{a}$
علامت y=ax+b	−	۰	+

مثال

۱– عبارت $y=۳x+۴$ به صورت زیر تعیین علامت می‌شود.

x	$x<-\frac{۴}{۳}$	$-\frac{۴}{۳}$	$x>-\frac{۴}{۳}$
y=۳x+۴	−	۰	+

۲– دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۱}$ را مشخص کنید.

جدول تعیین علامت $۲x-۱$ به شکل زیر است :

x		$\frac{۱}{۲}$	
علامت ۲x−۱	−	۰	+

بنابراین دامنه‌ی تابع عبارت است از $\left[\frac{۱}{۲},+\infty\right)$.

۱- دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{۱۰۰-۵x}$ را مشخص کنید.

۲- جدول تعیین علامت $y=ax+b$ را در حالتی که $a<۰$ رسم کنید.

۳- با مراجعه به ابتدای بحث مشخص کنید برای این که سود شرکت حداقل ۱۰ میلیون تومان باشد، چه نامعادله‌ای باید حل شود؟ حداقل چه تعداد کالا باید تولید شود؟

همان‌طور که می‌دانیم حاصل‌ضرب دو عدد مثبت یا دو عدد منفی همواره مثبت است. همچنین اگر دو عدد علامت‌های مختلفی داشته باشند، حاصل‌ضرب آن‌ها همواره منفی است. با توجه به این مطلب می‌توان مثال زیر را حل نمود.

مثال

علامت عبارت $y=(x-۱)(x-۲)$ را به ازای مقادیر مختلف x بیابید. جدول تعیین علامت برای $x-۱$ و $x-۲$ به صورت زیر است.

x		۲	
x−۲	−	۰	+

x		۱	
x−۱	−	۰	+

می‌توان اطلاعات مربوط به این دو جدول را در یک جدول به شکل زیر نمایش داد.

x		۱		۲	
x−۱	−	۰	+		+
x−۲	−		−	۰	+

در نتیجه برای تعیین علامت $(x-۱)(x-۲)$ باید مشخص کنیم x در چه محدوده‌ای قرار دارد. سه محدوده در جدول فوق وجود دارد: $x\geq ۲$ ، $۱<x<۲$ و $x\leq ۱$.

بنابراین تعیین علامت عبارت $(x-۱)(x-۲)$ به صورت زیر است(؟)

x		۱		۲	
(x−۱)(x−۲)	+	۰	−	۰	+

در نتیجه مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $(x-۱)(x-۲)\geq ۰$ عبارت است از $(-\infty,۱]\cup[۲,+\infty)$.
برای سهولت در نوشتن، تمام جدول‌های صفحه‌ی قبل را می‌توان در یک جدول به صورت زیر نشان داد.

x		۱		۲	
$x-۱$	$-$	۰	$+$		$+$
$x-۲$	$-$		$-$	۰	$+$
$(x-۱)(x-۲)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

۱ــ عبارت $(۲x-۱)(x-۴)$ را تعیین علامت کنید.

۲ــ نامعادله‌ی $x^۲-۷x+۱۰\geq ۰$ را با استفاده از تجزیه حل کنید.

۳ــ مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $x^۲\geq ۲۵$ چیست؟

۴ـ تابع $g(x)=\sqrt{-(x-۱)(x-۳)}$ به ازای چه مقادیری از x قابل قبول است؟

علی به عنوان یکی از اعضای تیم والیبال مدرسه‌اش وارد زمین شده است و آماده‌ی شنیدن صدای سوت آغاز بازی از سوی داور است. او به محض شنیدن صدای سوت ضربه‌ای به توپ می‌زند، فرض کنید $h(t)=-(t-۱)^۲+۳$ نشانگر ارتفاع توپ در زمان t برحسب متر باشد. (مبدأ زمان با سوت داور و زمان نیز برحسب ثانیه است).

الف) جدول زیر را کامل کنید.

t	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲
$h(t)$						

$h(۰)$ نشانگر چه کمیتی می‌تواند باشد؟

ب) نمودار $h(t)$ را رسم کنید. چهار زمان مختلف بیابید که در آن‌ها توپ در فاصله‌ی حداقل ۲/۵ متری از زمین باشد.

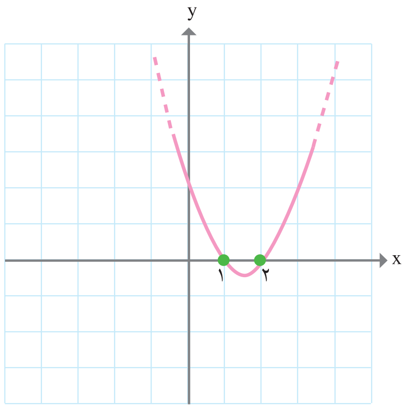
ج) پس از چه زمانی توپ به زمین برخورد خواهد کرد؟ روی نمودار آن را مشخص کنید.

د) با توجه به نمودار $h(t)$ مشخص کنید آیا توپ به ارتفاع بیش از ۳ متر می‌رسد؟

هـ) تمام زمان‌هایی که توپ در ارتفاع بیشتر از یا مساوی ۲/۵ متر از زمین است را با یک نامعادله نشان داده و آن‌ها را بیابید. با توجه به نمودار نیز به این سؤال پاسخ دهید.

همان‌گونه که در فعالیت فوق دیده می‌شود موارد زیادی پیش می‌آید که برای تعیین علامت یک عبارت و یا حل یک نامعادله درنظر گرفتن نمودار آن مفید می‌باشد.

مثال



در قسمت‌های قبل تابع $f(x)=(x-۱)(x-۲)$ تعیین علامت شد، نمودارتابع به شکل مقابل است.

همان‌طور که می‌دانید تعیین علامت به این معناست که عبارت به ازای چه مقادیری منفی یا مثبت است. در شکل مقابل مشهود است که دربازه‌ی (۲ و ۱) نمودار زیر محور xها قرار دارد، یعنی مقدار تابع منفی است. در دو نقطه‌ی ۲ و ۱ (ریشه‌ها) برابر صفر بوده و خارج از بازه‌ی $[۱,۲]$ نمودار بالای محور xها می‌باشد یعنی عبارت $(x-۱)(x-۲)$ مثبت است.

۱- با رسم نمودار $y=x^۲-۲$ جواب نامعادله‌ی $x^۲-۲\geq ۰$ را به‌دست آورید.

۲- نامعادله‌ی $x^۲+۱>۰$ به ازای چه مقادیری از x برقرار است؟ با رسم نمودار $y=x^۲+۱$ وضعیت آن را نسبت به محور xها بررسی کرده و به سؤال قبل جواب دهید.

۳- اگر $f(x)=(x-۱)(x-۲)$، با توجه به نمودار آن تمام مقادیر x که $f(x)\geq ۲$ را روی شکل مشخص کنید.

۴- با توجه به نمودارهای درجه‌ی دومی که تا به حال در کتاب دیده‌اید آیا می‌توانید با رسم شکل حالاتی که نمودار محور xها را قطع نمی‌کند مشخص کنید؟

تعیین علامت چند جمله‌ای درجه‌ی دوم

در مطالب گذشته با تعیین علامت عبارت‌هایی نظیر $(x-۱)(x-۲)=x^۲-۳x+۲$ ، $x^۲-۲=(x-\sqrt{۲})(x+\sqrt{۲})$ و $x^۲-۷x+۱۰$ آشنا شدیم. در این بخش قصد داریم روش کلّی برای تعیین علامت یک عبارت به شکل $y=ax^۲+bx+c$ که در آن a و b و c اعداد معلومی هستند ارائه کنیم.

سه عبارت بالا و به طور کلّی هر عبارت به شکل $ax^۲+bx+c$ که $a\neq ۰$ و a و b و c اعداد معلومی هستند را یک «چند جمله‌ای درجه‌ی دوم» بر حسب x می‌نامیم.

فعالیت

چند جمله‌ای درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c$ را درنظر بگیرید.

الف) اگر $ax^۲+bx+c=۰$ ، به روش Δ ریشه‌های آن را مشخص کنید. (فرض کنید $\Delta\geq ۰$).

ب) اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم مذکور باشند، نشان دهید :

$$x_۱+x_۲=\frac{-b}{a} \quad \text{و} \quad x_۱x_۲=\frac{c}{a}$$

ج) با استفاده از (ب) جاهای خالی زیر را پر کنید.

$$ax^۲+bx+c=a(x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a\left[x^۲-(.......)x+(.......)\right]=a(.......)(.......)$$

پس از حل فعالیت فوق در می‌یابید که اگر یک عبارت درجه‌ی دوم دو ریشه داشته باشد آنگاه به صورت حاصل ضرب دو عبارت درجه‌ی اوّل با یک ضریب (همان a) تجزیه می‌شود. چون روش تعیین علامت عبارت‌های درجه‌ی اوّل و حاصل ضرب آن‌ها را می‌دانیم به راحتی می‌توان آن عبارت درجه‌ی دوم را تعیین علامت کرد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال

عبارت $y=۲x^۲-۳x+۱$ را تعیین علامت کنید.

با روش Δ به سادگی به دست می‌آید که ۱ و $\frac{۱}{۲}$ ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲-۳x+۱=۰$ هستند.

بنابراین مطابق فعالیت بالا داریم $۲x^۲-۳x+۱=۲(x-۱)(x-\frac{۱}{۲})$. جدول تعیین علامت به قرار صفحه‌ی بعد است :

x		$\frac{1}{2}$		1	
$2x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$2(x-1)(x-\frac{1}{2})$	$+$	0	$-$	0	$+$

اگر ضریب ۲ در مثال فوق عددی منفی، مثلاً -2 بود چه تغییری در جدول تعیین علامت رخ می‌داد؟

اگر $a>0$ و عبارت درجه‌ی دوم $y=ax^2+bx+c$ دو ریشه مانند x_2 و x_1 داشته باشد طبق فعالیت داریم : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

فرض کنید $x_1<x_2$ ، در این صورت جدول تعیین علامت y به صورت زیر است.

x		x_1		x_2	
ax^2+bx+c	$+$	0	$-$	0	$+$

۱- توابع زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $f(x)=6x^2-8x+2$

ب) $g(x)=-3x^2+9x-2$

۲- اگر $y=ax^2+bx+c$ و معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ دو ریشه مانند x_1 و x_2 داشته باشد و $a<0$ جدول تعیین علامت آن را بکشید. تفاوت آن با حالتی که $a>0$ چیست؟

۳- اگر $x_1=x_2$ در هر دو حالت $a>0$ و $a<0$ جدول تعیین علامت ax^2+bx+c را مشخص کنید.

۴- با رسم نمودار $y=(x+1)^2$ و $y=-(x+1)^2$ این دو عبارت را تعیین علامت کنید. شباهت این سؤال با سؤال قبل چیست؟

تا کنون با مطالعه‌ی قسمت‌های قبل با روش تعیین علامت عبارت‌های درجه‌ی دومی که ریشه‌ی حقیقی دارند آشنا شده‌اید. در این بخش قصد داریم تا عبارت‌های درجه‌ی دومی را بررسی کنیم که ریشه‌ی حقیقی ندارند.

حتماً از سال گذشته به یاد دارید که در این حالت $\Delta < 0$. به عبارت دیگر اگر معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ ریشه نداشته باشد آنگاه $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. در نتیجه $4ac - b^2 > 0$. از طرفی

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$

$$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] =$$

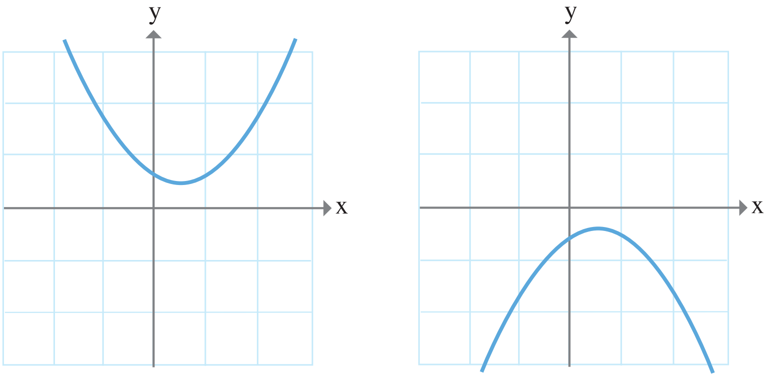
$$a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

از دوعبارت داخل کروشه یکی مثبت و یکی نامنفی است. بنابراین عبارت داخل کروشه همواره مثبت است. (به ازای هرx) در نتیجه علامت $ax^2 + bx + c$ ، بسته به این که a چه علامتی دارد همواره یک نوع است. جدول تعیین علامت به شکل زیر است.

	x	دلخواه
$a > 0$	$ax^2 + bx + c$	$+$
$a < 0$	$ax^2 + bx + c$	$-$

البته این موضوع از منظر دیگری نیز قابل بررسی است. همان‌گونه که می‌دانیم پس از رسم نمودار $y = ax^2 + bx + c$ محل برخورد آن با محور xها نشانگر ریشه‌های آن می‌باشد، زیرا در این مکان‌ها $y = 0$. بنابراین اگر عبارت مذکور ریشه نداشت به این معنی است که هیچ گاه $y = 0$ اتفاق نمی‌افتد یعنی هیچ نقطه‌ای از نمودار روی محور xها نیست. با توجه به نمودارهای درجه‌ی دوم مختلفی که تاکنون دیده‌ایم دراین حالت یا نمودار به تمامی بالای محور xها قرار دارد یا به تمامی پایین محور xها قراردارد.

در این صورت شکل کلّی به دو صورت زیر است :



چرا اگر قسمتی از نمودار عبارت درجه‌ی دوم بالای محور xها و قسمتی پایین باشد آنگاه آن عبارت حتماً ریشه دارد؟

مثال

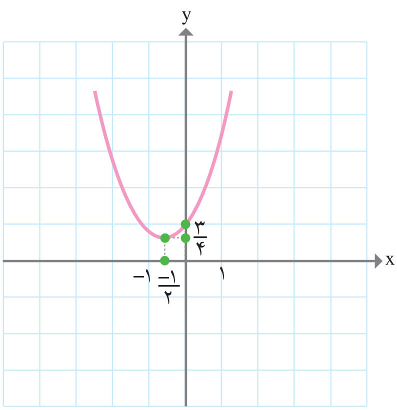
تمام جواب‌های نامعادله‌ی $x^2+x+1\geq 0$ را بیابید.

داریم :

$$x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+1$$
$$=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$$

چون همواره $(x+\frac{1}{2})^2\geq 0$ پس $x^2+x+1\geq\frac{3}{4}>0$ ، در نتیجه به ازای هر x نامساوی $x^2+x+1\geq 0$ درست است، یعنی جواب نامعادله عبارت است از مجموعه‌ی $\mathbb{R}$.

درضمن نمودار $y=x^2+x+1$ به صورت مقابل است.



همان‌گونه که مشاهده می‌شود نمودار مقابل به‌ازای هر x بالای محور xها قراردارد، یعنی مثبت است.

مثال

عبارت $y = x^۲ - x + ۵$ را تعیین علامت کنید.

می‌دانیم $\Delta = ۱^۲ - ۴ \times ۵ = -۱۹$ ، بنابراین $\Delta < ۰$ و همچنین ضریب $x^۲$ برابر یک است که مثبت می‌باشد. بنابراین طبق مطالب قبل همواره $x^۲ - x + ۵ > ۰$. یعنی مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $x^۲ - x + ۵ > ۰$ عبارت است از $\mathbb{R}$.

جمع‌بندی تمام مطالب مربوط به تعیین علامت چند جمله‌ای درجه‌ی دوم $ax^۲ + bx + c$ به صورت زیر است :

حالت اوّل : $\Delta > ۰$ ، در این حالت دو ریشه‌ی متمایز مانند $x_۱$ و $x_۲$ داریم $(x_۱ < x_۲)$

x		$x_۱$		$x_۲$	
$y = ax^۲ + bx + c$	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

حالت دوم : $\Delta = ۰$ ، در این حالت یک ریشه داریم :

x		$x_۱ = x_۲$	
$y = ax^۲ + bx + c$	موافق علامت a	۰	موافق علامت a

حالت سوم : $\Delta < ۰$

x	دلخواه
$y = ax^۲ + bx + c$	موافق علامت a

تمرین

۱ــ نشان دهید اگر $x \in \mathbb{R}$ آنگاه $۲x^۲ - ۲x + ۱ \geq ۰$.

۲ــ اگر $a > ۰$ ثابت کنید $a + \frac{۱}{a} \geq ۲$.

(یعنی حاصل جمع هر عدد مثبت با معکوس خودش حداقل دو است.)

۳ــ اگر $b > 0$ و a با استفاده از تمرین قبل نشان دهید : $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geq 4$

۴ــ دامنه‌ی هریک از توابع زیر را بیابید.

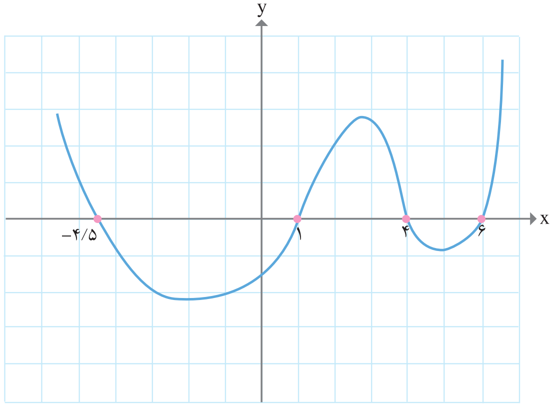
الف) $f(x) = \sqrt{-2x^2 - 3x + 1}$

ب) $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

ج) $h(x) = \sqrt{x(x-3)^2}$

د) $i(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$

۵ ــ نمودار تابع f مطابق شکل زیر است.



$\sqrt{f(x)}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف شده است؟

۶ــ تمامی اعدادی که اگر جای a قرار گیرند عبارت $y = ax^2 + 3x + 1$ همواره مثبت می‌شود را بیابید.

۷ــ به ازای هریک از مقادیر a معادله‌ی $x^2 + 2x + a = 0$ یا ریشه‌ی حقیقی ندارد یا دو ریشه‌ی متمایز یا دو ریشه‌ی یکسان دارد. در هریک از این سه حالت تمام مقادیر ممکن برای a را بیابید.

۸ ــ مهدی و امید در حال تمرین برای مسابقه‌ی فوتبال هستند. آن‌ها قرار است تمرین شوت زدن انجام دهند. با شنیدن صدای سوت مربّی هرکدام به توپی که جلوی پایشان است ضربه‌ای می‌زنند. اگر $h(t) = -t^2 + 10t$ نشانگر ارتفاع توپ مهدی در زمان t و $g(t) = -3t^2 + 18t$ نشانگر ارتفاع توپ امید در زمان t باشد طی چند ثانیه توپ امید در ارتفاع بالاتر از ارتفاع توپ مهدی قرار دارد؟ (t برحسب ثانیه و $h(t)$ و $g(t)$ برحسب متر هستند.)

فصل ۴

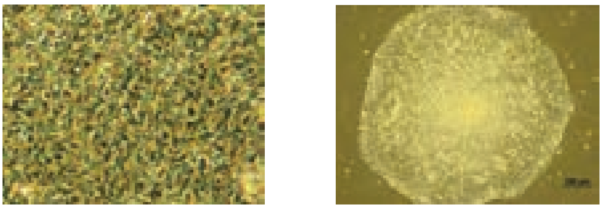
توابع نمایی و لگاریتمی

آیا رشد سلول‌ها، نظام‌های بانکداری در دنیا و نحوه‌ی محاسبه‌ی سنّ یک درخت کهنسال یا یک سنگ از دوران باستان، تابع قانون‌مندی‌های خاصی است؟

امروزه باتوجه به رشد روزافزون روش‌های پژوهشی کمی در علوم، هم نیاز و هم امکان استفاده از روش‌های ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر افزایش یافته‌است و مهم‌ترین ویژگی به کارگیری ریاضی، توانایی الگوسازی‌های ریاضیات است. یکی از جدیدترین این نمونه‌ها نقش الگوهای ریاضی در مطالعه‌ی سلول‌های بنیادی است.

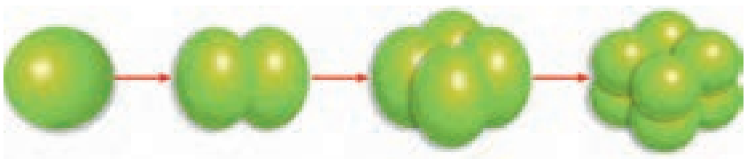
سلول‌های بنیادی

در یکی از روزهای سال ۱۳۸۲ این خبر به تمام دنیا مخابره شد. پژوهشکده‌ی رویان به عنوان مرکز تحقیقات علوم سلولی و درمان ناباروری جهاد دانشگاهی، موفق به تولید سلول‌های بنیادی جنینی انسان شد. این سلول‌ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می‌توانند تمام انواع سلول‌های بدن نظیر عصب، ماهیچه‌ی قلبی، کبدی و ... را به‌وجودآورند.



شکل ۱- (سمت چپ) یک مجموعه از سلول های بنیادی دارای حدود ۱۰ هزار سلول است که در سمت راست با بزرگ‌نمایی بیشتر، سلول‌ها به‌صورت واضح نشان داده شده‌اند.

در شکل (۲) روند تکثیر سلول بنیادی جنینی در ۴ مرحله نشان داده شده است.



شکل ۲

اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنینی مانند شکل (۲) ادامه پیدا کند :

فکر می‌کنید پس از مرحله‌ی نهم، چه تعداد سلول بنیادی خواهیم داشت؟ برای یافتن پاسخ، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

تعداد سلول‌های بنیادی تکثیر شده	تعداد مراحل تکثیر سلول‌ها
۱	۰
۲	۱
۴	۲
۸	۳
۱۶	۴
۳۲	۵
۶۴	۶
۱۲۸	۷
۲۵۶	۸
۵۱۲	۹

جدول ۱

با توجه به جدول (۱) می‌بینیم که سرعت تکثیر سلول‌های بنیادی چه‌قدر زیاد است !

۱– پس از چند مرحله، تعداد سلول‌های تکثیرشده، برابر با ۲۰۴۸ سلول خواهدبود؟

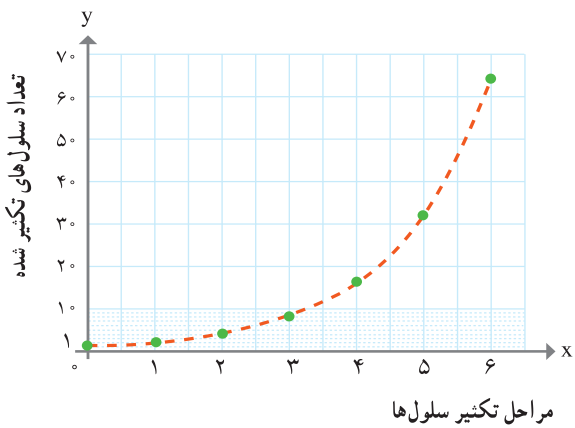
۲– آیا اعداد این جدول الگویی را مشخص می‌کنند؟ آیا می‌توانید قانونی بین این دو کمیت یعنی تعداد سلول‌ها و مراحل تکثیر آن‌ها به دست آورید؟

اگر بخواهیم تعداد سلول‌های تکثیر شده در مرحله‌ی بیستم یا مرحله‌ی سی‌ام و یا هر مرحله‌ی دیگری پیدا کنیم ، قطعاً باید به دنبال راه میان بری بگردیم وگرنه محاسبات طولانی و وقت‌گیر خواهد بود. به همین منظور جدول (۱) را بر حسب توان‌های ۲، بازنویسی می‌کنیم، جدول (۲) به دست می‌آید. شما هم جای علامت سؤال‌ها را با استفاده از ماشین حساب پر کنید.

مراحل تکثیر سلول‌ها	تعداد سلول‌های تکثیر شده
۰	$۲^{۰} = ۱$
۱	$۲^{۱} = ۲$
۲	$۲^{۲} = ۴$
۳	$۲^{۳} = ۸$
۴	$۲^{۴} = ۱۶$
⋮	⋮
۹	$۲^{۹} = ۵۱۲$
⋮	⋮
؟	۱۶۳۸۴
⋮	⋮
۲۰	$۲^{۲۰} =$ ؟
⋮	⋮

جدول ۲

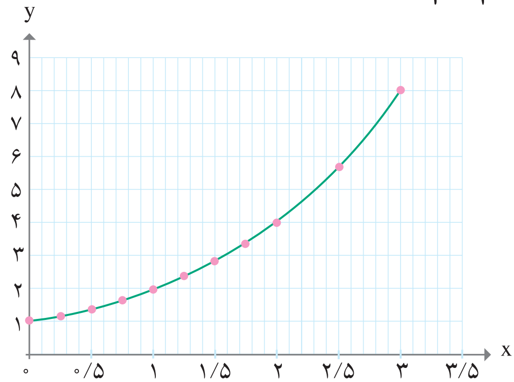
نمودار زیر، رابطه‌ی بین مراحل مختلف تکثیر سلول‌ها و تعداد سلول‌های تکثیر شده را نشان می‌دهد :



در فصل اوّل یک الگوی نمایی برای رشد باکتری‌ها به‌دست آوردیم که جرم تقریبی باکتری‌ها از ضابطه‌ی $g(x) = ۲^x$ ، محاسبه می‌شد، دوباره به آن فعالیت باز می‌گردیم :

۱– مقادیر به دست آمده در آن فعالیت را در جدولی تنظیم نمایید و نمودار آن را رسم کنید.

۲–اگر محور xها، بیانگر زمان و محور yها بیانگر جرم باکتری‌ها باشد، نمودار تابع $g(x) = ۲^x$ را برای $x = ۰, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}, ۱, \frac{۵}{۴}, \frac{۳}{۲}, \frac{۷}{۴}$ رسم نمایید و سپس آن را با شکل زیر مقایسه کنید .



می‌توانیم این نمودار را برحسب تابع $y = ۲^x$ بیان کنیم. به این گونه تابع‌ها، تابع نمایی می‌گویند که به دلیل متغیربودن نما، چنین نامی به آن‌ها داده شده است. برای تمام اعداد حقیقی x، (گویا و گنگ)، این منحنی را می‌توان برای نمایش تابع $g(x) = ۲^x$ به کار برد.

در این الگو رابطه‌ی بین زمان و مراحل رشد باکتری، یک تابع نمایی است زیرا رشد باکتری‌ها بر حسب زمان، به صورت توان‌ها یا نماهای ۲ است.

آیا عبارت $(-۲)^x$ را می‌توان به ازای تمام xهای حقیقی محاسبه کرد؟

هر تابع به صورت $y = a^x$ که a عددی حقیقی و $a \neq ۱$, $a > ۰$ و x یک متغیر است، یک تابع نمایی نامیده می‌شود.

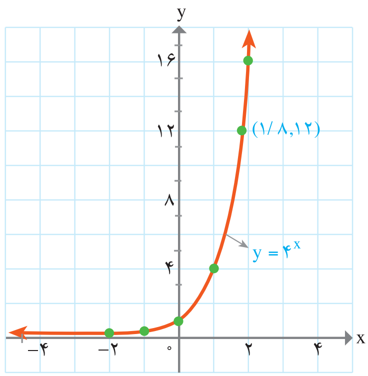
۱- دامنه و برد تابع $y = a^x$ را به دست آورید.

۲- آیا تابع نمایی $y = a^x$ یک تابع یک به یک است؟ چرا؟

الف) نمودار تابع نمایی $y = ۴^x$ را در نقاط داده شده جدول زیر به‌دست آورید و سپس نقاط را به یکدیگر وصل نمایید.

x	۴^x	y
-۲	$۴^{-۲}$	$\frac{۱}{۱۶}$
-۱	$۴^{-۱}$	$\frac{۱}{۴}$
۰	$۴^۰$	۱
۱	$۴^۱$	۴
۲	$۴^۲$	$۴^۲ = ۱۶$

حل :



نمودار تابع نمایی ۴^x ، محور yها را در نقطه‌ی ۱ قطع می‌کند.

ب) با استفاده از نمودار $y = ۴^x$ ، مقدار تقریبی $۴^{۱/۸}$ را به‌دست آورید.

حل : از نمودار این تابع می‌توان به‌طور تقریبی مقدار y را برای همه‌ی مقادیر حقیقی x به‌دست آورد. با توجه به نمودار مقدار تقریبی y وقتی که $x = ۱/۸$ است، برابر با ۱۲ می‌باشد.

با استفاده از ماشین حساب، مقدار تقریبی $۴^{۱/۸}$ برابر است با :

$$۴^{۱/۸} \cong ۱۲/۱۲۵۷۳۲۵۳$$

۱- نمودار تابع $y = ۷^x$ را به ازای $-۱ \leq x \leq ۲$ رسم کنید.

۲- مقدار تقریبی $y = ۷^{۰/۶}$ را با استفاده از نمودار تابع به‌دست آورید.

۳- نمودار توابع $y = ۳^x$ و $y = ۳^{x-۱}$ و $y = ۳^x + ۳$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و آن‌ها را با هم مقایسه کنید.

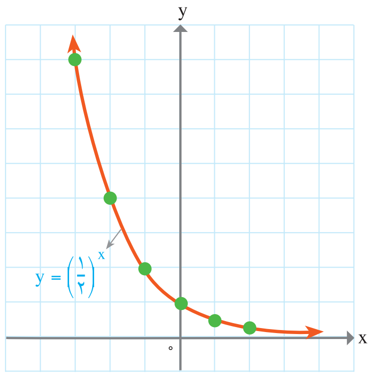
مثال

الف) نمودار $y=(\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید.

نقطه‌ی تقاطع منحنی با محور yها، چیست؟

حل : چند نقطه‌ی دلخواه را درنظر می‌گیریم.

x	$(\frac{1}{2})^x$	y
-3	$(\frac{1}{2})^{-3}$	8
-2	$(\frac{1}{2})^{-2}$	4
-1	$(\frac{1}{2})^{-1}$	2
0	$(\frac{1}{2})^{0}$	1
1	$(\frac{1}{2})^{1}$	$\frac{1}{2}$
2	$(\frac{1}{2})^{2}$	$\frac{1}{4}$



نقطه‌ی تقاطع نمودار با محور yها، ۱ می‌باشد.

ب) با استفاده از شکل تابع، مقدار تقریبی $(\frac{1}{2})^{-2/5}$ را به‌دست آورید.

حل : مقدار y وقتی که $x=-2/5$ است، حدوداً ۵/۵ است. مقدار تقریبی $(\frac{1}{2})^{-2/5}$ برابر با $5/656854249 \cong (\frac{1}{2})^{-2/5}$ می‌باشد.

۱- نمودار $y=(\frac{۱}{۳})^x+۲$ را رسم کنید. نقطه‌ی تقاطع منحنی با محور yها، چیست؟

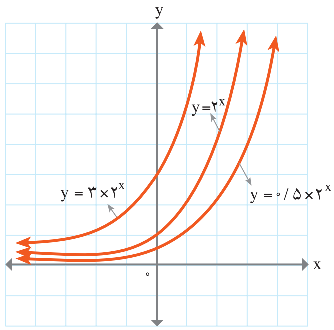
۲- با استفاده از نمودار تابع فوق، مقدار تقریبی $y=(\frac{۱}{۳})^{-۱/۵}+۲$ را به‌دست آورید.

توجه شود که در نمودار مثال قبل وقتی که x بزرگ می‌شود مقدار y کم می‌شود و برای xهای کوچک‌تر از صفر،مقدار y به سرعت افزایش می‌یابد. به طور کلی این وضعیت برای تمام توابع نمایی $y=a^x$ و $۰<a<۱$ برقرار است.

۳- از روی نمودار، ویژگی‌های تابع a^x را برای حالت $a>۱$ و $۰<a<۱$ را مشخص نمایید.

مثال

در شکل زیر، نمودار توابع $y=۲^x$ و $y=۳\times ۲^x$ و $y=۰/۵\times ۲^x$ نشان داده شده است. توجه کنید :



همان‌گونه که از نمودارها، مشخص است، محل تقاطع منحنی $y=۲^x$ با محور yها، نقطه‌ی $y=۱$، منحنی $y=۳\times۲^x$ ، نقطه‌ی $y=۳$ و برای منحنی $y=۰/۵\times۲^x$ ، نقطه‌ی $y=۰/۵$ می‌باشد.

باتوجه به نمودار این سه تابع، چه وجه مشترک و چه وجه اختلافی بین این توابع ملاحظه می‌کنید؟

۱– فکر می‌کنید توابع $y = ۱۰^{x}$ و $y = (\frac{۱}{۱۰})^{x}$ در چه نقطه‌ای محور yها را قطع می‌کنند. آیا می‌توانید بدون استفاده از جدول، نمودار تقریبی این دو تابع را رسم کنید؟

۲– نمودار توابع $y = ۳^{x}$ و $y = ۴^{x}$ و $y = ۵^{x}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و آن‌ها را در $x > ۰$ و $x < ۰$ با هم مقایسه کنید.

مثال

در جدول زیر، مقادیر x و y از یک تابع داده شده‌است. رفتار این تابع یا چگونگی تغییرات این تابع، یک تابع نمایی را مشخص می‌کند یا خیر؟ چرا؟

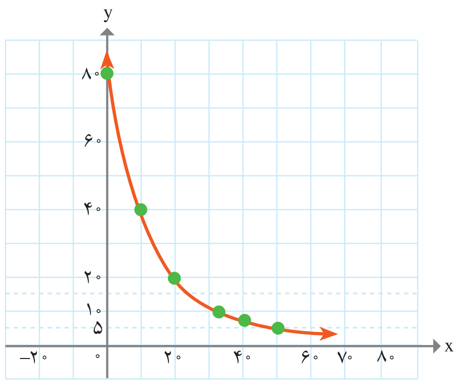
x	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
y	۸۰	۴۰	۲۰	۱۰	۵	۲/۵

حل : مقادیر x به صورت منظم، به‌فاصله‌ی ده واحد اضافه می‌شوند. مقادیر y به صورت زیر می‌باشند :

$$۸۰ \xrightarrow{\times\frac{۱}{۲}} ۴۰ \xrightarrow{\times\frac{۱}{۲}} ۲۰ \xrightarrow{\times\frac{۱}{۲}} ۱۰ \xrightarrow{\times\frac{۱}{۲}} ۵ \xrightarrow{\times\frac{۱}{۲}} ۲/۵$$

همان‌طورکه مشاهده می‌شود، مقادیر y با ضرب یک عدد ثابت در عدد قبلی، به‌دست می‌آیند. با توجه به این‌که دامنه‌ی تغییرات x به صورت منظم در یک فاصله‌ی معین است و میزان تغییرات مقادیر y بر اثر ضرب در یک عدد ثابت است لذا این داده‌ها می‌تواند بیانگر رفتار یک تابع نمایی باشد.

نقاط معلوم در جدول را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم و سپس آن‌ها را به یک‌دیگر وصل می‌کنیم. شکل این تابع، همانند شکل یک تابع نمایی است.



آیا می‌توانید عبارت دقیق تابع نمایی بالا را به‌دست آورید؟

۱– نمودار هر دسته ازتابع‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم‌کنید و وضعیت آن‌ها را نسبت به هم مقایسه کنید.

الف) $y = ۲^x$, $y = ۲^x + ۳$, $y = ۲^x - ۴$

ب) $y = ۲^x$, $y = ۲^{x+۵}$, $y = ۲^{x-۴}$

ج) $y = ۲^x$, $y = ۳^x$, $y = ۵^x$

۲– در جدول زیر نقاطی از یک تابع داده شده است. آیا چگونگی تغییرات این تابع، نمایی است؟ چرا؟

x	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
y	۱۵	۲۱	۲۷	۳۳	۳۹	۴۵

۳– رفتار یا چگونگی تغییرات کدام یک از توابع زیر، نمایی است؟

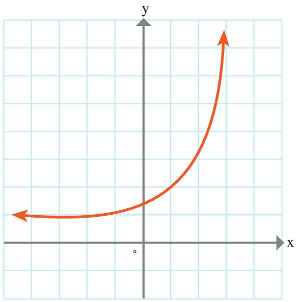
الف) $y = ۴^x + ۳$

ب) $y = ۲x(x - ۱)$

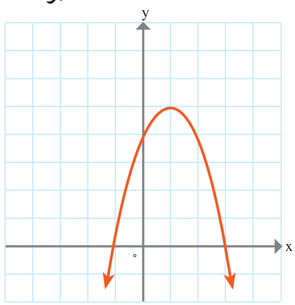
ج) $y + ۵x = ۸$

د) $y = x^۴ + ۳$

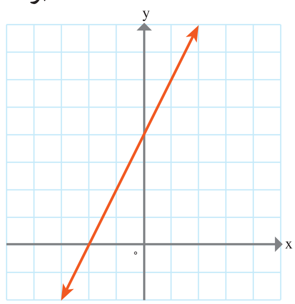
هـ)



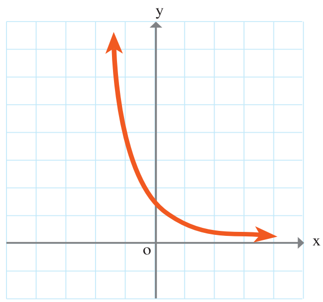
و)



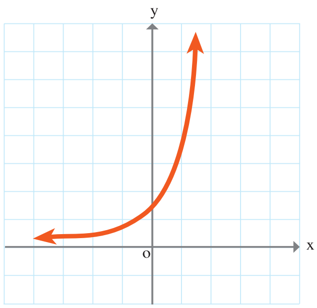
ز)



۴- نرگس و فاطمه نمودار $y = (\frac{۱}{۳})^x$ را رسم کرده‌اند. کدام یک از آن‌ها، نمودار را درست رسم کرده است؟ دلیل خود را توضیح دهید.



نمودار رسم شده توسط نرگس



نمودار رسم شده توسط فاطمه

۵- توابع $y = ۳^x$ و تابع $y = x^۳$ چه فرق اساسی با هم دارند؟

۶- نمودار توابع زیر را رسم کنید. محل تقاطع نقاط نمودار با محور yها را پیدا کنید. با استفاده از نمودار، مقدار تقریبی تابع در نقطه‌ی داده شده را به‌دست آورید.

الف) $y = ۹^x \; ; \; x = ۰/۸$

ب) $y = (\frac{۱}{۴})^x \; ; \; x = ۱/۷$

ج) $y = ۱۰^x \; ; \; x = ۰/۳$

د) $y = (\frac{۱}{۱۰})^x \; ; \; x = -۱/۳$

۷- مشخص کنید که آیا داده‌های زیر در هر جدول، بیانگر یک تابع نمایی است یا خیر؟ دلیل خود را توضیح دهید.

الف)

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y	۱	۶	۳۶	۲۱۶	۱۲۹۶	۷۷۷۶

ب)

x	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
y	۵	۹	۱۳	۱۷	۲۱	۲۵

ج)

x	۱	۰	-۱	-۲
y	۴	۱	-۲	-۵

د)

x	۰	۱	۲	۳
y	۱	۰/۵	۰/۲۵	۰/۱۲۵

هـ)

x	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
y	۱۶	۱۲	۹	۶/۷۵

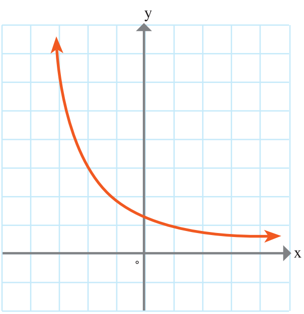
و)

x	−۱	۰	۱	۲
y	−۰/۵	۱/۵	−۲	+۴

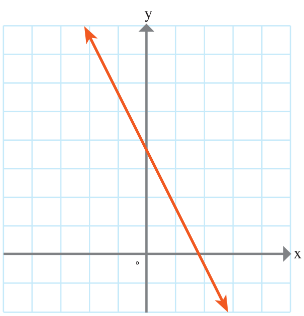
۸− مشخص کنید که از توابع زیر، کدام‌یک خطی هستند، کدام‌یک درجه‌ی دوم و کدام‌یک رفتار نمایی دارند؟

الف) $y = 7^x - 4$ ب) $y = -x(x+1)$ ج) $y + 3x = 5$

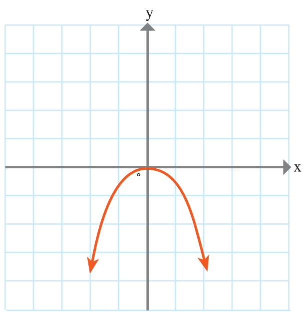
د)



هـ)



و)



(این قسمت از مطالب کتاب یعنی رشد و زوال نمایی، صرفاً جهت اطلاعات بیشتر دانش‌آموزان است و به عنوان سرفصل رسمی درس محسوب نمی‌شود.)

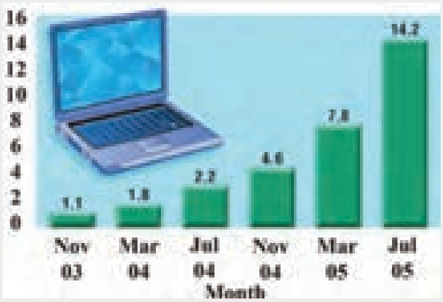
رشد و زوال نمایی

در این بخش به یکی از کاربردهای مهم توابع نمایی می‌پردازیم. ابتدا رشد نمایی را مورد توجه قرار می‌دهیم.

رشد نمایی

در یک بررسی آماری در یکی از کشورها، افزایش تعداد وبلاگ‌ها از نوامبر سال ۲۰۰۳ (آبان ماه ۱۳۸۲) تا جولای ۲۰۰۵ (تیرماه ۱۳۸۴) ۱۳/۷ درصد در هر ماه بوده است. فرض کنید y بیانگر تعداد کل وبلاگ‌ها برحسب میلیون و t بیانگر ماه‌ها از نوامبر ۲۰۰۳ باشد. در این صورت تعداد متوسط وبلاگ‌ها در هرماه از قانون (الگوی) زیر پیروی می‌کند.

$$y = ۱/۱(۱+۰/۱۳۷)^t = ۱/۱(۱/۱۳۷)^t$$



همان گونه که مشاهده می‌شود، رشد وبلاگ‌ها، یک نمونه از رشد نمایی است .
مثال دیگری از رشد نمایی سود بانکی می‌باشد.

پدر علی، مبلغ ۱۰۰ هزار تومان در حساب پس‌انداز، در یکی از بانک‌های کشور ذخیره می‌کند. طبق قانون اعلام شده از سوی بانک ، این پول‌ها در ساخت یک بزرگراه سرمایه‌گذاری می‌شود. پیش‌بینی بانک این است که با گرفتن عوارض و درآمدهای تبلیغاتی بزرگراه در ۱۰ سال آینده،

حداقل می‌توان ۱۴ درصد سود پرداخت کرد. پدر علی، به علی می‌گوید که این حساب پس انداز را برای تو باز کرده‌ام و الآن که سن تو ابتدای ۱۷ سال است حساب‌کن که در پایان ۲۵ سالگی ، چه میزان پول در حساب پس‌اندازت وجود خواهد داشت؟

علی شروع به محاسبه کرد. مقدار پس‌انداز پایان سال اول ابتدای ۱۸ سالگی برابر است با :

$$100{,}000+(100{,}000\times\frac{14}{100})=100{,}000+14{,}000=114{,}000$$

مقدار پس انداز در پایان ۱۸ سالگی برابر است با :

$$114{,}000+(114{,}000)\times 0/14=129{,}960$$

این عبارت را می‌توان به صورت زیر باز نویسی کرد :

$$[100{,}000(1/14)](1/14)=100{,}000(1/14)^2$$

به همین صورت اگر ادامه دهیم مقدار پس انداز علی پس از پایان ۲۵ سالگی برابر است با :

$$(100{,}000)\times(1+0/14)^9$$

بنابراین در حالت کلی، اگر نرخ سود ($100\ r$) درصد و سالیانه قابل پرداخت باشد ، در این صورت اگر مبلغی در پایان سال اول پرداخت می‌گردد (اصل به علاوه سود) y_1 باشد ،

داریم :

$$y_1=c+rc=c(1+r)$$

که c مقدار اولیه‌ی پس‌انداز است.

مبلغ پس از دو سال برابر است با :

$$y_2=[c(1+r)][1+r]=c(1+r)$$

مبلغ پس از ۳ سال برابر است با :

$$y_3=[c(1+r)^2][1+r]=c(1+r)^3$$

معادله‌ی کلی رشد نمایی، به صورت $y=c(1+r)^t$ است که در آن y بیانگر مقدار نهایی، Cبیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان رشد (تغییرات) برحسب اعشار و t بیانگر زمان است.

مثال

فرض کنید ۴۰۰ هزار تومان در حساب پس‌اندازی که هر سال ۱۲ درصد سود می‌دهد، ذخیره شده‌است. مبلغ پس‌انداز را در پایان سال سوم حساب کنید .

حل : با توجه به فرمول $y_n = c(1+r)^n$, $n = ۳$, $c = ۴۰۰$, $r = ۰/۱۲$ و لذا،

داریم : $y_۳ = ۴۰۰,۰۰۰(1+۰/۱۲)^۳ = ۵۶۱۹۷۱/۲$

یعنی مبلغ پس انداز در پایان ۳ سال برابر با ۵۰۶/۱۹۷ هزار تومان است.

فعالیت

رشد جمعیت ایران طی سال‌های ۱۳۳۵ تا ۱۳۶۵، حدود ۳ درصد بوده است. اگر جمعیت ایران در سال ۱۳۵۵، حدود ۱۹ میلیون نفر بوده باشد، جمعیت ایران در سال ۱۳۶۵ چند نفر بوده است؟ اگر این رشد همچنان باقی می‌ماند، جمعیت کشور در سال ۱۳۸۸ چند میلیون نفر خواهد بود؟

از سال ۱۳۷۰ رشد جمعیت ایران با کاهش بی‌سابقه‌ای به حدود ۱/۵ درصد تنزل یافت.بنابراین اگر جمعیت ایران در سال ۱۳۶۵ حدود پنجاه میلیون نفر بوده است، با نرخ رشد ۱/۵ درصد، جمعیت ایران در سال ۱۳۸۸چند نفر خواهد بود؟ اگر همین نرخ رشد ثابت بماند، جمعیت ایران در سال ۱۴۰۴ چند نفر خواهد بود؟

زوال نمایی

همانند رشد نمایی، می توان صحبت از زوال نمایی کرد.

معادله‌ی کلی زوال نمایی، به فرم $y = c(1-r)^t$ است که در آن y بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان نزول بر حسب اعشار و t بیانگر زمان است.

مثال

۱- یک قایق کاملاً بادی، روزانه ۶/۶۰ درصد بادش را از دست می‌دهد. قایق بادی دارای ۷۳۷۴۱/۷۸۸ سانتی‌متر مکعب باد می‌باشد.

الف) معادله‌ای بنویسید که بیانگر میزان از دست دادن باد قایق باشد.

حل : معادله‌ی کلی برای نزول نمایی به صورت $y = c(۱-r)^t$ است. لذا باتوجه به اطلاعات داده شده در مثال، می‌توان نوشت :

$$y = ۷۳۷۴۱/۷۸۸(۱-۰/۰۶۶)^t = ۷۳۷۴۱/۷۸۸(۰/۹۳۴)^t$$

بنابراین معادله‌ای که بیانگر از دست‌دادن باد در قایق است به صورت $y = ۷۳۷۴۱/۷۸۸(۰/۹۳۴)^t$ است که در آن y بیانگر مقدار باد در قایق برحسب سانتی‌مترمکعب و t بیانگر تعداد روزهاست.

ب) میزان بادی که بعد از ۷ روز قایق از دست می‌دهد، تخمین بزنید.

حل : معادله‌ی از دست دادن باد

$$y = ۷۳۷۴۱/۷۸۸(۰/۹۳۴)^t =$$

$$= ۷۳۷۴۱/۷۸۸(۰/۹۳۴)^۷ \qquad t = ۷$$

$$\approx ۴۵۷۱۹ \qquad \text{با استفاده از ماشین حساب}$$

بنابراین میزان بادی که قایق بعد از ۷ روز از دست داده، ۴۵۷۱۹ سانتی مترمکعب می‌باشد.

۲- جمعیت یکی از کشورهای خارجی، در سال ۲۰۰۰میلادی برابر با ۴۰،۰۰۰،۰۰۰ نفر بوده است. رشد جمعیت این کشور با نرخ ۱٪ در حال کاهش است. جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۰ میلادی چند نفر خواهد بود؟

حل : با توجه به این‌که معادله‌ی کلی زوال نمایی به صورت $y = c(۱-r)^t$ می‌باشد با جایگذاری c , r , t، جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۰ برابر است با :

$$y = ۴۰،۰۰۰،۰۰۰(۱-۰/۰۱)^{۱۰} = ۳۶۱۷۵۲۸۳$$

۱- فرض کنید در یک کشت باکتری ، در پایان ۲ روز تعداد ۳۶۰،۰۰۰ باکتری و در پایان ۴ روز تعداد ۳،۲۴۰،۰۰۰ باکتری وجود دارند. مطلوب است :

الف) تعداد باکتری‌ها در شروع آزمایش

ب) تعداد باکتری‌ها در پایان ۲۴ ساعت

ج) تعداد باکتری‌ها در پایان ۳ روز

د) تعداد روزهایی که در پایان آن تعداد باکتری‌ها برابر با ۲۹،۱۶۰،۰۰۰ خواهدبود.

۲- جمعیت کشور مکزیک در سال ۲۰۰۰ میلادی، برابر با ۱۰۰،۳۵۰،۰۰۰ نفر می‌باشد. اگر نرخ رشد جمعیت ۱/۷٪ در سال باشد، جمعیت کشور مکزیک در سال ۲۰۱۲ چند نفر خواهد بود؟

۳- شخصی در بیست و پنجمین سالگرد تولدش وارث ۵۰،۰۰۰،۰۰۰ تومان شد. اگر این

شخص این مبلغ را با نرخ هشت درصد سود سالیانه سرمایه گذاری کند هنگام بازنشستگی در سن ۶۵ سالگی چه مبلغی دریافت می کند ؟

۴- جمعیت کشور لیتوانی در سال ۲۰۰۵، برابر با ۲،۲۹۰،۲۳۷ نفر بوده‌است. نرخ رشد جمعیت در این کشور با نرخ ۱/۱٪ در حال کاهش است. جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۵ میلادی چند نفر خواهد بود؟

۵- (هواشناسی). فشار اتمسفر (برحسب میلی بار) در ارتفاع x برحسب متر از سطح دریا، به‌وسیله‌ی تابع زیر تقریب زده می‌شود.

$$f(x) = ۱۰۳۸(۱/۰۰۰۱۳۴)^{-x}$$

که x بین صفر تا ۱۰۰۰۰ خواهد بود.

الف) میزان فشار در سطح دریا چقدر است؟

ب) رستورانی در ارتفاع ۲۰۰۰ متری در اردبیل قرار دارد.

میزان فشار تقریبی اتمسفر در محل این رستوران چقدر است؟

ج) اگر ارتفاع افزایش پیدا کند ،چه اتفاقی در فشار اتمسفر ایجاد خواهد شد؟

لگاریتم و تابع لگاریتمی

محاسبه لگاریتم یک ابزار مناسب برای توصیف بسیاری از پدیده‌های طبیعی است، محاسبه شدت زلزله، مشخص‌کردن ضعیف‌ترین صدای قابل شنیدن توسط گوش انسان که به آن آستانه شنوایی می گویند و همین‌طور محاسبه آستانه درد که قوی‌ترین صدای قابل تحمل برای گوش انسان است، به کمک این مفهوم ریاضی یعنی لگاریتم قابل تعریف و محاسبه است. در پیش‌بینی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان معینی که در برنامه‌ریزی اقتصادی نقش تعیین کننده‌ای دارد و یا هنگام محاسبه نیمه عمر عناصر رادیواکتیو که ماده اصلی در انرژی هسته‌ای است از لگاریتم استفاده می کنیم.

در بحث توابع نمایی دیدیم که تکثیر و رشد سلول‌ها از قوانین توابع نمایی پیروی می کنند. به کمک تابع نمایی $y = b^x$ می‌توان به طور مثال تعداد سلول‌ها را پس از زمان x پیش‌بینی کرد. در مواقعی نیاز است که بدانیم تعداد معینی از سلول‌ها پس از چه زمانی به‌وجود می‌آیند، برای پاسخ به این قبیل سؤالات از مفهوم جدیدی به نام تابع لگاریتمی که معکوس تابع نمایی است استفاده می کنیم.

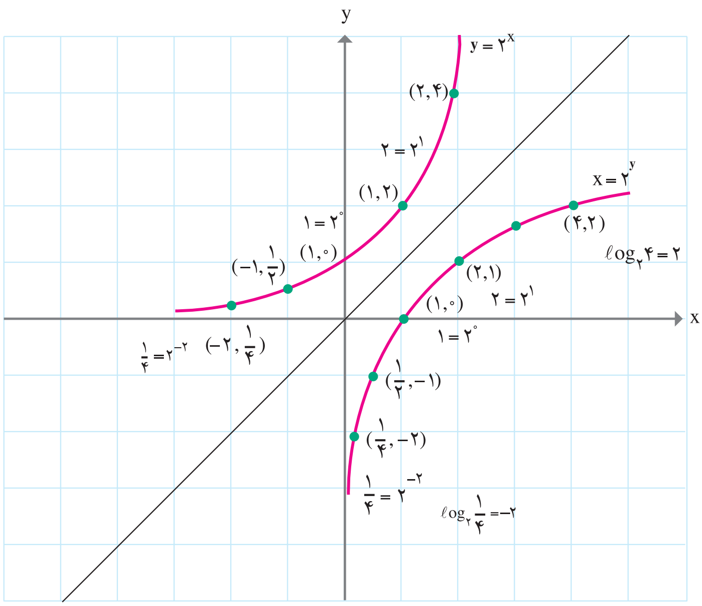
تابع لگاریتمی چیست و چگونه ساخته می‌شود؟

با تابع نمایی $y=۲^x$ شروع می‌کنیم که تابعی یک به یک است و بنابراین تابع معکوس آن وجوددارد. به یاد آورید که معکوس تابع یک به یک $y=f(x)$ را می‌توان با یافتن قرینه‌ی نقاط روی نمودار تابع f نسبت به خط $y=x$ ساخت.

به جدول و نمودار زیر توجه کنید :

$y=۲^x$	
x	y
۱	۲
۲	۴
۳	۸
۰	۱
-۱	$\frac{۱}{۲}$
-۲	$\frac{۱}{۴}$
-۳	$\frac{۱}{۸}$

$x=۲^y$	
x	y
۲	۱
۴	۲
۸	۳
۱	۰
$\frac{۱}{۲}$	-۱
$\frac{۱}{۴}$	-۲
$\frac{۱}{۸}$	-۳



شکل(۱)

در شکل(۱) نمودار تابع نمایی و نمودار تابع معکوس آن (که تابع لگاریتمی نامیده می‌شود) نشان داده شده است. به عنوان مثال نقطه‌ی (۴ و ۲) روی نمودار تابع نمایی است. و نقطه‌ی (۲ و ۴) که قرینه‌ی آن نسبت به خط $y = x$ است روی نمودار تابع معکوس آن (تابع لگاریتمی) قرار دارد.

معکوس $y = ۲^x$ را می‌توان به صورت $x = ۲^y$ نوشت. در عبارت $x = ۲^y$، y را لگاریتم x در پایه‌ی ۲ می‌خوانیم و با نماد $y = \log_۲ x$ نشان می‌دهیم.

مثال

۱– هریک از تساوی‌های زیر را به صورت $x = ۲^y$ بنویسید.

الف) $y = \log_۲ \frac{۱}{۴} = -۲$

$\frac{۱}{۴} = ۲^{-۲}$

ب) $y = \log_۲ ۱ = ۰$

$۱ = ۲^۰$

۲–هر یک از تساوی‌های زیر را به صورت $y = \log_۲ x$ بنویسید.

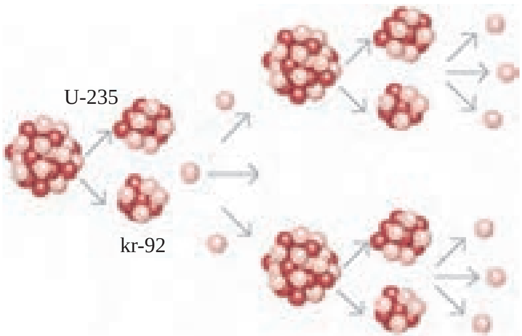
الف) $۲^۵ = ۳۲$

$\log_۲ ۳۲ = ۵$

ب) $۱۶^{\frac{۱}{۲}} = ۴$

$\log_{۱۶} ۴ = \frac{۱}{۲}$

در شکافت هسته‌ی اورانیوم، یک نوترون به هسته‌ی اورانیوم برخورد می‌کند و هسته‌ی اورانیوم به دو هسته‌ی سبک‌تر تقسیم می‌شود و مقداری انرژی، تولید شده و دو یا سه نوترون نیز آزاد می‌شود. نوترون‌های جدید خودشان به هسته‌های دیگر اورانیوم برخورد کرده و منجر به آزادسازی انرژی و نوترون‌های دیگر می‌شوند و همین‌طور این فرایند استمرار می‌یابد، این فرایند، واکنش زنجیره‌ای نامیده می‌شود. فرض کنیم در اثر شکافت هسته‌ی اورانیوم سه نوترون آزاد شود.



تعداد نوترون‌های آزاد شده	مرحله‌ی واکنش زنجیره‌ای
۳	۱
۹	۲
۲۷	۳
۸۱	۴

جدول فوق تعداد نوترون‌های آزاد شده را که از قانون تابع نمایی $y = ۳^x$ پیروی می‌کند نشان می‌دهد و به کمک آن می‌توان تعداد نوترون‌های آزاد شده را در مرحله‌ی x پیش‌بینی کرد. اگر بخواهیم بدانیم تعداد معینی از نوترون‌ها در کدام مرحله به‌وجود می‌آیند از تابع لگاریتمی $y = \log_۳ x$ که معکوس تابع نمایی فوق است استفاده می‌کنیم.

الف) در مرحله ششم چه تعداد نوترون آزاد شده خواهیم داشت؟
ب) در کدام مرحله تعداد نوترون‌های آزاد شده برابر با ۲۴۳ نوترون خواهد بود؟

فعالیت

۱- جدول‌ها را کامل کنید.

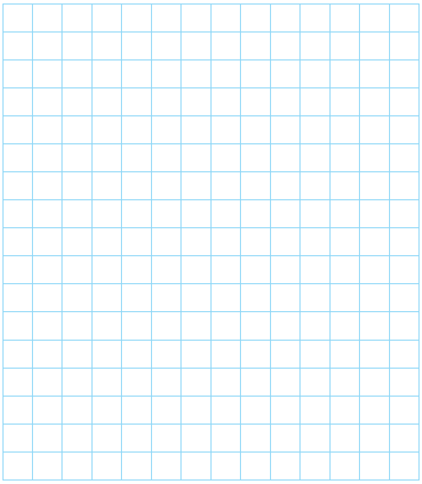
۲- هریک از نقاط جدول‌ها را روی صفحه شطرنجی مشخص کنید و سپس نمودارهای تابع $y = ۲^x$ و تابع $y = \log_۲ x$ را رسم کنید.

۳- هر نقطه از نمودار تابع نمایی را با نقطه نظیرش از تابع لگاریتمی مقایسه کنید.

۴- دامنه و برد دو تابع را با هم مقایسه کنید :

$f(x)=2^x$	
$y=2^x$	(x,y)
$1=2^0$	$(0,1)$
...	$(1,2)$
$\frac{1}{2}=2^{-1}$	...
$(2,f(2))$	...
$\frac{1}{4}=2^{-2}$	...
...	...
...	$(3,8)$
...	...

$g(x)=\log_2 x$	
$y=\log_2 x$	(x,y)
$0=\log_2 1$	$(1,0)$
$1=\log_2 2$	...
...	$(\frac{1}{2},-1)$
...	$(4,g(4))$
$\log_2 \frac{1}{4}=-2$	...
$\log_2 \sqrt{2}=\frac{1}{2}$	...
...	$(2^3,3)$
...	$(a,g(a))$



نمودار تابع $f(x)=3^x$ و نمودار تابع معکوس آن را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و به این سؤالات پاسخ دهید :

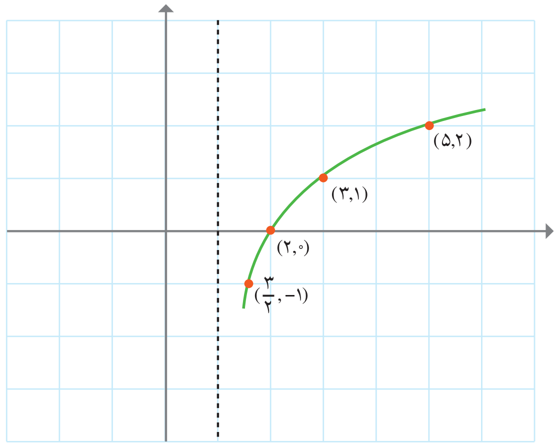
الف) دامنه و برد هرکدام از توابع را مشخص کنید.

ب) دامنه و برد تابع لگاریتمی و تابع معکوس‌اش را با هم مقایسه کنید.

مثال

نمودار تابع $y=\log_{۲}(x-۱)$ را رسم می‌کنیم.

$y=\log_{۲}(x-۱)$	
x	y
۲	۰
۳	۱
۵	۲
$\frac{۳}{۲}$	-۱
⋮	⋮



توجه کنید که به x مقادیر کمتر از ۱ را نمی‌دهیم. زیرا دامنه‌ی تابع لگاریتمی مقادیر مثبت است.

یعنی باید : $x-۱>۰$ باشد و در نتیجه $x>۱$ قابل قبول است.

به همین دلیل ابتدا خط $x=۱$ را به صورت نقطه‌چین رسم می‌کنیم تا نمودار راحت‌تر و دقیق‌تر رسم شود.

فعالیت

می‌خواهیم نمودار تابع $y=\log_{\frac{۱}{۲}} x$ و نمودار تابع $y=(\frac{۱}{۲})^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم.

۱– ابتدا جدول صفحه‌ی بعد را تکمیل کنید :

(x,y)	$y=\log_{\frac{۱}{۲}} x$	$y=(\frac{۱}{۲})^x$	(x,y)
$(\frac{۱}{۲},۱)$	$۱=\log_{\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۲}$		$(۱,\frac{۱}{۲})$
$(۲,-۱)$	$-۱=\log_{\frac{۱}{۲}} ۲$		$(-۱,۲)$
$(۴,-۲)$	$-۲=\log_{\frac{۱}{۲}} ۴$		$(-۲,۴)$
$(\frac{۱}{\sqrt{۲}},\frac{۱}{۲})$	...	...	$(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{\sqrt{۲}})$
			$(\ ,\ )$

۲- هریک از نقاط دو جدول را در دستگاه مختصات مشخص کرده، نمودار تابع لگاریتمی را رسم کنید.

۳- نمودار معکوس تابع لگاریتمی را نسبت به خط $y=x$ رسم کنید.

۴- دامنه و برد تابع نمایی را از روی نمودار مشخص کنید.

۵- دامنه و برد تابع لگاریتمی را از روی نمودار مشخص کنید.

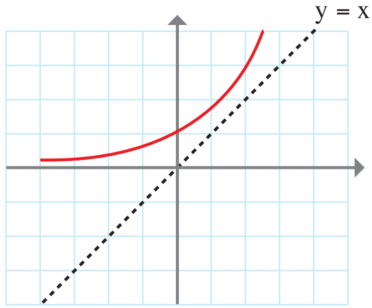
۶- حدس می‌زنید که نمودارهای تابع $y=(\frac{۱}{۳})^x$, $y=\log_{\frac{۱}{۳}} x$ چگونه باشند.

به نمودارهای زیر توجه کنید.

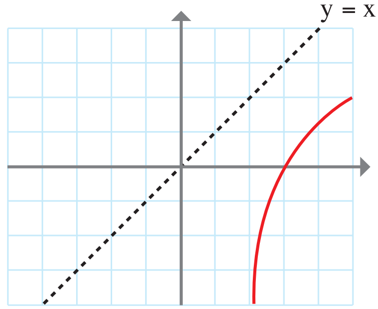
کدام شکل نمودار کدام تابع می‌تواند باشد؟

الف) $y = \log_{۲}(x - ۲)$ ب) $y = \log_{۳} x$ ج) $y = ۲^{-x}$

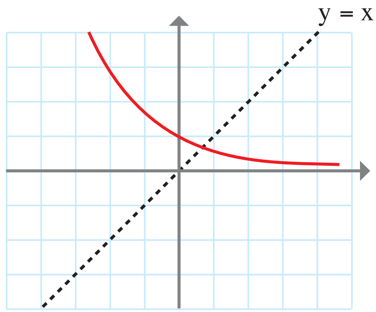
د) $y = \log_{\frac{۱}{۲}} x$ هـ) $y = ۲ + \log_{۲} x$



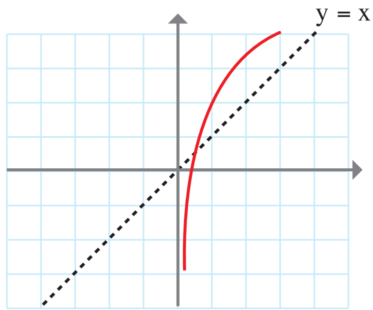
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

مجدداً به فعالیت‌های ۱ و ۲ و ۳ توجه کنید. ملاحظه می‌کنید که تابع لگاریتمی برای مقادیر مثبت x تعریف می‌شود.

دامنه تعریف توابع لگاریتمی مقادیر مثبت است و برد توابع لگاریتمی مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ است.

محاسبه‌ی لگاریتم یک عدد

تابع $f(x)=\log_{۳} x$ را درنظر بگیرید. می‌خواهیم $f(۸۱)$ را به‌دست آوریم :

فرض کنیم : $f(۸۱)=y$ یا $\log_{۳} ۸۱=y$

از تعریف لگاریتم داریم : $۸۱=۳^{y}$ و یا $۳^{y}=۳^{۴}$ و در نتیجه : $y=۴$

مثال

$\log_{۸} ۲$ و $\log_{\frac{۱}{۳}} ۸۱$ را محاسبه کنید.

الف) $\log_{۸} ۲=y$

$$۲=۸^{y}$$
$$۲=۲^{۳y}$$
$$۱=۳y$$
$$y=\frac{۱}{۳}$$

ب) $\log_{\frac{۱}{۳}} ۸۱=y$

$$۸۱=(\frac{۱}{۳})^{y}$$
$$۸۱=۳^{-y}$$
$$y=-۴$$

۱- نشان دهید که :

۱) $\log_{۴} ۱۶=۲$

۲) $\log_{۳} \frac{۱}{۲۷}=-۳$

۲- مقدار $\log_{۵} ۵$ و $\log_{\frac{۱}{۶}} \frac{۱}{۶}$ را محاسبه کنید. در حالت کلی $a\neq ۱$ و $a>۰$ و $\log_{a} a$ را محاسبه و عبارت زیر را کامل کنید.

لگاریتم هر عدد a در پایه‌ی ...... مساوی ...... است.

۳- در عبارت‌های زیر y را بیابید.

الف) $\log_{۴} ۱ = y$ ب) $\log_{۲} ۸ = y$ ج) $\log_{۱۰} ۰/۰۱ = y$ د) $\log_{\frac{۱}{۶}} ۳۶ = y$

معادله‌ی لگاریتمی

عبارت‌های زیر نمونه‌هایی از معادلات لگاریتمی هستند.

۱) $\log_{۱۰} x = ۲$ ۲) $\log_{۳} x = \log_{۳} ۵$

۳) $\log_{۲} x + \log_{۲} ۵ = ۴$ ۴) $\log_{۲}(x+۱) + \log_{۲} x = \log_{۲} ۶$

منظور از حل معادله‌ی لگاریتمی یافتن مقدار و یا مقدارهایی برای x است که در معادله صدق کند.

مثال

معادلات لگاریتمی زیر را با توجه به تعریف لگاریتم حل می‌کنیم.

الف) $\log_{۱۰} x = ۲$

$x = ۱۰^{۲}$

$x = ۱۰۰$

ب) $\log_{۵} x = -۱$

$x = ۵^{-۱}$

$x = \frac{۱}{۵}$

معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\log_{۳} x = ۴$ ۲) $\log_{۲}(x-۱) = -۱$ ۳) $\log_{۰/۰۱} x = \frac{۱}{۲}$

در حل بسیاری از معادلات لگاریتمی به حالتی می‌رسیم که در طرفین تساوی دو لگاریتم قراردارد. برای ادامه حل به مفهوم زیر نیاز داریم :

ـ اگر $a > ۰$ و $a \neq ۱$ باشد آن‌گاه از تساوی $\log_a x = \log_a z$ می‌توان تساوی $x = z$ را نتیجه گرفت و بالعکس.

مثال

۱) $\log_۲ x = \log_۲ \sqrt{۲}$

$x = \sqrt{۲}$

۲) $\log_۵ (۲x - ۱) = \log_۵ x$

$۲x - ۱ = x$

$x = ۱$

۳) $\log_۷ (x^۲ - ۲) = \log_۷ x$

$x^۲ - ۲ = x$

$x^۲ - x - ۲ = ۰$

$x = \frac{۱ \pm \sqrt{۱ + ۸}}{۲}$

$x = ۲ \ , \ x = -۱$

۴) $\log_۵ x = \log_۵ ۷$

$x = ۷$

در مثال شماره‌ی ۳، $x = -۱$ قابل قبول نیست زیرا لگاریتم برای اعداد مثبت تعریف می‌شود. به بیان دیگر $x = -۱$ در دامنه‌ی تعریف لگاریتم‌های معادله‌ی فوق نیست.

معادلات زیر را حل کنید : (جواب‌های قابل قبول برای معادلات زیر را مشخص کنید.)

۱) $\log_۳ (x^۲ - ۱۵) = \log_۳ ۲x$

۲) $\log_{۱۰} (x^۲ - ۳۰) = \log_{۱۰} x$

۳) $\log_x ۱۶ = ۲$

قوانین (قضایا) لگاریتم‌ها

هنگام حل بسیاری از مسائل واقعی در فیزیک، پزشکی، زمین‌شناسی و ... که در آن‌ها معادلات لگاریتمی به‌کار رفته است نیازمند استفاده از قوانینی که بین لگاریتم‌ها برقرار است می‌شویم. به همین جهت در این بخش به بیان و اثبات این قوانین می‌پردازیم.

همان‌طور که می‌دانیم : $۱۶\times۱۲۸=۲^{۴}\times۲^{۷}=۲^{۴+۷}$

می‌خواهیم ببینیم که آیا درباره لگاریتم‌ها نیز می‌توان نوشت : $\log_{۲} ۲^{۴}\times۲^{۷}=\log_{۲} ۲^{۴}+\log_{۲} ۲^{۷}$

دو طرف تساوی را جداگانه محاسبه می‌کنیم.

$\log_{۲} ۲^{۷}=b$ $\quad$ $\log_{۲} ۲^{۴}=a$ $\quad$ $\log_{۲} ۱۶\times۱۲۸=\log_{۲} ۲^{۴}\times۲^{۷}=\log_{۲} ۲^{۱۱}=y$

$۲^{۷}=۲^{b}$ $\quad$ $۲^{۴}=۲^{a}$ $\quad$ مطابق تعریف لگاریتم $\quad$ $۲^{۱۱}=۲^{y}$

$b=۷$ $\quad$ $a=۴$ $\quad$ $y=۱۱$

بنابراین : $\log_{۲} ۲^{۴}+\log_{۲} ۲^{۷}=a+b=۴+۷=۱۱$

در حالت کلی نیز می‌توان ثابت کرد که :

برای اعداد حقیقی و مثبت a , b , c که $(c\neq۱)$

$$\log_c a.b=\log_c a+\log_c b$$

حال به اثبات رابطه بالا می‌پردازیم. با فرض اینکه $\log_c ab=p$ ، از تعریف لگاریتم داریم :

$ab=c^{p}$

$$\log_c b = n \;,\; \log_c a = m$$

$$b = c^n \;,\; a = c^m$$

$$ab = c^m \times c^n = c^{m+n}$$

$$ab = c^p$$

$$ab = c^{m+n}$$

بنابراین : $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$ یا $c^p = c^{m+n}$

مثال

$$\log_{۱۰} ۲ + \log_{۱۰} ۵ = \log_{۱۰} ۱۰ = ۱$$

برای هر عدد حقیقی مثبت c,b,a که $(c \neq ۱)$ است می‌توان ثابت کرد که:

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

مثال

برای محاسبه‌ی $\log_{۱۰} ۰/۱$ می‌توان نوشت :

$$\log_{۱۰} \frac{۱}{۱۰} = \log_{۱۰} ۱ - \log_{۱۰} ۱۰ = ۰ - ۱ = -۱$$

از اینکه $\log_۳ ۵ = ۱/۴۶۵۰$ و $\log_۳ ۲۰ \simeq ۲/۷۲۶۸$ است، استفاده می‌کنیم و $\log_۳ ۴$ را محاسبه می‌نماییم.

$$\log_۳ ۴ = \log_۳ \frac{۲۰}{۵} = \log_۳ ۲۰ - \log_۳ ۵ \simeq ۱/۲۶۱۸$$

ثابت کنید $\log_c a^x = x\log_c a$ و $x\in\mathbb{R}$ و a و c اعداد حقیقی مثبت (راهنمایی : فرض کنید $(\log_c a = n\ ,\ \log_c a^x = m$

مثال

الف) $\log_۵\sqrt{۵} = \log_۵ ۵^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}\log_۵ ۵ = \frac{۱}{۲}\times ۱ = \frac{۱}{۲}$

ب) $۲\log_{۱۰}\sqrt{۲} + \log_{۱۰}۵ = \log_{۱۰}(\sqrt{۲})^۲ + \log_{۱۰}۵ = \log_{۱۰}۲ + \log_{۱۰}۵ = \log_{۱۰}۱۰ = ۱$

تمرین

۱- درستی تساوی $\log_c abd = \log_c a + \log_c b + \log_c d$ را تحقیق کنید. (a و b و c و d اعداد حقیقی مثبت‌اند و $c\neq ۱$ است.)

۲- نشان دهید که : $\log ۳^۵ = ۵\log ۳$

۳- از تساوی $a^n = \underbrace{a.a.\ \dots\ .a}_{n\text{ بار}}$ $n\in\mathbb{N}$ استفاده کنید و رابطه‌ی $\log_c a^n = n\log_c a$ را نتیجه بگیرید.

۴- حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید :

۱) $\log_{۱۰}۱۰۰$ ۲) $\log_{۱۰}۱۰۰۰$ ۳) $\log_{۱۰}۴ + \log_{۱۰}۲۵$ ۴) $۲\log_{۱۰}۴ + \log_{۱۰}۴$

۵- اگر $\log_{۱۰}۳ = n\ ,\ \log_{۱۰}۲ = m$ باشد عبارات زیر را محاسبه کنید : (برحسب n,m)

۱) $\log_{۱۰}۱۸$ ۲) $\log_{۱۰}۳۲ + \log_{۱۰}۲۷$

۶- از این‌که $\log_۴ ۲ = ۰/۵$ است استفاده کنید و $\log_۴ ۳۲$ را محاسبه کنید.

۷- حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید :

۱) $\log_۲ ۱۶$ ۲) $\log_۷ \frac{۱}{۴۹}$ ۳) $\log_۲\sqrt{۸}$ ۴) $\log_۳ ۵۴ - \log_۳ ۲$

۵) $۲\log_{۱۰}۵ + \log_{۱۰}۴$ ۶) $۲\log_{۱۰}۲ + \log_{۱۰}۲۵۰$

۷) $\log_{۱۰}۲۴ - \frac{۱}{۲}\log_{۱۰}۹ + \log_{۱۰}۱۲۵$ ۸) $۳\log_{۱۰}\sqrt[۳]{۴} - \log_{۱۰}۲۵$

حل معادلات لگاریتمی با استفاده از قوانین لگاریتم‌ها

از قوانین لگاریتم‌ها استفاده کرده و مثال‌هایی از معادلات لگاریتمی را حل می‌کنیم.

مثال

۱) $۳\log_۵ x - \log_۵ ۴ = \log_۵ ۱۶$

$$\log_۵ x^۳ - \log_۵ ۴ = \log_۵ ۱۶$$

$$\log_۵ \frac{x^۳}{۴} = \log_۵ ۱۶ \Rightarrow \frac{x^۳}{۴} = ۱۶ \Rightarrow x^۳ = ۶۴ \Rightarrow x = ۴$$

اگر در معادله‌ی اصلی به جای x عدد ۴ را قرار دهیم :

$$۳\log_۵ ۴ - \log_۵ ۴ = \log_۵ ۱۶$$

$$۲\log_۵ ۴ = \log_۵ ۱۶$$

$$۲\log_۵ ۴ = \log_۵ ۴^۲$$

بنابراین جواب x=۴ قابل قبول است.

۲)

$$\log_۳ x + \log_۳(۲x+۱) = ۱$$

$$\log_۳ x(۲x+۱) = ۱$$

$$۲x^۲ + x = ۳^۱$$

$$۲x^۲ + x - ۳ = ۰$$

$$x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۲۵}}{۴}$$

$$x = ۱ \,,\; x = -\frac{۳}{۲}$$

جواب‌ها را در معادله‌ی اصلی قرار می‌دهیم :

$$\log_۳ ۱ + \log_۳ ۳ = ۱$$

$$\log_۳(-\frac{۳}{۲}) + \log_۳ ۲(-\frac{۳}{۲}) + ۱ = ۱$$

توجه کنید که $x = -\frac{۳}{۲}$ در دامنه‌ی تعریف لگاریتم‌ها نیست و بنابراین جواب قابل قبول برای معادله‌ی لگاریتمی نیست. بنابراین تنها جواب x=۱ در معادله‌ی اصلی صدق می‌کند.

۱– معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$۱)\ \log_{۹} x = \frac{۳}{۲} \qquad ۲)\ \log_{۵}(x+۱) = \frac{۱}{۲}$$

$$۳)\ \log_{۱۰}(۴-x) = \log_{۱۰}(۶-x) - \log_{۱۰} x \qquad ۴)\ \log_{۳} ۵ + \log_{۳} x = \log_{۳} ۱۰$$

$$۵)\ \log_{۴} a + \log_{۴} ۹ = \log_{۴} ۲۷ \qquad ۶)\ \log_{۱۰} ۱۶ - \log_{۱۰} ۲x = \log_{۱۰} ۲$$

$$۷)\ \log_{۷} ۲۴ - \log_{۷}(x+۵) = \log_{۷} ۸ \qquad ۸)\ \log_{۲} n = \frac{۱}{۴}\log_{۲} ۱۶ + \log_{۲} ۴۹$$

$$۹)\ \log_{a} ۴n - ۲\log_{a} x = \log_{a} x \qquad ۱۰)\ \log_{b} ۸ + ۳\log_{b} n = ۳\log_{b}(x-۱)$$

$$۱۱)\ \log_{۱۰} z + \log_{۱۰}(z+۳) = ۱ \qquad ۱۲)\ \log_{۶}(a^{۲}+۲) + \log_{۶} ۲ = ۲$$

$$۱۳)\ \log_{۲}(t+۲) + \log_{۲}(t-۲) = ۱ \qquad ۱۴)\ \log_{۴} x + \log_{۴}(x-۶) = ۲$$

$$۱۵)\ \log_{\frac{۱}{۱۰}}(x^{۲}-۱) = -۱$$

۲– برای هر عدد حقیقی و مثبت که c,e,a,x که $(c,e \neq ۱)$ است ثابت کنید.

$$۱)\ \log_{c}\frac{۱}{x} = -\log_{c} x \qquad ۲)\ \log_{c} a = \frac{\log_{e} a}{\log_{e} c}$$

$$۳)\ c^{\log_{c} a} = a \qquad ۴)\ \log_{c} c^{a} = a$$

۳– با استفاده از قوانین لگاریتم‌ها یا هر راه حل دیگر نشان دهید که :

$$۱)\ \log_{۲۷} ۳ \times \log_{۳} ۲۷ = ۱ \qquad ۲)\ \log_{۷} ۴۹ = ۲\log_{۷} ۷ = ۲ \qquad ۳)\ \log_{۳}(\log_{۳}(\log_{۲} ۸)) = ۰$$

۴- کدام راه‌حل درست و کدام یک نادرست است؟ استدلال کنید.

۱) $\log_{۳} x = ۹$

$۳^x = ۹$

$۳^x = ۳^۲$

$x = ۲$

۲) $\log_{۳} x = ۹$

$x = ۳^۹$

$x = ۱۹۰۸۳$

۵- آیا راه حل زیر درست است؟
استدلال کنید.

$$\log_{۱۰}(۲x - ۱) = ۰$$

$$\log_{۱۰} ۲x - \log_{۱۰} ۱ = ۰$$

$$\log_{۱۰} ۲x - ۰ = ۰$$

$$۲x = ۱$$

$$x = \frac{۱}{۲}$$

۶- معادله‌ی $\log_{۱۰}(x + ۲) = \log_{۱۰} ۸ - \log_{۱۰}(x - ۵)$ را حل کنید.
چگونه می‌توانید از درستی جواب به‌دست آمده اطمینان حاصل کنید؟

۷- با توجه به نمودار تابع $y = \log_{۲} x$ نمودار تابع $y = \log_{۲}(x + ۱)$ و تابع معکوس آن‌را رسم کنید.

۸- یکی از کاربردهای مفهوم لگاریتم در شیمی، محاسبه‌ی pH یک محلول است. بر طبق تعریف، pH معیاری از میزان اسیدی، بازی (قلیایی) یا خنثی بودن یک محلول است و از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$pH = -\log_{۱۰}\left[H_۳O^+\right]$$

در این رابطه $\left[H_۳O^+\right]$ غلظت یون هیدرونیوم[1] را نشان می‌دهد.

الف) pH هریک از محلول‌های زیر را حساب کنید.

۱- در آب پرتقال غلظت یون هیدرونیوم $(H_۳O^+)$ برابر $۲/۹ \times ۱۰^{-۴}$ مول بر لیتر است.

---

۱. یون هیدرونیوم، $H_۳O^+$، از جمله یون‌های چند اتمی مهمی است که در فرآیندهای زیستی اهمیت بسیاری دارد و واحد اندازه‌گیری آن مول بر لیتر است.

$(\log ۲۹ = ۱/۴۶)$

۲– در شیر منیزی (شربت معده) غلظت یون هیدرونیوم ($H_۳O^+$) برابر $۲/۵ \times ۱۰^{-۱۱}$ مول بر لیتر است.

$(\log ۲۵ = ۱/۳۹)$

۳– در آب خالص غلظت یون هیدرونیوم ($H_۳O^+$) برابر ۱×۱۰^{-۷} مول بر لیتر است.

ب) محلول‌ها را بر مبنای مقدار pH آن‌ها به سه دسته به صورت زیر تقسیم می‌کنند.

۱) اسیدی $pH < ۷$

۲) خنثی $pH = ۷$

۳) بازی $pH > ۷$

مقدار غلظت یون هیدرونیوم در محلول خنثی چند مول بر لیتر است؟

خواندنی

ـ زمین‌لرزه یا زلزله، لرزش و جنبش خفیف یا شدید زمین است که به علت آزاد شدن انرژی ناشی از گسیختگی سریع در پوسته زمین در مدتی کوتاه به وقوع می‌پیوندد. محلی که منشأ زلزله از آن‌جا شروع شده و انرژی ازآن خارج می‌شود را کانون زلزله و نقطه‌ی بالای کانون در سطح زمین را مرکز زلزله می‌گویند.

بزرگی زمین لرزه از رابطه لگاریتمی $\log E = ۱۱/۴ + ۱/۵M$ به‌دست می‌آید که در آن M بزرگی زلزله در مقیاس ریشتر و E انرژی آزاد شده در واحد ارگ است. رابطه‌ی فوق نشان می‌دهد که با افزایش یک درجه‌ای M مقدار انرژی آزاد شده تقریباً ۳۲ برابر می‌گردد. انرژی یک زلزله‌ی ۸ ریشتری را برابر با انرژی انفجار یک میلیارد تن ماده‌ی انفجاری TNT برآورد کرده‌اند.

$$\log E = ۱۱/۴ + ۱/۵ \times ۸ = ۲۳/۴ \Rightarrow E = ۱۰^{۲۳/۴}$$

زلزله‌ها از جنبه‌ی آزاد شدن انرژی به دو صورت افقی و عمودی تقسیم‌بندی می‌گردند. خرابی‌های عمده و وسیع معمولاً براثر زلزله‌هایی از نوع افقی صورت می‌گیرد.

البته باید توجه داشت که میزان انرژی رسیده به هر نقطه از سطح زمین علاوه بر میزان انرژی آزاد شده درمرکز به مجموعه عواملی از قبیل فاصله از مرکز زلزله، جنس خاک، مقاومت بنا و ... بستگی دارد.

زلزله‌ای که در سال ۱۳۶۹ در منطقه‌ی رودبار رخ داد ۷/۳ ریشتر بود. میزان انرژی آزادشده در مرکز زلزله را تخمین بزنید.

همچنین بزرگی زلزله‌ی بم در سال ۱۳۸۲، ۶/۶ ریشتر گزارش شده است. میزان انرژی آزادشده در این منطقه را تخمین بزنید.

فصل ۵

مثلثات

زوایا و اندازه‌ی زوایا

با دیدن و تماشا کردن، می‌توان چیزهای زیادی یاد گرفت. بعضی از شب‌ها به ستاره‌ها نظاره می‌کنیم و از این همه اجرام آسمانی در تاریکی شب حیرت زده می‌شویم و لذت می‌بریم .آیا تاکنون به این موضوع فکر کرده‌اید که این اجرام آسمانی علاوه بر شگفت انگیزی و تماشایی بودن چه استفاده‌هایی برای انسان‌ها داشته و دارند؟ برای پی بردن به این موضوع می‌توانید در عالم خیال خود به گذشته‌های دور بروید و در وسط اقیانوسی یک کشتی را تصور کنید که بادبان‌هایش برافراشته و در دل تاریکی شب به پیش می‌رود. تصور کنید که از هر طرف هزاران کیلومتر آب است، هیچ نشانه‌ی زمینی مانند ساحل یا فانوس دریایی وجود ندارد. ناخدا چگونه مسیر را تشخیص می‌دهد و کشتی را به سمت مقصد هدایت می‌کند؟ مسیر بادها هم هر از گاهی تغییر می‌کند و ناخدا به ملوانان دستور تنظیم بادبان‌ها را می‌دهد. هیچ راه و روشی روی زمین نمی‌توان یافت که به ناخدا کمک کند تا جهت‌ها را تشخیص دهد و مسیر حرکت را گم نکند. پس باید در آسمان‌ها به دنبال نشانه‌ای بود! ملوانان می‌توانند با کمک ستارگان، جهت‌های چهارگانه را به راحتی تشخیص دهند که از جمله آن‌ها می‌توان به ستاره‌ی قطبی اشاره کرد.

پیامبر اکرم(ص) در مورد آیه‌ی «و بالنجم هم یهتدون» با ستاره (یا آن ستاره) راه را می‌یابند، فرمودند : منظور از ستاره در آیه‌ی فوق جدی (ستاره‌ی قطبی) است . زیرا آن ستاره‌ای است که غروب نمی‌کند و بر اساس آن، قبله مشخص می‌شود و به وسیله‌ی آن اهل بر و بحر (خشکی و دریا) راه را می‌یابند.

ستاره‌ی قطبی تقریباً در امتداد محور چرخش زمین (خطی که دو قطب شمال و جنوب را به‌هم وصل می‌کند.) قرار گرفته است. به این معنا که اگر شخصی در قطب شمال قرار داشته باشد این ستاره را تقریباً بالای سر خود می‌بیند و ما برای این‌که رو به سوی قطب شمال حرکت کنیم با دیدن این ستاره که در قطب شمال قرارگرفته است مسیر خود را پیدا می‌کنیم.[1]

---

۱. اگر زمین به دور محورش نمی چرخید ستاره‌ی قطبی و تمام ستارگان در جای خود ثابت بودند. اما با چرخش زمین ظاهراً به نظر می‌آید که هر ستاره دایره ای را در طول شبانه روز می‌پیماید. به این حرکت،حرکت ظاهری می‌گویند.

فعالیت

ستاره‌ی قطبی روی دایره‌ای در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند و این ستاره در هر ۲۳ ساعت و ۵۶ دقیقه و ۴/۳۳ ثانیه، یعنی ۰/۹۹۷۲۷۲۳ شبانه‌روز یک بار این دایره‌ی کوچک را طی می‌کند .

۱ــ اگر یک دوران کامل خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه‌ی ۳۶۰ درجه باشد و فرض کنیم هر ۲۴ ساعت یک بار این دایره به وسیله‌ی ستاره‌ی قطبی طی می‌شود، به نظر شما $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۲}{۳}$ و $۱\frac{۱}{۴}$ دوران طی چه مدتی صورت می‌پذیرد؟

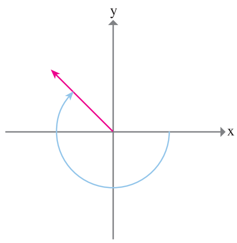
۲ــ حرکت ستاره‌ی قطبی را روی صفحه‌ی مختصات در نظر گرفته و فرض کنید ستاره‌ی قطبی از نقطه‌ای روی قسمت مثبت محور xها به طول ۲ واحد در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت شروع به حرکت کند. اگر ستاره‌ی قطبی به اندازه‌ی $\frac{۱}{۶}$ و $۱\frac{۱}{۶}$ و $۲\frac{۱}{۶}$ دایره را طی کند، اندازه‌ی زاویه‌ی طی شده‌ی هریک از نقاط را نسبت به مبدأ مختصات مشخص نمایید.

در صفحه‌ی مختصات یک زاویه به وسیله‌ی دو نیم‌خط که رأس مشترک دارند ایجاد می‌شود که یک نیم خط را به عنوان ضلع ابتدایی که مکان شروع حرکت نیم خط دوم است و دیگری را ضلع انتهایی که مکان انتهایی نیم‌خط می‌باشد، در نظر می‌گیریم.

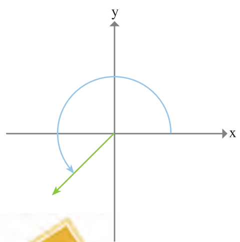
یک زاویه به وسیله‌ی مقدار و جهت چرخش از ضلع ابتدایی به ضلع انتهایی تعیین می‌شود.

اگر تغییر مکان نیم خط دوم از مکان شروع در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، زاویه با یک مقدار منفی و اگر خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، با یک مقدار مثبت مشخص می‌شود.

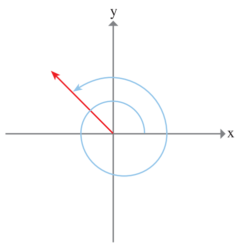
مثال



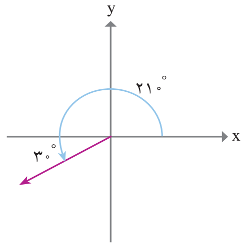
۱ــ یک زاویه‌ی منفی در جهت حرکت عقربه‌های ساعت.



یک زاویه‌ی مثبت در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت.



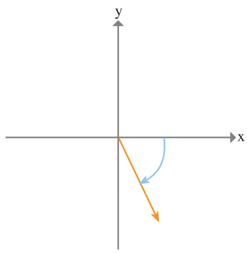
یک زاویه در دستگاه مختصات در موقعیت استاندارد است، اگر رأس آن در مبدأ و ضلع اولیه‌اش روی قسمت مثبت محور xها باشد، موقعی که ضلع انتهایی حرکت می‌کند ممکن است در بعضی مواقع بیش‌تر از یک دور کامل بچرخد. مانند شکل مقابل :
اندازه‌ی یک زاویه که ضلع انتهایی آن دقیقاً یک دور کامل بچرخد، ۳۶۰ درجه است.



۲ــ زوایای ۲۱۰ و ۶۰- درجه را در موقعیت استاندارد رسم کنید.

داریم : ۲۱۰° = ۱۸۰° + ۳۰°

ضلع انتهایی به اندازه‌ی ۳۰ درجه از محور x ها می‌گذرد.



چون ۶۰- درجه یک زاویه‌ی منفی است، ضلع انتهایی به اندازه‌ی ۶۰ درجه در جهت عقربه‌های ساعت از محور xها عبور می‌کند.

۱ــ هر یک از عبارت‌های زیر را در موقعیت استاندارد به درجه بیان کنید.

الف) $\frac{۱}{۳}$ دور کامل در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت.

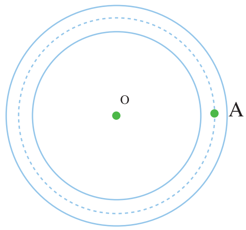
ب) $\frac{۳}{۴}$ دور کامل در جهت حرکت عقربه‌های ساعت.

۲ــ زوایای ۴۰۵ و ۱۲۰- درجه را در موقعیت استاندارد رسم کنید.

۳ــ اگر ستاره‌ای حول محور عبور کننده‌ای از مرکز زمین روی مسیر دایره‌ای شکل به شعاع یک واحد به طور ظاهری بگردد، دوران یافته‌ی این ستاره از نقطه‌ی (۱،۰) را تحت زوایای ۳۶۰°, ۲۷۰°, ۱۸۰°, ۳۰° در موقعیت استاندارد مشخص کنید.

واحد دیگری برای اندازه گیری زاویه

یکی از ورزش‌های بسیار مفرح که اکثر مردم به راحتی می‌توانند این ورزش را انجام دهند، ورزش دوچرخه سواری است که حتی در مسابقات المپیک یکی از ورزش‌های پر طرفدار است.



فرض کنیم در ورزشگاه شهر، یک پیست دوچرخه‌سواری به صورت دایره‌ای وجود دارد. معلم ورزش مدرسه از دانش آموزان می‌خواهد که در مسابقه دوچرخه سواری دور پیست دایره‌ای شرکت کنند. دانش‌آموزان از نقطه‌ی A که در شکل مقابل مشخص شده است در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت شروع به رکاب زدن می‌کنند. علی یکی از دانش‌آموزانی است که در این مسابقه شرکت کرده است. مکان رکاب زدن علی، دایره‌ای به شعاع یک کیلومتر است که با زاویه‌ای که علی حول O چرخیده است مشخص می‌شود.

۱ــ اگر زاویه‌ای که علی چرخیده است ۹۰ درجه باشد، او چه مسافتی را پیموده است؟

۲ــ اگر او ۳۱۵ درجه از دایره را طی کرده باشد، چه مسافتی را طی نموده است؟

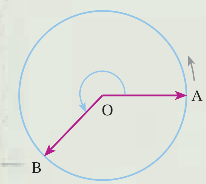
۳ــ علی پس از ۱۵ دقیقه به اندازه‌ی ۷۶۵ درجه روی دایره را طی نموده است او چه مسافتی را طی نموده است؟

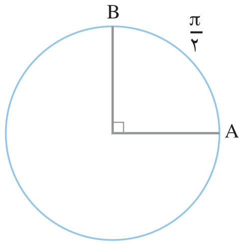
۴ــ اگر زاویه‌ی چرخیدن دوچرخه‌سوار θ و مسافت طی شده توسط او L باشد، چه رابطه‌ای بین L و θ وجود دارد؟

همان‌گونه که دیدیم مقدار مسافتی که روی محیط دایره توسط علی طی شده است و زاویه‌ای که علی چرخیده است با هم رابطه مستقیم دارند و با دانستن هر یک می‌توان دیگری را به‌دست آورد. بنابراین مسافت طی شده توسط علی می‌تواند معیاری برای اندازه‌گیری زاویه چرخیدن علی باشد.

اگر متحرکی از نقطه A روی دایره‌ای به شعاع واحد در جهت مثبت حرکت کند و به مکان B برسد، مسافت طی شده توسط متحرک را اندازه‌ی زاویه‌ی دوران پاره خط OA حول O بر حسب رادیان می‌نامیم.

اگر در جهت منفی حرکت کنیم همین مسافت طی شده را با علامت منفی نشان می دهیم.





مثال

۱ــ اگر از نقطه‌ی A روی دایره به اندازه ۹۰ درجه بچرخیم، یک ربع دایره را طی کرده‌ایم که طول یک چهارم محیط دایره است. چون شعاع دایره ۱ و محیط دایره ۲π است، پس طول ربع دایره $\frac{۲\pi}{۴}$ یعنی $\frac{\pi}{۲}$ است.

۲ــ اگر از نقطه‌ی A روی دایره به اندازه‌ی ۱۸۰- درجه بچرخیم، نیم دایره‌ای طی می‌شود که طول آن $\frac{۲\pi}{۲}$ یعنی π است. پس زاویه‌ی طی شده بر حسب رادیان $-\pi$ است.

۳ــ اگر از نقطه‌ی A روی دایره به اندازه‌ی ۴۵۰ درجه بچرخیم، یک بار دایره طی می‌شود و برای بار دوم به اندازه‌ی ۹۰ درجه می‌چرخیم. پس مسافت طی شده برابر $۲\pi+\frac{\pi}{۲}$ یعنی $\frac{۵\pi}{۲}$ است، یعنی ۴۵۰ درجه معادل $\frac{۵\pi}{۲}$ رادیان است.

هر متحرک روی دایره اگر به اندازه‌ی یک درجه بچرخد به اندازه‌ی $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط آن را طی می‌کند. برای دایره‌ای به شعاع ۱ این طول برابر $\frac{۲\pi}{۳۶۰}$ یعنی $\frac{\pi}{۱۸۰}$ رادیان است. پس یک درجه $\frac{\pi}{۱۸۰}$ رادیان است.

پس اگر زاویه‌ای به اندازه‌ی D درجه باشد، بر حسب رادیان به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۱۸۰}D$ رادیان خواهد بود. اگر مقدار زاویه‌ای برحسب درجه D و بر حسب رادیان R باشد، داریم :

$$R=\frac{\pi}{۱۸۰}D$$

$$\frac{R}{\pi}=\frac{D}{۱۸۰}$$

از این تساوی برای تبدیل واحد درجه به رادیان و تبدیل واحد رادیان به درجه می‌توان استفاده کرد.

مثال

مقدار $\frac{-\pi}{۶}$ رادیان را به درجه بنویسید.

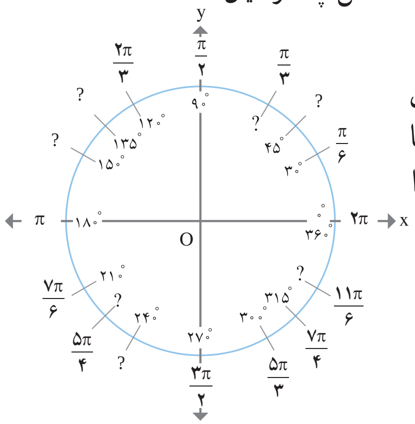
با استفاده از رابطه‌ی بالا داریم :

$$D=\frac{-\frac{\pi}{۶}\times ۱۸۰^{\circ}}{\pi}=-۳۰^{\circ}$$

۱ــ یک متحرک روی دایره، چه زاویه‌ای بر حسب رادیان بچرخد تا به جای اول خود باز گردد؟

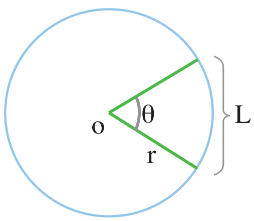
۲ــ ۲۰۰ درجه معادل چند رادیان است؟ ۷۲– درجه معادل چند رادیان است؟

۳ــ شکل مقابل دایره‌ای به شعاع واحد را نشان می‌دهد که اندازه‌های زوایا بر حسب درجه و رادیان با یک‌دیگر معادل هستند. جاهای خالی دایره‌ی فوق را تکمیل نمایید.



۴ــ $\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان معادل چند درجه است؟ $\frac{-\pi}{۶}$ رادیان معادل چند درجه است؟

۵ ــ در فعالیت مربوط به پیست دوچرخه سواری اگر علی مسافت $\frac{۷\pi}{۲}$ کیلومتر را طی کرده باشد، مقدار زاویه‌ای که چرخیده است را بر حسب درجه بیان کنید.



اگر یک زاویه‌ی θ در دایره‌ای به شعاع r کمانی به طول L را ببرد، در این صورت اندازه‌ی θ به رادیان برابر $\frac{L}{r}$ می‌باشد. در حالتی که r=۱ باشد اندازه‌ی L با اندازه‌ی θ برابر است.

در دایره‌ای به شعاع ۳ سانتی‌متر توسط زاویه‌ی θ کمانی به طول ۶ سانتی‌متر بریده می‌شود. مقدار θ به رادیان چه‌قدر است؟

حل :

$$\theta = \frac{L}{r} = \frac{۶}{۳} = ۲$$

اندازه‌ی θ به رادیان برابر ۲ می‌باشد.

مسائل

۱ــ دایره‌ای به شعاع واحد رسم کنید. روی این دایره انتهای کمان‌های داده شده را در موقعیت استاندارد مشخص کنید.

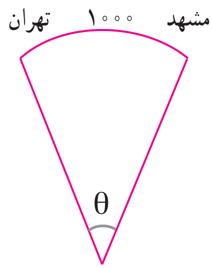
الف) $\frac{۳\pi}{۲}$ ب) ۳رادیان

۲ــ زوایای ۳- رادیان و π ۳- رادیان چه کسری از دایره‌ی طی شده می‌باشند؟ اندازه‌ی آن‌ها را بر حسب درجه بیان کنید.(با تقریب سه رقم اعشار)

۳- اندازه‌ی زاویه‌ای که عقربه‌ی ساعت شمار از ساعت ۱ بعدازظهر تا ۳ بعدازظهر حرکت می کند را بر حسب درجه و رادیان بیان کنید.

۴ــ چه مدت طول می‌کشد تا عقربه‌ی دقیقه شمار به اندازه‌ی $۲/۵\pi$ رادیان دوران کند؟

۵ــ فرض کنید سوار چرخ و فلکی شده‌اید که ۴۰ کابین دارد و کابین‌های آن شماره گذاری شده‌اند. اگر در آغاز حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت، شما روی کابین شماره‌ی ۳ نشسته باشید، بعد از $\frac{۴۷\pi}{۱۰}$ رادیان دوران، شما در موقعیت کدام کابین قرار دارید؟



۶ــ فرض کنیم فاصله‌ی تهران تا مشهد روی قسمتی از سطح زمین تقریباً ۱۰۰۰ کیلومتر باشد.اگر شعاع زمین را ۶،۴۴۰ کیلومتر فرض کنیم، اندازه‌ی زاویه‌ای را بر حسب رادیان که رأس آن در مرکز زمین باشد پیدا کنید به طوری که تهران روی یک ضلع آن و مشهد روی ضلع دیگر آن باشد.

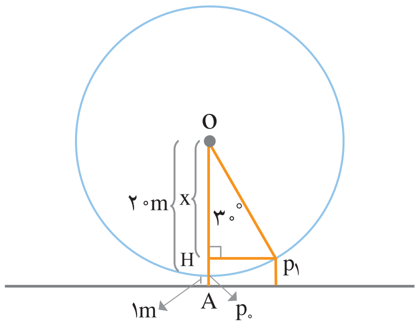
شناخت دایره مثلثاتی

در ریاضی سال اول متوسطه مقادیر مثلثاتی زوایای حاده را می‌توانستید محاسبه کنید.

حل یک مسئله :

خانواده آقای حسینی دریک روز تعطیل به شهربازی رفتند، رضا و زهرا فرزندان آقای حسینی قصد دارند سوارچرخ و فلکی به شعاع ۲۰ متر شوند. بعد از اینکه رضا از سطح زمین سوار کابین

شماره‌ی ۱ شده است، مسئول چرخ وفلک جهت سوارشدن زهرا کابین را به اندازه‌ی ۳۰° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت حرکت داد. می‌خواهیم بدانیم فاصله‌ی رضا از سطح زمین چه‌قدر است. با توجه به دانسته‌هایمان از ریاضی سال اول متوسطه، می‌توانیم این مسئله را حل کنیم.



اگر شکل مقابل را درنظر بگیریم می‌بینیم که x اختلاف بین OA (فاصله‌ی مرکز چرخ تا زمین) و HA می‌باشد و AH = h. با استفاده از نسبت کسینوس‌ها داریم: $\cos ۳۰^\circ = \frac{x}{۲۰} = \frac{۲۱-h}{۲۰}$

که با توجه به رابطه‌ی بالا h به‌دست می آید.

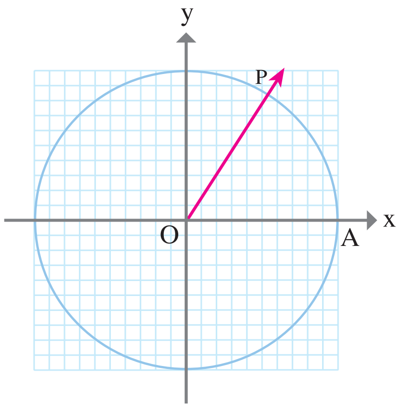
اگر کابین رضا به اندازه‌ی ۱۲۰ درجه یا ۲۴۰ درجه یا ۳۰۰ درجه دوران کند فاصله‌ی رضا از سطح زمین چه‌قدر خواهد بود؟

برای این‌که به سؤال فوق پاسخ داده شود بایستی نسبت‌های مثلثاتی زوایای بیش‌تر از ۹۰° را بتوانیم محاسبه کنیم.

در این قسمت به این می‌پردازیم که چگونه مقادیر مثلثاتی هر زاویه‌ی دلخواه را محاسبه کنیم.

در فعالیت زیر از ابزار پرگار، نقاله، کاغذ شطرنجی و ماشین حساب استفاده کنید.

فعالیت



روی کاغذ شطرنجی محور مختصات را رسم نمایید.

فرض کنید طول هر ضلع مربع روی صفحه شطرنجی نمایش ۰/۱ واحد باشد. به مرکز مبدأ مختصات مانند شکل مقابل دایره‌ای به شعاع ۱ رسم کنید.

۱ــ نقاله را به گونه‌ای قرار دهید که نقطه‌ی O در مبدأ قرار گرفته و از نقطه‌ی A زاویه‌ای به اندازه‌ی ۵۷/۳ درجه را روی دایره مشخص نمایید و آن را P بنامید.

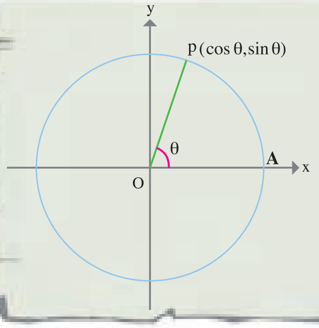
۲ــ با به کار بردن کاغذ شطرنجی طول و عرض نقطه‌ی P را به‌دست آورید.

۳ــ با ماشین حساب کسینوس و سینوس ۵۷/۳ درجه را محاسبه کنید و رابطه‌ی بین مختصات

نقطه‌ی P و مقادیر سینوس و کسینوس را بنویسید.

۴ــ با ۲ و ۳ برابر کردن زاویه فوق، سه فعالیت صفحه‌ی قبل را تکرار کنید.

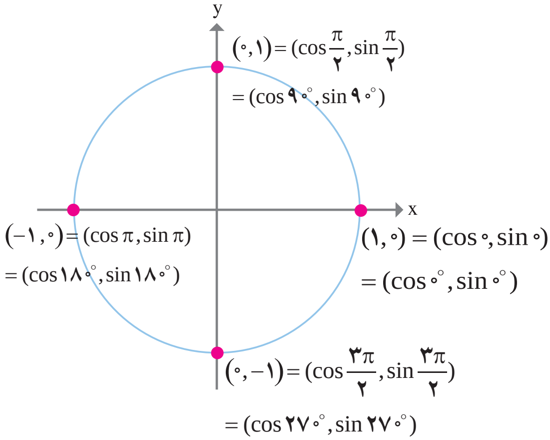
با توجه به فعالیت صفحه‌ی قبل می‌توانیم بگوییم $(\cos ۵۷/۳, \sin ۵۷/۳)$ به طور تقریبی با مختصات نقطه‌ی P برابر است.



در دایره ای به شعاع ۱ (دایره‌ی مثلثاتی) به ازای هر مقدار حقیقی زاویه‌ی θ، نقطه‌ی $P(\cos\theta, \sin\theta)$ دوران‌یافته‌ی نقطه‌ی A تحت دوران θ حول مبدأ می‌باشد که در آن $\sin\theta = y$ و $\cos\theta = x$ می‌باشد.

مثال

۱ــ در شکل زیر کسینوس و سینوس مضارب صحیح زاویه‌ی $\frac{\pi}{۲}$ روی دایره‌ی مثلثاتی مشخص شده است.



۲ــ نقطه‌ی (۱,۰) به اندازه‌ی $\frac{۱۳\pi}{۵}$ حول مبدأ مختصات دوران می‌کند. مختصات نقطه‌ی به‌دست آمده‌ی آن را تا ۳ رقم اعشار حساب کنید.

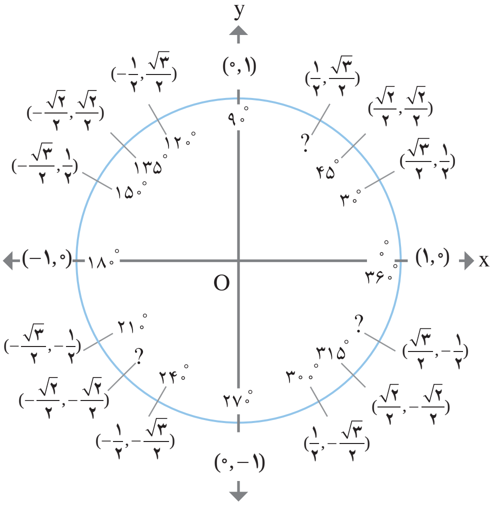
با استفاده از ماشین حساب مقدار ($\sin\frac{۱۳\pi}{۵}$ و $\cos\frac{۱۳\pi}{۵}$) عبارت‌است از :

(۰/۹۵۱ و ۰/۳۰۹−)

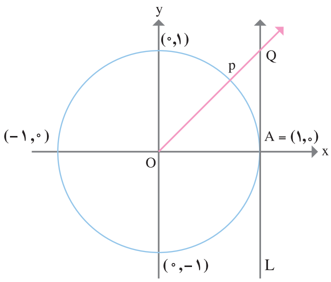
۳- فرض کنیم ضلع انتهایی زاویه‌ی θ که از نقطه‌ی (۱,۰) شروع شده است در نقطه‌ی $P(\frac{۲\sqrt{۲}}{۳},\frac{-۱}{۳})$ روی دایره‌ی مثلثاتی قرار بگیرد، مقادیر $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را به‌دست آورید.

$P(\cos\theta, \sin\theta) = P(\frac{۲\sqrt{۲}}{۳},-\frac{۱}{۳})$ بنابراین : $\cos\theta=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ و $\sin\theta=-\frac{۱}{۳}$

حال مقادیر دقیق سینوس و کسینوس بعضی از زوایای خاص را روی دایره مثلثاتی مشخص می کنیم.



خط L را در شکل مقابل در دایره‌ی مثلثاتی در نظر بگیرید که از نقطه‌ی (۱ , ۰) = A می‌گذرد. P تصویر A تحت دوران θ به مرکز O می‌باشد و خط OP خط L را در نقطه‌ی Q قطع می‌کند. وقتی $۰<\theta<\frac{\pi}{۲}$ باشد، اندازه‌ی $QA=\tan\theta$



۱ــ مثال شماره‌ی ۲ صفحه‌ی قبل را با استفاده از کاغذ شطرنجی و رسم دایره‌ی مثلثاتی آزمایش کنید.

۲ــ از نمودار شکل بالا استفاده نمایید و درستی رابطه‌های صفحه‌ی بعد را بررسی کنید :

الف : به ازای هر مقدار θ داریم : $\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta=۱$

ب : به ازای هر مقدار θ با شرط این که $\cos\theta\neq ۰$ باشد، داریم : $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

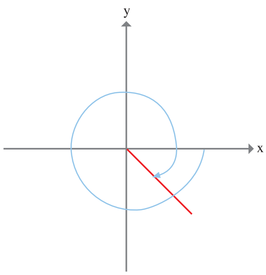
۳- مقادیر $\tan\pi$ و $\tan(-۲۷۰)$ را تعیین کنید.

۴- با رسم دایره‌ی مثلثاتی، مقدار $\tan\theta$ در حالتی که $\frac{\pi}{۲}<\theta<\pi$ باشد را نشان دهید.

۵- با توجه به این‌که به صورت عملی با مقادیر مثبت و منفی عبارت‌های مثلثاتی آشنا شده‌اید، جدول زیر را تکمیل کنید.

مقدار θ	ربع	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\tan\theta$
$۰<\theta<\frac{\pi}{۲}$	اول			
$\frac{\pi}{۲}<\theta<\pi$	دوم			
$\pi<\theta<\frac{۳\pi}{۲}$	سوم			
$\frac{۳\pi}{۲}<\theta<۲\pi$	چهارم			

مثال



علامت $\tan(-۷)$, $\cos(-۷)$, $\sin(-۷)$ (اندازه‌ی -۷ بر حسب رادیان است) را مشخص کنید.

حل : (-۷) رادیان، دوران بیش‌تر از یک دور و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد. بنابراین ضلع انتهایی زاویه در ربع چهارم قرار می‌گیرد و در ربع چهارم کسینوس مثبت و تانژانت و سینوس منفی می‌باشند.

۱- با فرض این‌که نقطه‌ی $A=(۱,۰)$ به اندازه‌ی θ حول مبدأ مختصات دوران کند، نقاط

حاصل از دوران به ازای مقادیر داده شده‌ی θ را به‌دست آورید.

الف) ۸۱۰- درجه ب) -۱۳π ج) $\frac{۱۱\pi}{۲}$

۲- با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی همه‌ی مقادیر θ بین ۰ و ۲π به طوری که $\cos\theta = \frac{۱}{۲}$ می‌باشد را بیابید.

مسائل

۱- مقادیر دقیق عبارت‌های زیر را به‌دست آورید:

$\cos\frac{۷\pi}{۴}$ و $\sin ۱۳۵^\circ$ و $\sin\frac{۳\pi}{۴}$ و $\cos ۳۰۰^\circ$ و $\tan\frac{۱۱\pi}{۶}$

۲- الف) اگر $\cos\theta = \frac{۲}{۵}$ باشد، دو مقدار ممکن برای $\sin\theta$ بیابید.

ب) با رسم شکل، مختصات فوق را روی شکل نشان دهید.

۳- اگر زاویه‌ی θ در موقعیت استاندارد باشد به طوری‌که نقطه‌ی انتهایی کمان θ دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی $\left(-\frac{۲}{\sqrt{۵}}, \frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)$ قطع کند، مقادیر $\tan\theta, \cos\theta, \sin\theta$ را در نقطه‌ی فوق حساب کنید.

۴- با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی همه‌ی مقادیری از θ بین $۲\pi, ۰$ را بیابید به طوری‌که روابط زیر برقرار باشد:

الف) $\sin\theta = \frac{۱}{۲}$ ب) $\tan\theta = -\sqrt{۳}$ ج) $\cos\theta = ۰$

۵- اگر از نقطه‌ای روی دایره‌ی مثلثاتی شروع به حرکت کنیم و به اندازه‌ی ۲π واحد فاصله را طی کنیم، به جایی که حرکت را شروع کرده‌ایم می‌رسیم. اگر حرکت را برای بار دوم ادامه دهیم، همه‌ی مقادیر (x, y) ای که در دور اول به آن رسیدیم، مجدداً به آن می‌رسیم. با استفاده از بحث بالا مقادیر هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید:

$\cos(۲\pi - \frac{\pi}{۶})$ $\sin(۲\pi + \frac{\pi}{۳})$

$\cos(۲\pi + \frac{۲\pi}{۳})$ $\sin(۲\pi - \frac{\pi}{۴})$

۶- دو مقدار از θ بین $\frac{\pi}{2}$, $\frac{-\pi}{2}$ پیدا کنید به طوری‌که $\cos\theta = \frac{1}{2}$ باشد.

۷- فرض کنیم : $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

الف) دو مقدار از θ بین 2π , 0 پیدا کنید به طوری‌که رابطه‌ی فوق درست باشد.

ب) دو مقدار منفی از θ مشخص کنید که معادله‌ی فوق درست باشد.

۸- چهار مقدار از θ بین $-2\pi, 2\pi$ پیدا کنید به طوری‌که $\cos\theta = \sin\theta$ باشد و به ازای مقادیر θ به‌دست آمده از بالا $\tan\theta$ را به‌دست آورید.

تعیین مقادیر مثلثاتی برای تمام زوایا

فعالیت

۱- یک دایره‌ی مثلثاتی رسم نموده و نقطه‌ای مانند P روی آن چنان بیابید که زاویه‌ی نظیر آن 30° باشد.

۲- قرینه‌ی نقطه‌ی P را نسبت به محورyها مشخص نموده و آن را Q نامیده و مختصات آن را معین کنید.

۳- اگر نقطه‌ی $(1,0)$ را A و نقطه‌ی $(-1,0)$ را B بنامیم، چه رابطه‌ای بین زوایای QOB و POA وجود دارد؟

۴- زاویه‌ی AOQ را در جهت مثبت مشخص نموده و سپس بر اساس این زاویه مختصات نقطه‌ی Q را به‌دست آورید.

۵- از مختصات تعیین شده Q در بند ۲ و بند ۴ فعالیت فوق چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

در حالت کلی به ازای هر زاویه‌ی دلخواه θ :

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$
$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

مثال

فرض کنیم : $\sin\theta = ۰/۱۵$ باشد، مقدار $\sin(\pi-\theta)$ را به‌دست آورید.

با استفاده از روابط به‌دست آمده در صفحه‌ی قبل داریم : $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta = ۰/۱۵$

کار در کلاس

مقادیر سینوس و کسینوس زوایای $\frac{۲\pi}{۳}$ و $\frac{۵\pi}{۶}$ را به‌دست آورید.

فعالیت

با استفاده از پرگار و نقاله دایره مثلثاتی رسم نموده و به ازای هر زاویه دلخواه θ مقادیر $\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)$ و $\cos\theta$ را به‌دست آورده و رابطه‌ی بین این دو را حدس بزنید وحدستان را با دو مقدار از θ آزمایش کنید.

به ازای هر زاویه‌ی θ بر حسب درجه داریم:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta) = \cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta) = \sin\theta$$

مثال

اگر $\cos\theta = \frac{۲}{۵}$ باشد، مقدار $\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)$ را به‌دست آورید.

$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta) = \cos\theta = \frac{۲}{۵}$$

کار در کلاس

رابطه‌ی بین $\cos\theta$ و $\sin(۹۰+\theta)$ و همچنین رابطه‌ی $\sin\theta$ و $\cos(۹۰+\theta)$ را با استفاده از فعالیت بالا بنویسید.

فعالیت

یک دایره‌ی مثلثاتی را درنظر بگیرید.

۱ــ نقطه‌ی $A(۱,۰)$ را به اندازه‌ی θ دوران دهید و آن نقطه را P نامیده و مختصات آن را بنویسید.

۲ــ قرینه‌ی نقطه‌ی P را نسبت به مبدأ مختصات مشخص کرده و آن را Q نامیده و مختصات آن را مشخص کنید.

۳ــ با توجه به این‌که Q تصویر A تحت دوران به اندازه‌ی $\pi+\theta$ است، مختصات آن را بنویسید.

۴ــ ازدو بند فوق چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

در حالت کلی:

$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$
$$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$$

مثال

اگر $\cos\theta=\frac{۲}{۳}$ باشد، مقدار $\cos(\pi+\theta)$ چه قدر خواهد بود؟

حل :

$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta=-\frac{۲}{۳}$$

۱– با استفاده از پرگار و نقاله دایره مثلثاتی رسم نموده و به ازای یک زاویه دلخواه x روابط بالا را آزمایش کنید.

۲–روابط فوق را برای تانژانت هر زاویه دلخواه بررسی کنید.

۳– مقدار $۴\sin(۲x+\pi)$ را به ازای $x=\frac{\pi}{۶}$ به‌دست آورید.

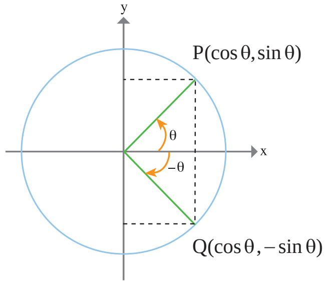
فعالیت

با استفاده از ماشین حساب مقادیر زیر را حساب کنید :

۱– زوایای زیر بر حسب رادیان هستند.

ج) $\sin(۲/۸),\sin(-۲/۸)$ ب) $\sin(\frac{۵\pi}{۶}),\sin(\frac{-۵\pi}{۶})$ الف) $\sin\frac{\pi}{۳}\ ,\ \sin\frac{-\pi}{۳}$

۲- $\cos(-۸۳^{\circ})$ و $\cos(۸۳^{\circ})$



اگر دقت کنیم می‌بینیم تمام زوایای فوق قرینه هستند اما سینوس و کسینوس زوایای قرینه متفاوت عمل کرده‌اند. حال به تحلیل چرایی این موضوع می‌پردازیم.

فرض کنیم P دوران یافته‌ی (۱,۰) تحت زاویه θ و Q دوران یافته‌ی (۱,۰) تحت زاویه $-\theta$ مطابق شکل مقابل باشند.

توجه کنید که P,Q قرینه‌ی یکدیگر نسبت به محور x ها هستند.

بنابراین مختص x آن‌ها یعنی کسینوس‌ها مساوی هستند اما مختص y آن‌ها یعنی سینوس‌ها قرینه‌اند.

بنابراین :

به ازای هر زاویه‌ی θ داریم:

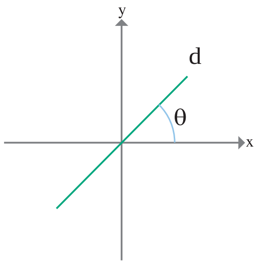
$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$
$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

۱- روابط فوق را برای تانژانت θ به‌دست آورید.

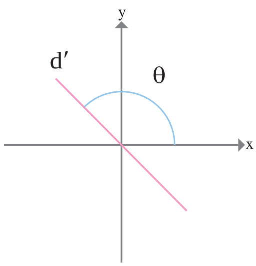
۲- مقادیر $\cos(\theta - ۱۸۰^{\circ})$ و $\sin(\theta - ۱۸۰^{\circ})$ را به‌دست آورید.

رابطه بین شیب خط و تانژانت زاویه

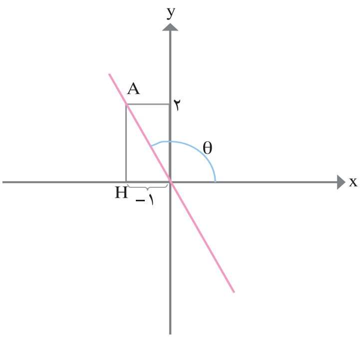
شیب خط‌هایی که با محور x ها زاویه‌ی حاده می‌سازند تانژانت همان زاویه است. اما در مورد خط‌هایی که با جهت مثبت محور x ها زاویه‌ی منفرجه می‌سازند چه می‌توان گفت؟



$m_d = \tan\theta$ (شیب خط d)



$m_{d'} = ?$ (شیب خط d′)



شیب خط‌هایی که با محور x زاویه‌ی منفرجه می‌سازند عددی منفی است، پس تانژانت زاویه‌های منفرجه باید عددی منفی باشد. به‌نظر شما در خط $y=-۲x$ عدد ۲− چه رابطه‌ای با زاویه‌ی این خط و محور xها دارد؟

خط $y=-x-۱$ با محور xها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۱− مقادیر هر یک از عبارت‌های زیر را به ازای $x=\frac{\pi}{۶}$ به‌دست آورید.

الف) $y=۱+۲\sin ۳x$

ب) $y=-۱+\frac{۳}{۴}\cos(۲x-\frac{\pi}{۲})$

ج) $y=۴-\frac{۲}{۳}\sin(۳x-\pi)$

۲− عبارت $\cos ۴=\cos(-۴)$ درست یا نادرست است؟ با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی جوابتان را بررسی کنید. (زوایای فوق بر حسب رادیان هستند.)

۳− اگر $\sin\theta=۰/۴$ باشد (θ بر حسب درجه است) بدون ماشین حساب مقادیر $\sin(-\theta), \sin(۱۸۰-\theta)$ را به‌دست آورید.

۴- اگر $\cos\theta = ۰/۲$ باشد(θ بر حسب رادیان) بدون ماشین حساب مقادیر $\cos(\pi+\theta), \sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)$ را به‌دست آورید.

۵- اگر عبارت‌های زیر درست است دلیل درستی و اگر نادرست است با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی دلیل نادرستی آن‌ها را بیان کنید.

$$\sin(\frac{-۲\pi}{۳}) = \sin(\frac{۲\pi}{۳})$$

$$\cos\frac{\pi}{۶} = \cos\frac{۵\pi}{۶}$$

۶- با ارایه‌ی مثالی نشان دهید رابطه‌ی زیر همواره درست نیست.

$$\sin(\pi-\theta) = \sin\pi - \sin\theta$$

۷- به ازای هر مقدار θ نشان دهید $\cos\theta + \cos(\pi-\theta) = ۰$

۸- خط d با محور xها زاویه‌ی ۳۰ درجه می‌سازد، شیب این خط را به دست آورید.

تابع مثلثاتی

فعالیت

یک شهر بازی چرخ وفلکی دارد که شعاع دایره‌ی آن ۱۵ متر است. فاصله‌ی مرکز دایره‌ی این چرخ وفلک تا زمین ۲۰ متر است. برای هر نقطه‌ی C از این چرخ وفلک با مشخص بودن زاویه‌ی OC باخط افق می‌توان فاصله‌ی نقطه‌ی C تا زمین را به دست آورد. به عبارت دیگر فاصله‌ی C تا زمین به زاویه‌ی OC با خط افق بستگی دارد.

زاویه‌ای که OC با جهت مثبت خط افق می‌سازد را x و فاصله‌ی C تا زمین را y بنامید.

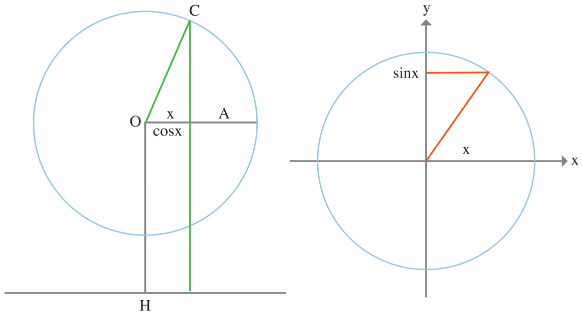
۱- در حالتی که x زاویه‌ای بین صفر و π باشد، نشان دهید y مجموع دو طول AC و OH است و نتیجه بگیرید : $y = ۲۰+۱۵\sin x$

۲- در حالتی که x بین π و ۲π باشد، شکل جدیدی بکشید و باز نتیجه بگیرید :

$y=۲۰+۱۵\sin x$

تابعی که در فعالیت بالا به آن رسیدیم، نمونه‌ای از توابع مثلثاتی می‌باشد.

توابع $y=\sin x$, $y=\cos x$ از ساده‌ترین توابع مثلثاتی هستند و در دایره‌ی مثلثاتی تعبیر هندسی ساده‌ای دارند.(x بر حسب رادیان است.)



به ازای هر مقدار x مقدارهای sinx و cosx تعریف شده‌اند و دامنه‌ی این توابع تمام $\mathbb{R}$ است. با تغییر x مقادیری که برای sinx و cosx به‌دست می‌آید اعدادی بین ۱- و ۱ هستند، به عبارت دیگر برد این توابع $[-۱,۱]$ است.

حال به مسأله‌ی چرخ و فلک صفحه‌ی قبل برمی‌گردیم :

فعالیت

۱- اگر سوار چرخ و فلکی شوید که فاصله‌ی شما تا سطح زمین از رابطه‌ی $y=۲۰+۱۵\sin\theta$ تعیین شود، با تکمیل جدول زیر فاصله‌ی خود تا سطح زمین را بر اساس زاویه‌ی طی شده به دست آورید.

θ (زاویه‌ی طی شده)	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y (فاصله‌ی شخص تا سطح زمین)								

۲- با توجه به جدول صفحه‌ی قبل به نظر شما در مورد فاصله‌ی خودتان تا سطح زمین در زوایای صفر و ۲π چه می‌توان گفت؟

۳- جدول صفحه‌ی قبل را برای زوایای $\theta + ۲\pi$ ترسیم و تکمیل نموده و مقادیر به دست آمده را با مقادیر جدول اولیه مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴- به نظر شما اگر جدول اولیه را برای زوایای $\theta + ۲\pi \times ۲$ ترسیم نماییم چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

فرض کنیم مریم سوار چرخ و فلک شود و بعد از یک دور چرخیدن، زهرا سوار چرخ و فلک شده و کنار مریم بنشیند، در این حالت با آن‌که مریم به اندازه‌ی $\theta + ۲\pi$ و زهرا به اندازه‌ی θ که یک دور کمتر از مریم چرخیده‌است، اما هر دو در یک محل قرار می‌گیرند.

$$\sin(\theta + ۲\pi) = \sin\theta$$
$$\sin(\theta + ۲ \times ۲\pi) = \sin\theta$$

.

.

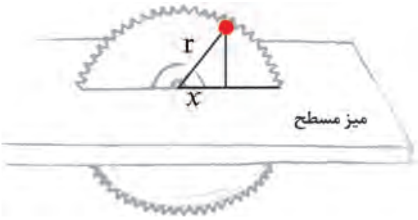
.

$$\sin(\theta + n \times ۲\pi) = \sin\theta$$

به چنین توابعی توابع تناوبی می‌گوییم و زاویه‌ی ۲π دوره‌ی تناوب تابع فوق نامیده می‌شود.

تابع $y=\cos\theta$ نیز دارای دوره‌ی تناوب ۲π می‌باشد(چرا؟)

فعالیت



یک اره‌ی برقی را به شعاع ۴۰ سانتی متر در نظر بگیرید که یک نقطه‌ی قرمز رنگ بر روی لبه‌ی خود دارد و در هر ثانیه چهار دور در جهت مثبت می‌چرخد. فرض کنیم که نقطه‌ی قرمز اره‌برقی در لحظه‌ی t=۰ روی میز مسطحی باشد که الوار را برای برش روی آن قرار می‌دهند. با فرض این که مرکز اره برقی روی مبدأ مختصات باشد، در این صورت :

۱– نقطه‌ی قرمز در هر ثانیه چه زاویه‌ای را طی می‌کند؟

۲– در ۱ دقیقه چه زاویه‌ای را طی می‌کند؟

۳– در چه مدتی ۷۶۵ درجه می‌گردد؟

۴– نقطه‌ی قرمز در زمان‌های $t=\frac{۱}{۱۶},\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۴},۱$ (ثانیه) در چه محلی قرار می‌گیرد، روی شکل نشان دهید.

۵– جدول زیر را تکمیل نموده و نمودار آن را رسم کنید :

t	$t=۰$	$t=\frac{۱}{۱۶}$	$t=\frac{۲}{۱۶}$	$t=\frac{۳}{۱۶}$	$t=\frac{۴}{۱۶}$	$t=\frac{۵}{۱۶}$	$t=\frac{۶}{۱۶}$	$t=\frac{۷}{۱۶}$	...	$t=۱$
اندازه ارتفاع نقطه‌ی قرمز تا سطح										

اگر بر روی محورهای مختصات جهت مثبت محور xها را زمان طی شده و محور yها را سطوح مختلف ارتفاع از سطح میز در نظر بگیریم، نمودار حاصل، موج سینوسی است که نقاط جدول فوق روی آن نمودار قرار دارند.

صفحه‌ی اره برقی در هر ثانیه ۴ دور کامل خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت طی می‌کند به

عبارت دیگر هر $\frac{۱}{۴}$ ثانیه یک دور کامل طی می‌کند و این موج تکرار می‌شود. بنابراین تابع فوق تناوبی است و این تناوب در هر $\frac{۱}{۴}$ ثانیه تکرار می‌شود.

آیا به این فکر کرده‌اید که اگر t را منفی فرض کنیم چه پیش می‌آید؟ به نظر شما t منفی به چه معناست؟

برای t منفی منحنی را رسم کنید.

حال به بررسی و تحلیل نمودار تابع $y = \sin\theta$ می پردازیم :

جدول زیر را درنظر بگیرید :

x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π
sinx	۰	۰/۵	۰/۸۷	۱	۰/۸۷	۰/۵	۰	-۰/۵	-۰/۸۷	-۱	-۰/۸۷	-۰/۵	۰

۱– نمودار جدول فوق را رسم و آن را در جهت مثبت محور xها گسترش دهید.

۲– عبارات زیر را تکمیل کنید.

وقتی که x از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ افزایش می‌یابد، مقدار y از ۰ تا ۱ افزایش می‌یابد.
وقتی که x از $\frac{\pi}{۲}$ تا π افزایش می‌یابد، ....
وقتی که x از π تا $\frac{۳\pi}{۲}$ ....
....

۳- به ازای $-۲\pi \le x \le ۰$ جدول و نمودار تابع $y = \sin x$ را رسم کنید و در جهت منفی محور xها گسترش دهید و بیان نمایید که در بازه‌ی فوق به ازای چه مقادیری از x، $y = \sin x$ افزایش و به ازای چه مقادیری از x کاهش می‌یابد.

از نمودار فوق مشخص است که تابع $y = \sin x$ ، موج سینوسی آن هر ۲π رادیان تکرار می‌شود. بنابراین تابع فوق یک تابع تناوبی با دوره‌ی تناوب ۲π است.

از جدول صفحه‌ی قبل پیداست که تابع $y = \sin x$ در نقاط $\ldots, -۲\pi, -\pi, ۰, \pi, ۲\pi, \ldots$ صفر است. بنابراین مقدار تابع $y = \sin x$ برای $x = k\pi$ (k متعلق به مجموعه‌ی اعداد صحیح می‌باشد.) صفر است.

مثال

به ازای چه مقادیری از θ مقدار تابع $y=\sin ۳\theta$ صفر می‌شود؟

حل : مقدار تابع $y=\sin ۳\theta$ به ازای $۳\theta = k\pi$ صفر است. بنابراین :

$$۳\theta = k\pi$$

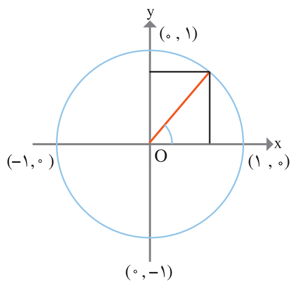
$$\theta = \frac{k\pi}{۳}$$

به ازای نقاط ... و $\frac{۲\pi}{۳}$ و $\frac{\pi}{۳}$ و ۰ و $-\frac{\pi}{۳}$ و $-\frac{۲\pi}{۳}$ و ... مقدار تابع فوق صفر می‌شود.

رابطه‌ی بین منحنی تابع سینوسی و دایره‌ی مثلثاتی

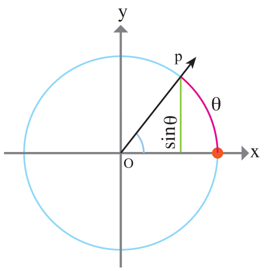
فعالیت

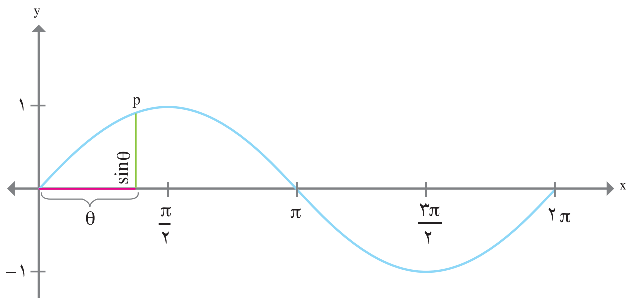
۱- با تکمیل جدول زیر تفسیر تابع $y=\sin\theta$ را روی دایره‌ی مثلثاتی انجام می‌دهیم.



ربع اول	با تغییر θ از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ نقطه‌ی p از (۱,۰) به نقطه‌ی (۰,۱) حرکت می‌کند و مقدار $y=\sin\theta$ از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.
ربع دوم	با تغییر θ از $\frac{\pi}{۲}$ تا π نقطه‌ی p از (۰,۱) به (−۱,۰) حرکت می کند و مقدار $y=\sin\theta$ از ۱ به صفر کاهش می یابد.
ربع سوم	
ربع چهارم	

۲− شکل زیر را در نظر بگیرید. اگر x از ۰ تا ۲π تغییر کند، مکان نقطه‌ی p را روی نمودار مشخص کنید :

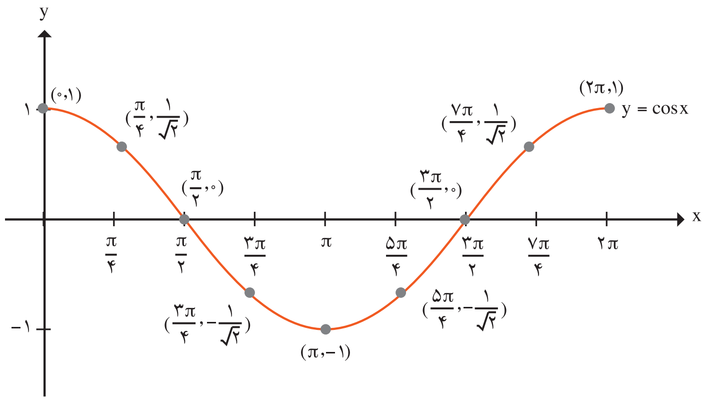




فعالیت

۱− جدول و نمودار تابع $y=\cos\theta$ را در نظر بگیرید :

x	y=cosx
۰	$\cos ۰=۱$
$\frac{\pi}{۴}$	$\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$
$\frac{\pi}{۲}$	$\cos\frac{\pi}{۲}=۰$
$\frac{۳\pi}{۴}$	$\cos\frac{۳\pi}{۴}=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$
π	$\cos\pi=-۱$
$\frac{۵\pi}{۴}$	$\cos\frac{۵\pi}{۴}=-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$
$\frac{۳\pi}{۲}$	$\cos\frac{۳\pi}{۲}=۰$
$\frac{۷\pi}{۴}$	$\cos\frac{۷\pi}{۴}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$
۲π	$\cos ۲\pi=۱$



۱-۱) تفسیر افزایشی یا کاهشی بودن تابع $y=\cos\theta$ را از روی نمودار از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ تا π ، π تا $\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ تا 2π بنویسید.

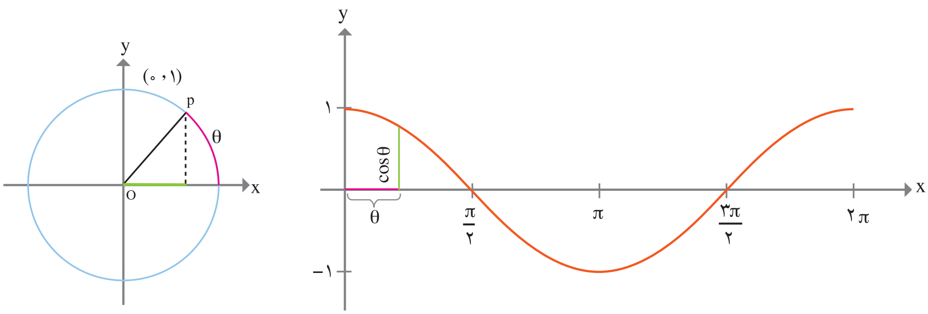
۱-۲) دوره‌ی تناوب تابع فوق را مشخص کنید.

۱-۳) به ازای چه مقادیری، تابع فوق برابر صفر است و در حالت کلی تابع $\cos\theta$ به ازای چه مقادیری صفر است.

۱-۴) جدول و نمودار تابع $y=\cos\theta$ را به ازای $-2\pi\le\theta\le 0$ رسم نمایید.

۲- تفسیر تابع $y=\cos\theta$ را با رسم دایره‌ی مثلثاتی برای ربع‌های اول تا چهارم انجام دهید.

۲-۱) نمودار شکل زیر را در نظر بگیرید. اگر x از ۰ تا 2π تغییر کند، مکان نقطه‌ی p راروی نمودار بررسی کنید :



از نمودار $y=\cos\theta$ مشخص است که موج کسینوسی هر 2π رادیان تکرار می‌شود. بنابراین تابع فوق یک تابع تناوبی با دوره‌ی تناوب 2π است.

تابع $y=\cos\theta$ در نقاط ... و $\frac{۵\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲}$ و $-\frac{\pi}{۲}$ و $-\frac{۳\pi}{۲}$ و ... صفر است.

بنابراین مقدار تابع $y=\cos\theta$ به ازای $\theta=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ که k متعلق به مجموعه‌ی اعداد صحیح است صفر است.

مثال

تابع $y=\cos(-۲\theta)$ در چه نقاطی صفر است؟

حل :

$$-۲\theta=k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$\theta=\frac{-k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}$$

به ازای نقاط ... و $-\frac{۳\pi}{۴}$ و $-\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۳\pi}{۴}$ و... تابع فوق صفر می‌شود.

در دو فعالیت زیر می‌خواهیم بررسی کنیم که مقادیر حداقلی و حداکثری تابع y=asinbx و نیز دوره‌ی تناوب تابع y=asinbx چه قدر است.

فعالیت

۱- جدول زیر را کامل کنید :

x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	π	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	۲π
$\sin x$	۰	۰/۵	۰/۷۱	۰/۸۷	۱						
$\sin ۲x$	۰	۰/۸۷	۱	۰/۸۷	۰						
$\sin ۳x$	۰	۱	۰/۷۱	۰	۱-						

۲- نقاطی که توابع فوق به ازای آن‌ها صفر است را روی محور xها مشخص کنید.

۳- نقاطی که توابع فوق به ازای آن‌ها مقادیر حداقلی و حداکثری دارند را مشخص کنید.
۴- با رسم توابع فوق روی یک دستگاه، دوره‌ی تناوب هر یک را به دست آورید.
۵- حدس می‌زنید دوره‌ی تناوب تابع $y = \sin bx$ چه مقدار باشد؟

تفکر

جدول زیر را در نظر بگیرید :

x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π
sinx	۰	۰/۵	۰/۸۷	۱	۰/۸۷	۰/۵	۰	-۰/۵	-۰/۸۷	-۱	-۰/۸۷	-۰/۵	۰
۲sinx	۰	۱	۱/۷۳	۲	۱/۷۳	۱	۰	-۱	-۱/۷۳	-۲	-۱/۷۳	-۱	۰
$\frac{۱}{۲}$sinx	۰	۰/۲۵	۰/۴۳	۰/۵	۰/۴۳	۰/۲۵	۰	-۰/۲۵	-۰/۴۳	-۰/۵	-۰/۴۳	-۰/۲۵	۰

۱- مقادیر حداکثری و حداقلی توابع فوق را به دست آورید.
۲- حدس می‌زنید مقادیر حداکثری و حداقلی تابع y=asinx چه قدر باشد؟

در حالت کلی در توابع y=acosbx و y=asinbx برای این که یک دور کامل طی شود بایستی $۰ \le bx \le ۲\pi$ تغییر نماید. بنابراین : $۰ \le x \le \frac{۲\pi}{b}$. $(b \neq ۰)$

درتابع y=acosbx و y=asinbx ماکسیمم مقدار تابع $|a|$ و مینیمم مقدار تابع $-|a|$ و دوره ی تناوب آن $\left|\frac{۲\pi}{b}\right|$ می باشد.

بنابراین با دوره‌ی تناوب و تعیین مقادیر حداقلی و حداکثری می‌توان معادله‌ی نمودار تابع را نیز حدس زد.

۱- با استفاده از جداول دو فعالیت صفحه‌ی قبل توابع $y=\sin ۲x$ و $y=۲\sin x$ را از نظر حداقلی و حداکثری و نیز دوره‌ی تناوب مقایسه کنید.

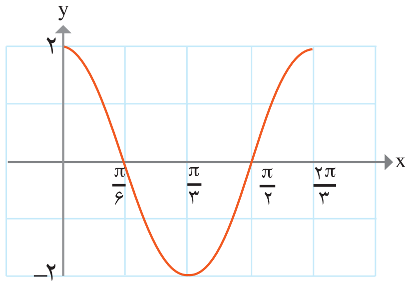
۲- درستی جملات زیر را در یک دوره‌ی تناوب از صفر تا ۲π بررسی کنید :

الف) تابع $y=\sin ax$ $(a>۰)$ در $x=\frac{\pi}{۲a}$ حداکثر و در $x=\frac{۳\pi}{۲a}$ حداقل مقدار را دارد.

ب) تابع $y=\cos ax$ $(a>۰)$ در $x=\frac{۲\pi}{a}$ حداکثر و در $x=\frac{\pi}{a}$ حداقل مقدار را دارد.

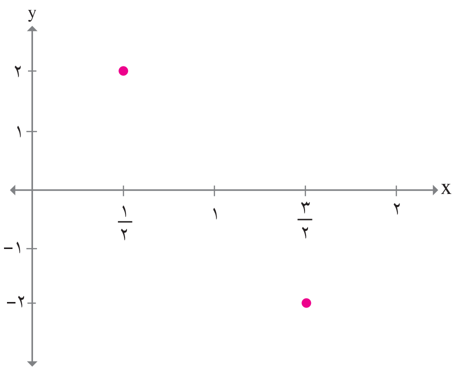
مثال

۱- با استفاده از تعیین مقادیر حداقلی و حداکثری و دوره‌ی تناوب تابع $y=۲\cos ۳x$ نمودار تابع را رسم کنید.



مقادیر حداکثری ۲ و حداقلی ۲- بوده و دوره‌ی تناوب آن $\frac{۲\pi}{۳}$ می‌باشد. از طرفی تابع $y=۲\cos ۳x$ در یک دوره‌ی تناوب در نقاط $\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{\pi}{۲}$ صفر هستند و در نقاط ۰ و $\frac{۲\pi}{۳}$ حداکثر مقادیر و در نقطه‌ی $\frac{\pi}{۳}$ حداقل مقدار را دارد. بنابراین نمودار از دو طرف قابل گسترش است.

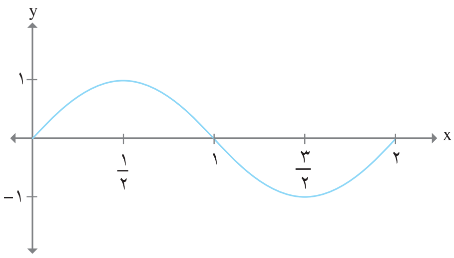
۲- نمودار $y=۲\sin(\pi x)$ را رسم کنید.



حل : با توجه به روابط بالا مقادیر حداقل و حداکثر ۲- و ۲ می‌باشد که این حداقل و حداکثر در نقاط $x=\frac{۱}{۲}$ و $x=\frac{۳}{۲}$ به دست می‌آید.

از طرفی $۰\le \pi x\le ۲\pi$ است. پس :

$۰\le x\le ۲$



دوره‌ی تناوب ۲ می‌باشد با توجه به این که $\sin \pi x$ در نقاط $x=۰$ و $x=۱$ و $x=۲$ صفر است و انتهای یک موج سینوسی کامل در نقطه‌ی $x=۲$ می‌باشد، بنابراین نمودار آن به صورت مقابل است که این موج را می‌توان از دو طرف گسترش داد.

مسائل

۱- الف) جدول زیر را کامل کنید :

x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π
sin(-x)	۰	-۰/۵			-۱												
۲sin(-x)	۰	-۱			-۲												

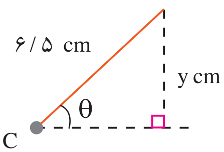
ب) نمودار $y=\sin(-x)$ و $y=۲\sin(-x)$ را رسم کنید.

۲- نمودارهای توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=-۲\sin \frac{۱}{۲}x$ ب) $y=-۳\cos \frac{۱}{۲}x$

۳- با استفاده از تعیین مقادیر حداقلی و حداکثری و نیز دوره‌ی تناوب توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=۳\sin ۲x$ ب) $y=\cos \frac{۱}{۳}x$ ج) $y=-۲\cos \frac{\pi}{۲}x$



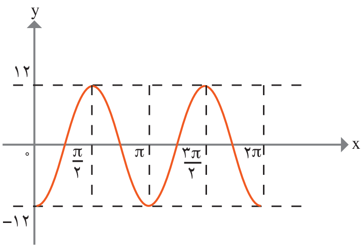
۴- طول عقربه‌ی دقیقه شمار یک ساعت ۶/۵ cm است. عقربه با جهت محور افقی زاویه‌ی θ می‌سازد. با توجه به مثلث مقابل می‌توان نوشت $y=۶/۵\sin\theta$.

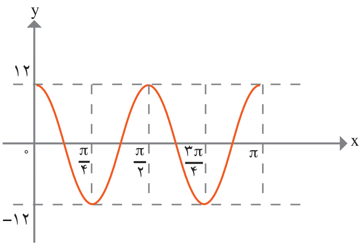
الف) حداکثر ارتفاع نوک عقربه چه قدر است ؟

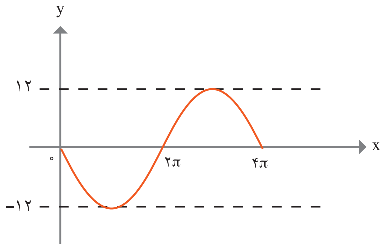
ب) حداقل ارتفاع آن را محاسبه کنید. در کدام زوایا ارتفاع صفر است ؟

ج) طول عقربه‌ی ساعت شمار ۵ cm و ارتفاع عمودی نوک آن از محور افقی تابعی به معادله‌ی $y=۵\sin\theta$ است، نمودار تابع y را در این حالت رسم کنید.

۵- معادله‌ی هر یک از منحنی‌های زیر را به صورت $y=a\sin bx$ یا $y=a\cos bx$ که در آن x بر حسب رادیان باشد، بیان کنید.







۶- وزنه‌ای به یک فنر وصل است به گونه‌ای که به طور پیوسته پایین و بالا می‌رود. تغییر مکان وزنه از نقطه‌ی تعادل بعد از t ثانیه از رابطه‌ی $d=-۳/۵\cos(۲\pi t)$ به‌دست می‌آید که d اندازه برحسب سانتی‌متر می‌باشد.

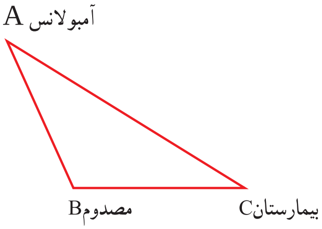
الف) نمودار تابع را به ازای $۰ \leq t \leq ۳$ رسم نمایید.

ب) بیشترین فاصله‌ی وزنه از نقطه‌ی تعادل چه‌قدر است؟

ج) چه مدت طول می‌کشد تا وزنه یک نوسان کامل انجام دهد؟

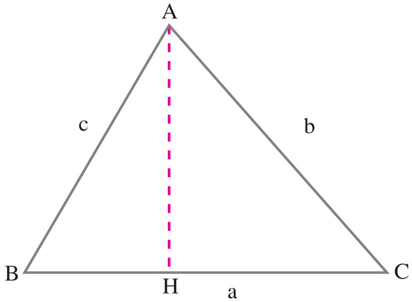
کاربردهایی از مثلثات

فاطمه به مسائل امداد و نجات علاقه‌مند است. دلیل علاقه‌مندی وی وقوع اتفاقاتی چون زلزله در کشور ما است. درنتیجه او سعی دارد مسائل این چنینی را بهتر و بیش‌تر بشناسد. دریکی از این مسائل که در فیلمی آن را دیده بود حادثه‌ای در نقطه‌ی B مانند شکل مقابل روی داد.



(این حادثه را می‌توانید زلزله، تصادف، سیل،... تصور کنید.) آمبولانس در فاصله‌ی ۱ کیلومتری از حادثه‌ی B در نقطه‌ی A قرار دارد. زاویه‌ی B , C را نیز راننده‌ی آمبولانس حدس زد. او فاصله‌ی خود تا بیمارستان را نیز می‌داند. راننده‌ی آمبولانس می‌خواهد بداند که آیا به اندازه‌ی کافی بنزین برای رفتن از B به C دارد یا نه؟

فاطمه نیز می‌خواهد این مسئله را حلّ نماید. او پیش خود چنین استدلال می‌نماید که : آمبولانس می‌بایست مسیر A تا B و سپس مسیر B تا C را طی کند.



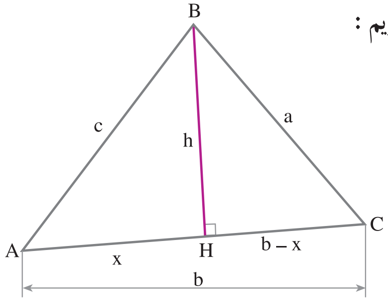
فاطمه تلاش دارد که این مسئله را از طریق مثلثات حل نماید. اما در سال پیش زوایایی که او خوانده بود همه حاده بودند. در نتیجه پیش خود گفت : بگذار اول برای مثلث با زوایای حاده مسئله را حلّ کنم سپس بقیه‌ی مثلث‌ها را نیز می‌توان حل نمود. فاطمه مثلث مقابل را ترسیم نمود و سپس به حل آن به صورت زیر پرداخت :

$$BC=BH+HC=AB\cos B+AC\cos C$$

با توجه به این‌که همه‌ی مقادیر برای او مشخص است مسئله حل می‌شود.

مسئله را برای زاویه‌ی منفرجه مانند قبل حل کنید.

فردای آن روز در کلاس درس، معلم رابطه‌ای را بررسی نمود که مسئله‌ی فوق را به راحتی با آن رابطه می‌توان حل نمود. حال به بررسی آن رابطه می‌پردازیم :



مثلث ABC را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید :

$$a^2=(b-x)^2+h^2=b^2-2bx+x^2+h^2=b^2-2b(c\cos A)+c^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

بنابراین در مثلث ABC داریم :

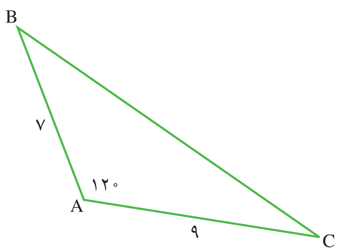
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

به روابط فوق روابط کسینوس‌ها می‌گوییم.

مثال



با استفاده از رابطه‌ی کسینوس‌ها، اندازه بزرگ‌ترین ضلع را در شکل مقابل به‌دست آورید.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=9^2+7^2-2(9)(7)\cos 120$$

$$\Rightarrow\ a=\sqrt{193}$$

۱- مسئله‌ی امداد و نجات را با استفاده از رابطه‌ی کسینوس‌ها حل کنید.

۱-۱) در مثلث ABC , $AB=8$, $AC=10$, $\cos A=\frac{1}{8}$ ، مقدار BC را پیدا کنید.

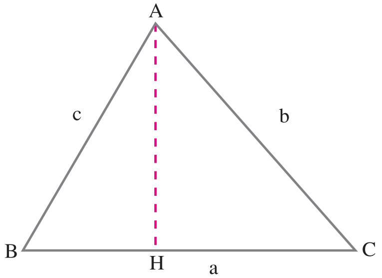
۲-

الف) رابطه‌ی کسینوس‌ها را برای یک مثلث قائم‌الزاویه بنویسید.

ب) به‌نظر شما معنای تعمیم در عبارت «رابطه‌ی کسینوس‌ها تعمیم رابطه‌ی فیثاغورث است» چیست؟

به نظر فاطمه روش جدید و استفاده از فرمول فوق‌الذکر بهتر بود، چرا که لازم نبود تمامی زوایای مثلث را بشناسند و با شناخت یک زاویه مسئله را حل می‌کرد. آیا اگر در مسئله‌ی فوق زاویه‌ی B و اضلاع AC و AB مشخص بودند با استفاده از رابطه‌ی کسینوس‌ها می‌توانستیم مسئله را حل کنیم؟

فردای آن روز سمیه که همکلاسی فاطمه بود مسئله‌ای که به نظرش جالب می‌آمد را برای فاطمه تعریف نمود. مسئله آن بودکه زمینی به شکل مثلث درانتهای محله‌ی آن‌ها بایر مانده بودکه شهرداری می‌خواست آنجا را چمن کرده و تبدیل به پارک نماید. مسئله محاسبه‌ی مساحت زمین بود. ابتدا آن‌ها شکلی را به صورت مقابل ترسیم نمودند که در آن مساحت مثلث ABC را با فرمول هندسی $S_{ABC}=۱/۲AH\times BC$ می‌خواستند محاسبه نمایند.



اما در این زمین بایر مقدار زیادی آشغال ریخته شده بود و عملاً محاسبه‌ی AH ممکن نبود. بعد از دو روز فکر کردن فاطمه راه حلّ دیگری یافت.

او به جای AH ، مقدار $AB\times\sin B$ را قرار داد و در نتیجه :

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}(AB\times\sin B)\times BC=\frac{۱}{۲}AB\times BC\times\sin B=\frac{۱}{۲}ac\sin B$$

حال به نظر او فرمول بالا هر چند به لحاظ ریاضی با فرمول هندسی یکی بود، اما به شکل عملی می‌توانست مساحت مثلث را حساب کند.

مثال

مساحت مثلث ABC را در صورتی‌که B=۱۳۵ درجه و a=۵ و c=۶ باشد پیدا کنید :

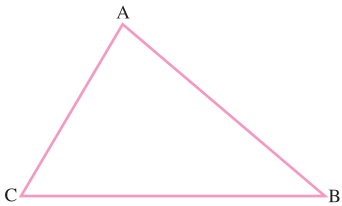
$$S=\frac{۱}{۲}ac\sin B$$

$$=\frac{۱}{۲}\times۵\times۶\times\sin۱۳۵=\frac{۱۵\sqrt{۲}}{۲}$$

در مثلث ABC، اگر $AB = ۱۴$ سانتی‌متر و $BC = ۹$ سانتی‌متر و $\angle B = ۳۰^\circ$ باشد، مساحت مثلث را حساب کنید.

فاطمه و سمیه مسئله و حل خودشان را فردای آن روز به معلم خود نشان دادند. معلم آن‌ها را تحسین نموده و راه‌حل آن‌ها را به بچه‌های کلاس نشان داد.

سپس درس جدید را به این شکل ادامه داد. همان‌گونه که دیدیم مساحت مثلث را بچه‌ها به شکل زیر محاسبه نمودند. حال به همین شکل سه رابطه‌ی متقارن زیر را داریم:



الف) $S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB \times AC \times \sin A$

ب) $S_{ABC} = \frac{۱}{۲} BC \times AC \times \sin C$

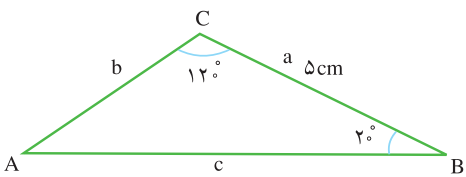
ج) $S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB \times BC \times \sin B$

در ادامه توضیح داد که اگر سه فرمول بالا را با هم برابر قرار دهیم و بر $\frac{۱}{۲} AB \times AC \times BC$ تقسیم نماییم داریم:

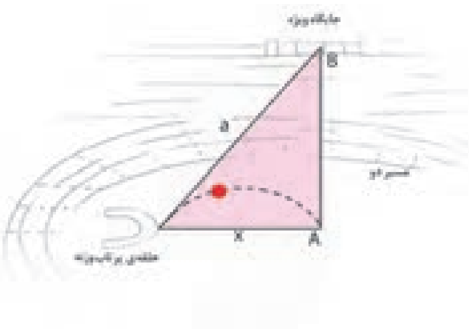
$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin C}{AB} = \frac{\sin B}{AC}$$

رابطه‌ی فوق را نخستین بار ابوریحان بیرونی دانشمند ایرانی در کتاب «قانون مسعودی» به وجه قابل توجهی اثبات کرده است.

۱- مثلث زیر را در نظر بگیرید. اگر $B = ۲۰^\circ$ و $C = ۱۲۰^\circ$ و $a = ۵cm$ باشد، مقادیر b و c را به دست آورید.



۲- با توجه به شکل مقابل درصورتی که a=۵۶۲ متر و B=۳۲° و A=۹۰° باشد، فاصله‌ی x را حساب کنید.



مسائل

۱- محیط یک زمین کشاورزی که به شکل مثلث است را به‌دست آورید، اگر یک ضلع آن ۴۵ کیلومتر وضلع دیگر آن ۴۰ کیلومتر و زاویه‌ی بین آن‌ها ۱۵۰ درجه باشد.

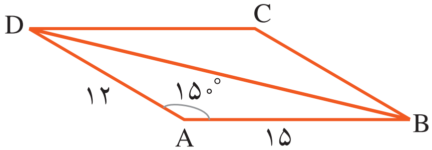
۲- طول قطر یک پنج ضلعی منتظم که طول یک ضلع آن ۱۰ سانتی‌متر می‌باشد را پیدا کنید.

۳- سُرسُره‌های یک پارک را در نظر بگیرید که نردبانی به طول ۵/۲ متر جهت بالا رفتن دارد. اگر طول سرسره ۵/۴ متر باشد و نردبان زاویه‌ی ۷۵ درجه با زمین بسازد، سینوس زاویه‌ای که سرسره با زمین می‌سازد را حساب کنید.

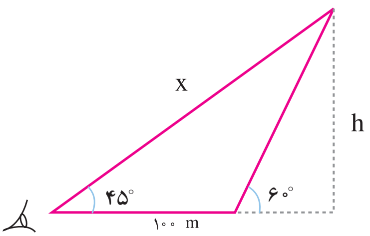
۴- قطرهای یک متوازی الاضلاع ۱۲ و ۲۲ سانتی‌متر است و تقاطع این دو یک زاویه‌ی ۱۲۵° می‌سازد. طول اضلاع بزرگ‌تر متوازی الاضلاع را به‌دست آورید.

۵- باغی به شکل ذوزنقه وجود دارد که طول‌های اضلاع موازی آن ۳۰ ، ۲۰ کیلومتر و دو ضلع دیگر هر یک ۱۰ کیلومتر است. اگر یکی از زوایای پایه ۶۰° باشد، مساحت باغ را حساب کنید.

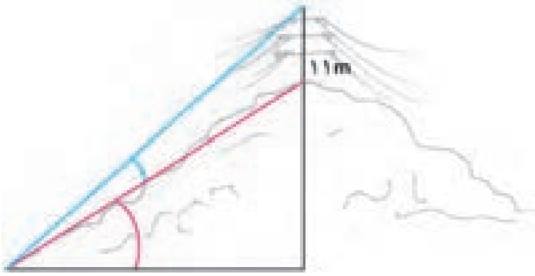
۶- اضلاع مجاور یک متوازی الاضلاع دارای اندازه‌های ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر است اندازه‌ی یک زاویه‌ی آن ۱۵۰° است. مساحت متوازی الاضلاع را پیدا کنید.



۷- شخصی نزدیک آنتن یک ایستگاه رادیویی ایستاده است. زاویه‌ی دید شخص با نوک آنتن ۶۰° است . اگر او ۱۰۰ متر به عقب برود زاویه‌ای که با نوک آنتن در موقعیت جدید می‌سازد ۴۵° است. ارتفاع آنتن را حساب کنید.

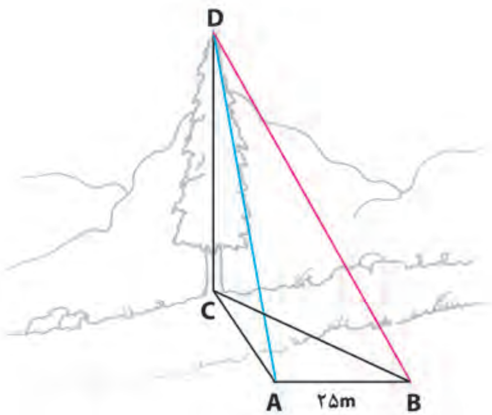


۸- آنتنی به طول ۱۱ متر را بر روی تپه‌ای در نظر بگیرید به گونه‌ای که انتهای آنتن با سطح تپه زاویه‌ی $۱/۵^\circ$ مطابق شکل می‌سازد، اگر زاویه‌ای که ابتدای آنتن با سطح افقی زمین می‌سازد ۲۵° باشد ارتفاع تپه را حساب کنید.



$$(\sin ۲۵^\circ \simeq ۰/۴۲ \text{ و } \sin ۱/۵^\circ \simeq ۰/۰۲)$$

۹- رضا می‌خواهد درختی را که در سمت دیگر رودخانه است اندازه بگیرد. او روبروی درخت در نقطه‌ی A ایستاده است. زاویه‌ی دید رضا با نوک درخت حدوداً ۶۰° است. او به اندازه‌ی ۱۲۵° برمی‌گردد و بعد از طی ۲۵ متر به نقطه‌ی B می‌رسد. زاویه‌ی بین مسیر AB و خط BC (C پای درخت است) ۴۵° می‌باشد. ارتفاع درخت را حساب کنید.



۱۰- محمد و جواد در فاصله‌ی ۳ کیلومتری از یک‌دیگر، راکتی که از یک پایگاه موشکی پرتاب شده است را مشاهده می‌کنند. اگر موقعیت محمد به جواد شمال به جنوب باشد به گونه‌ای که محمد راکت را به طرف غرب مشاهده می‌کند که با موقعیت او ۶۵ درجه زاویه دارد و جواد راکت را به طرف غرب مشاهده می‌کند که با موقعیت او ۷۵ درجه زاویه دارد. فاصله‌ی هر یک از آن‌ها تا راکت چه قدر است؟

فصل ۶

ماتریس

میوه‌فروشی وزن (برحسب کیلوگرم) میوه‌هایی را که در روزهای مختلف هفته جهت فروش عرضه‌کرده، به صورت زیر دسته‌بندی کرده است.

	سیب	پرتقال
یک‌شنبه	۸۰	۲۲۵
سه‌شنبه	۱۱۰	۲۵۰
پنجشنبه	۱۰۵	۲۲۵

	سیب	پرتقال
شنبه	۲۴۰	۴۸۰
دوشنبه	۱۸۰	۳۲۰
چهارشنبه	۳۰۰	۵۶۰
جمعه	۱۷۰	۲۰۰

اطلاعات فوق را می‌توان به صورت آرایشی از اعداد نشان داد.

$$\begin{bmatrix} 225 & 80 \\ 250 & 110 \\ 225 & 105 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 480 & 240 \\ 320 & 180 \\ 560 & 300 \\ 200 & 170 \end{bmatrix}$$

آرایش فوق از اعداد را یک ماتریس و هریک از اعداد را درایه‌ی ماتریس می‌نامند.

معمولاً ماتریس را با حروف بزرگ A ، B ، C و .... نشان می‌دهند.

مثال

ماتریس مقابل ماتریسی با سه سطر و سه ستون است.

درایه‌ی ۴ در سطر سوم و ستون دوم واقع است.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{r} \text{سطر اول} \\ \text{سطر دوم} \\ \text{سطر سوم} \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 11 & -1 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{ccc} \text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & \text{ستون سوم} \end{array} \end{array}$$

یک ماتریس با m سطر و n ستون یک ماتریس از مرتبه‌ی $m \times n$ (بخوانید ماتریس m سطر در n ستون و یا به‌طور خلاصه ماتریس m در n) است. ماتریس مثال قبل یک ماتریس از مرتبه‌ی ۳×۳ (سه در سه) است.

در صورتی که تعداد سطرها و ستون‌های یک ماتریس برابر باشند، یعنی $m = n$ باشد، ماتریس را مربعی می‌نامند.

مثال

مثالی از یک ماتریس با مرتبه‌ی ۳×۲ به صورت زیر است که در آن عدد ۷ درایه‌ای است که در سطر دوم و ستون اول واقع شده است.

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} ۱ & ۵ & -۲ \\ ۷ & ۴ & ۳ \end{bmatrix} \\ \text{سه ستون} \end{array} \quad \text{دو سطر}$$

جای هریک از درایه‌های ماتریس بالا را مشخص کنید.

مثال

در جدول‌های زیر موجودی حساب جاری پس‌انداز حسن و احمد در بانک ملی و بانک کشاورزی داده شده است.

موجودی احمد

	جاری	پس‌انداز
ملی	۶۰۰۰۰	۵۰۰۰۰
کشاورزی	۴۰۰۰۰	۹۰۰۰۰

موجودی حسن

	جاری	پس‌انداز
ملی	۷۰۰۰۰	۸۰۰۰۰
کشاورزی	۱۰۰۰۰۰	۹۰۰۰۰

موجودی حسن و احمد را در ماتریس‌هایی به صورت زیر می‌توان نشان داد:

$$\begin{bmatrix} ۶۰۰۰۰ & ۵۰۰۰۰ \\ ۴۰۰۰۰ & ۹۰۰۰۰ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ۷۰۰۰۰ & ۸۰۰۰۰ \\ ۱۰۰۰۰۰ & ۹۰۰۰۰ \end{bmatrix}$$

ماتریسی که فقط یک سطر دارد را ماتریس سطری و ماتریسی که فقط یک ستون دارد را ماتریس ستونی می‌نامیم.

مثال

$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ یک ماتریس سطری و $\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ یک ماتریس ستونی است.

کار در کلاس

در هریک از ماتریس‌های داده شده، سطرها در ستون‌ها را مانند نمونه‌ی زیر مشخص کنید و مرتبه‌ی ماتریس را بنویسید.

$$A_{2\times 3} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & \text{ستون سوم} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{سطر اول} \\ \text{سطر دوم} \end{array} \end{array} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

در هر یک از ماتریس‌های فوق درایه‌ی واقع در سطر اول و ستون اول را مشخص کنید.

در ماتریس $A = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ درایه‌ی a_{11} درایه‌ای است که در سطر اول و ستون اول جای دارد و a_{21} درایه‌ای است که سطر دوم و ستون اول را مشخص می‌کند.

مثال

در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ هریک از درایه‌ها را مشخص کنید.

$a_{11} = 2 \qquad a_{12} = 7 \qquad a_{21} = 5 \qquad a_{22} = 1$

در ماتریس $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۴ & -۱\\ ۵ & ۰\end{bmatrix}$ هریک از درایه‌های $a_{۱۱}$, $a_{۱۲}$, $a_{۲۱}$, $a_{۲۲}$, $a_{۳۱}$, $a_{۳۲}$ را مشخص کنید.

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس مساوی‌اند اگر هم‌مرتبه باشند و علاوه بر آن درایه‌های دو ماتریس نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

$$\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ ۷ & ۱\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ ۷ & ۴\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}۲ & ۵ & -۱\\ -۴ & ۹ & ۲\\ ۱ & ۷ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۵ & -۱\\ -۴ & ۹ & ۲\\ ۱ & ۷ & ۳\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}۲ & -۳ & ۱\\ ۵ & ۸ & ۱\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ -۳ & ۸\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$$

۱– مانند مثال‌های بالا شما هم سه مثال از تساوی و عدم تساوی دو ماتریس بنویسید.

۲– x و y را طوری بیابید که دو ماتریس زیر برابر باشند.

$$\begin{bmatrix}x+۵\\ ۲y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲x-۱\\ ۲+y\end{bmatrix}$$

۳– مقادیر x و y و z را در عبارات زیر به‌دست آورید.

$$\begin{bmatrix}۲x+۷ & y-۲\\ ۰ & ۴z+۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۶\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}۲ & x-۱ & y+۴ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۴ & ۵\end{bmatrix}$$

جمع دو ماتریس

به مثال میوه‌فروش باز می‌گردیم. مصرف میوه برحسب کیلوگرم در دو هفته‌ی متوالی و در روزهای شنبه و سه‌شنبه خانواده‌ای به صورت جدول‌های زیر است.

	سیب	پرتقال
شنبه	۴	۵
سه‌شنبه	۶	۳

هفته‌ی دوم

	سیب	پرتقال
شنبه	۵	۸
سه‌شنبه	۴	۷

هفته‌ی اول

که می‌توان آن‌ها را به شکل ماتریس نوشت.

$$B_{۲\times۲}=\begin{bmatrix}۵ & ۴\\ ۳ & ۶\end{bmatrix}$$ مصرف هفته‌ی دوم

$$A_{۲\times۲}=\begin{bmatrix}۸ & ۵\\ ۷ & ۴\end{bmatrix}$$ مصرف هفته‌ی اول

میزان مصرف میوه‌ی این خانواده در دو هفته مجموعاً عبارت خواهد بود از جمع دو ماتریس A و B :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{پرتقال} & \text{سیب}\end{array} \\ A+B= & \begin{bmatrix}۸ & ۵\\ ۷ & ۴\end{bmatrix}\end{array}+\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{پرتقال} & \text{سیب}\end{array}\\ \begin{bmatrix}۵ & ۴\\ ۳ & ۶\end{bmatrix}\end{array}=\begin{array}{cc}\begin{array}{cc}\text{پرتقال} & \text{سیب}\end{array} & \\ \begin{bmatrix}۸+۵ & ۵+۴\\ ۷+۳ & ۴+۶\end{bmatrix} & \begin{array}{l}\text{شنبه}\\ \text{سه‌شنبه}\end{array}\end{array}$$

دو ماتریس که دارای تعداد سطرهای برابر و تعداد ستون‌های برابر باشند را می‌توان با هم جمع کرد. به این صورت که درایه‌های نظیر به نظیر دو ماتریس با هم جمع می‌شوند.

مثال

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۷ & ۵ \\ -۱ & ۴ & ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۶ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ & ۱۱ & ۶ \\ ۰ & ۶ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۷ \\ ۲ & -۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۵ & -۷ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

به هر ماتریس مانند $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ که درایه‌های آن همگی صفر هستند، ماتریس صفر می‌گوییم و آن را با نماد $O_{m\times n}$ نشان می‌دهیم.

مثال

$$\begin{bmatrix} ۴ & -۵ \\ ۱ & ۹ \\ \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۴} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۴ & ۵ \\ -۱ & -۹ \\ -\frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۴} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ماتریس $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = O_{۳\times ۲}$ که ماتریسی با سه سطر و دو ستون است را نیز ماتریس صفر می‌نامند.

مانند جمع دو ماتریس، تفاضل دو ماتریس در صورتی که ماتریس‌ها هم‌مرتبه باشند، امکان‌پذیر است.

مثال

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱۱ & ۶ \\ ۴ & ۳ & -۱ \\ ۵ & ۹ & ۷ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۳ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲-۱ & ۱۱-۲ & ۶-۰ \\ ۴-۲ & ۳-۳ & -۱+۱ \\ ۵-۳ & ۹-۱ & ۷-۶ \end{bmatrix}$$

ضرب عدد در ماتریس

حاصل ضرب عدد حقیقی k در ماتریس با مرتبه‌ی $m\times n$ ، ماتریسی با مرتبه‌ی $m\times n$ است که هریک از درایه‌های آن برابر حاصل‌ضرب عدد k در درایه نظیر در ماتریس اولیه است.

مثال

ماتریس $A_{۲\times۳}=\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۴ & -۷ \end{bmatrix}$ و $k=۲$ را درنظر بگیرید. ماتریس kA عبارت است از :

$$k\times A_{۲\times۳}=۲\times\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۴ & -۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲\times۵ & ۲\times۰ & ۲\times۲ \\ ۲\times۱ & ۲\times۴ & ۲\times(-۷) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۰ & ۰ & ۴ \\ ۲ & ۸ & -۱۴ \end{bmatrix}$$

ماتریس $A_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} ۱ & -۳ & ۲ \\ ۲ & ۴ & ۵ \\ ۵ & ۹ & ۱ \end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید. ماتریس $۵A$ و $-۳A$ را مشخص کنید.

قرینه‌ی ماتریس

قرینه‌ی ماتریس $A_{m\times n}$ ، ماتریس $(-۱)A_{m\times n}$ است که مجموع آن‌ها ماتریس صفر $O_{m\times n}$ خواهد بود.

مثال

اگر $A_{۲\times۲}=\begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ ۲ & ۹ \end{bmatrix}$ باشد، قرینه‌ی ماتریس A عبارت است از :

$$(-۱)A_{۲\times۲}=(-۱)\begin{bmatrix}۵ & ۶\\ ۲ & ۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱\times۵ & -۱\times۶\\ -۱\times۲ & -۱\times۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۵ & -۶\\ -۲ & -۹\end{bmatrix}$$

۱ــ در مثال فوق مجموع ماتریس A و ماتریس قرینه‌اش را به‌دست آورید.

۲ــ قرینه‌ی هریک از ماتریس‌های زیر را به‌دست آورید و سپس مجموع هر ماتریس با قرینه‌اش را به‌دست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}۷ & -۱\\ ۲ & ۶\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}۱ & ۴ & ۲\\ -۲ & ۱ & ۳\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}۴ & ۲ & ۸\end{bmatrix}\quad H=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}\\ ۵\\ -\frac{۳}{۲}\end{bmatrix}$$

۳ــ معادله‌های ماتریسی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix}۵ & ۸\\ ۸ & ۵\end{bmatrix}+A=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\qquad B+\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۹\\ ۷ & ۰ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۱\\ ۳ & -۱ & ۱\end{bmatrix}+B=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

الف) مرتبه‌ی ماتریس‌های B و A را مشخص کنید.

ب) درایه‌های ماتریس‌های B و A را معلوم کنید.

۱ــ ماتریس‌های $C=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۵\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۲ & ۵\end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید.

الف) حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید.

$A+B,\ B+C,\ C+A$

ب) عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$۲A,\quad ۳C,\quad ۲A+B,\quad B-C$$

ج) آیا رابطه‌ی $A+B=B+A$ برقرار است؟

آیا رابطه‌ی $(A+B)+C=A+(B+C)$ برقرار است؟

آیا این رابطه‌ها برای هر سه ماتریس $A_{m\times n}$ ، $B_{m\times n}$ ، $C_{m\times n}$ برقرار است؟ مثال بزنید.

۲- قرینه‌ی ماتریس‌های داده شده را به‌دست آورید.

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۱ & -۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۴ & -۱ \end{bmatrix}$$

۳- اگر $Q=\begin{bmatrix} ۵ & ۷ \\ -۶ & ۴ \\ ۲ & -۹ \end{bmatrix}$ و $P=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۵ & -۱ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس R را طوری بیابید که

$$P+Q+R=۰$$

۴- در رابطه‌ی زیر x و y را بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۲x-۳y \\ x+۳y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس‌ها

شخصی میوه‌ی موردنیاز خانواده‌اش را در روزهای شنبه و سه‌شنبه مطابق جدول مقابل تهیه کرده است.

	پرتقال	سیب
شنبه	۱	۲
سه‌شنبه	۲	۳

اطلاعات جدول را به صورت ماتریس زیر نشان می‌دهیم.

$$\begin{array}{ccc} & \text{سیب} & \text{پرتقال} \\ \begin{array}{c}\text{شنبه}\\ \text{سه‌شنبه}\end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}} \end{array}$$

اگر قیمت پرتقال هر کیلو ۱۵۰۰ تومان و سیب هر کیلو ۱۰۰۰ تومان باشد در صورتی که بخواهیم قیمت کل میوه‌ای که شخص در روز شنبه پرداخته است را محاسبه کنیم می‌توانیم ماتریس سطری $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ را در ماتریس ستونی $\begin{bmatrix} ۱۵۰۰ \\ ۱۰۰۰ \end{bmatrix}$ که بردار قیمت هر کیلو میوه است ضرب کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱۵۰۰ \\ ۱۰۰۰ \end{bmatrix} = (۱ \times ۱۵۰۰) + (۲ \times ۱۰۰۰) = ۳۵۰۰$$

و قیمت کل میوه برای روز سه‌شنبه به صورت زیر خواهد شد.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱۵۰۰ \\ ۱۰۰۰ \end{bmatrix} = (۲ \times ۱۵۰۰) + (۳ \times ۱۰۰۰) = ۶۰۰۰$$

اطلاعات فوق را می‌توان به صورت حاصل ضرب دو ماتریس زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱۵۰۰ \\ ۱۰۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۵۰۰ \\ ۶۰۰۰ \end{bmatrix}$$

اکنون اگر قیمت میوه‌ها در دو میوه فروشی متفاوت و به صورت زیر باشد:

$$\begin{array}{ccc} & \text{میوه فروشی اول} & \text{میوه فروشی دوم} \\ \text{قیمت هر کیلو پرتقال} & ۱۵۰۰ & ۱۰۰۰ \\ \text{قیمت هر کیلو سیب} & ۱۰۰۰ & ۹۰۰ \end{array}$$

برای به‌دست آوردن هزینه‌ی کل میوه در روزهای شنبه و سه‌شنبه و در صورت خرید از هریک از دو میوه‌فروشی، لازم است دو ماتریس را در هم ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱۵۰۰ & ۱۰۰۰ \\ ۱۰۰۰ & ۹۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱\times۱۵۰۰+۲\times۱۰۰۰ & ۱\times۱۰۰۰+۲\times۹۰۰ \\ ۲\times۱۵۰۰+۳\times۱۰۰۰ & ۲\times۱۰۰۰+۳\times۹۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۵۰۰ & ۲۸۰۰ \\ ۶۰۰۰ & ۴۷۰۰ \end{bmatrix}$$

برای آشنایی بیش‌تر با ضرب ماتریس‌ها به مثال‌های بعد توجه کنید.

مثال

ماتریس $A_{۲\times۲}=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۹ \end{bmatrix}$ و ماتریس $B_{۲\times۱}=\begin{bmatrix} ۷ \\ ۳ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. حاصل ضرب آن‌ها به صورت زیر است :

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۹ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۷ \\ ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲\times۷+۵\times۳ \\ ۱\times۷+۹\times۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲۹ \\ ۳۴ \end{bmatrix}$$

توجه کنید که تعداد درایه‌های سطر اول ماتریس A با تعداد درایه‌های ستون اول ماتریس B برابر است. همین‌طور در سطر دوم ماتریس A و ستون اول ماتریس B تعداد درایه‌ها برابرند.

اکنون ماتریس $C_{۲\times۲}=\begin{bmatrix} ۷ & ۲ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}$ و ماتریس A در مثال قبل را درنظر بگیرید. حاصل‌ضرب $A_{۲\times۲}\times C_{۲\times۲}$ به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۹ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ & ۲ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲\times۷+۵\times۵ & ۲\times۲+۵\times۳ \\ ۱\times۷+۹\times۵ & ۱\times۲+۹\times۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳۹ & ۱۹ \\ ۵۲ & ۲۹ \end{bmatrix}$$

فعالیت

دو ماتریس $D=\begin{bmatrix} ۳ & ۷ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}$ و ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۵ & ۹ \end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید.

۱ــ مرتبه‌ی ماتریس‌های فوق را بنویسید.

۲ــ حاصل ضرب دو ماتریس را به‌دست آورید.

$$A_{۲\times۲}\times D_{۲\times۳}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۵ & ۹ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۳ & ۷ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}=$$

۳ــ آیا حاصل ضرب $D_{۲\times۳}\times A_{۲\times۲}$ انجام‌پذیر است؟ چرا؟

حاصل ضرب دو ماتریس در صورتی امکان‌پذیر است که تعداد ستون‌های اولی با تعداد سطرهای دومی برابر باشند.

۱ـ اگر $C=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ باشد،

$C\times B$ ، $A\times B$ را محاسبه کنید.

۲ـ اگر $B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ باشد، $A\times B$ ، $B\times A$ را محاسبه کنید.

نشان دهید : $A\times B \neq B\times A$

ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 8 & 5\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}\frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ -4 & 1\end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید. حاصل‌ضرب

$A\times B$ ، $B\times A$ را به‌دست آورید.

ماتریس $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ را ماتریس واحد یا یکه می‌نامیم و آن را با $I_{2\times 2}$ نشان می‌دهیم.

حاصل‌ضرب ماتریس $C=\begin{bmatrix}2 & 5\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ را در $I_{2\times 2}$ بیابید. آیا $CI=IC$ است؟

برای دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه‌ی A و B در صورتی که $AB=I$ باشد، ماتریس B را ماتریس وارون ماتریس A می‌نامیم و آن را با نماد A^{-1} نشان می‌دهیم.

در فعالیت بالا ماتریس B ماتریس وارون ماتریس A است. $B=A^{-1}$

ماتریس‌های A و B و C را درنظر بگیرید.

$A=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 5 & 1\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{2}\\ -2 & \frac{7}{2}\end{bmatrix}$

کدام‌یک از ماتریس‌ها، وارون ماتریس A است؟

حل دستگاه دو معادله دو مجهول با استفاده از ماتریس

همان‌طور که می‌دانید دستگاه زیر مثالی از یک دستگاه دو معادله دومجهولی است.

$$\begin{cases} ۲x - y = ۶ \\ -x + y = ۴ \end{cases}$$

می‌توان دستگاه فوق را با استفاده از تساوی ماتریس‌ها به صورت زیر نوشت :

$$\begin{bmatrix} ۲x - y \\ -x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

با توجه به ضرب ماتریس‌ها، ماتریس سمت چپ را می‌توان به صورت ضرب دو ماتریس نوشت :

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & +۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

اگر در رابطه‌ی فوق $C = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۴ \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & +۱ \end{bmatrix}$ باشد، می‌توان رابطه‌ی ماتریسی روبرو را نوشت : $AX=C$

با راه‌حل معادله‌ی $۳x = ۷$ آشنا هستید. یک بار دیگر آن را مرور می‌کنیم.

$$۳x = ۷$$

$$\frac{۱}{۳} \times ۳x = \frac{۱}{۳} \times ۷$$ (عدد $\frac{۱}{۳}$ وارون عدد ۳ است.)

$$۱x = \frac{۷}{۳}$$ (عدد ۱ عضو بی‌اثر عمل ضرب اعداد است.)

$$x = \frac{۷}{۳}$$

اکنون به نظر شما برای حل معادله‌ی ماتریس $AX = C$ به چه چیزی احتیاج داریم؟

ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و ماتریس $B=\dfrac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید.

حاصل‌ضرب دو ماتریس را به‌دست آورید. چه نتیجه‌ای از این حاصل‌ضرب می‌گیرید؟

ماتریس B وارون ماتریس A می‌باشد و مقدار $ad-bc$ را دترمینان ماتریس A می‌نامیم.

مثال

وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

اگر $A^{-۱}$ را وارون ماتریس A بنامیم داریم:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۳+۲}\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{-۲}{۵} & \frac{۳}{۵} \\ \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}$$

۱- به نظر شما شرط وارون‌پذیری ماتریس ۲×۲ مانند A چیست؟

۲- دستگاه $\begin{cases} ۲x-y=۶ \\ -x+y=۴ \end{cases}$ را حل کنید.

۱- دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را محاسبه کنید.

$I=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱۰ & ۵ \end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$

۲- وارون هریک از ماتریس‌های زیر را پیدا کنید.

$B=\begin{bmatrix} ۶ & -۳ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$

۳- کدام‌یک از عبارت‌های زیر برقرار نیست؟

الف) $(AB)^{-۱} = A^{-۱}B^{-۱}$ (فرض کنیم A و B و AB وارون‌پذیر باشند)

ب) $(A+B)^{-۱} = A^{-۱} + B^{-۱}$ (فرض کنیم A و B و A + B وارون‌پذیر باشند)

۴- مثالی از یک ماتریس ۲×۲ بزنید که وارون آن با خودش برابر باشد.

۵- اگر $A = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ در این‌صورت $(A^{-۱})^{-۱}$ را پیدا کنید.

۶- مقدار a را به گونه‌ای پیدا کنید که ماتریس $\begin{bmatrix} a+۱ & ۱ \\ ۴ & a-۲ \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد.

۷- در هریک از دستگاه‌های دو معادله دومجهولی زیر، ماتریس ضرایب را نوشته و با استفاده از ماتریس معکوس ضرایب جواب دستگاه را به‌دست آورید.

ج) $\begin{cases} -x+y=۷ \\ ۵x-۴y=۱ \end{cases}$ ب) $\begin{cases} ۲x+۳y=۰ \\ ۶x+۴y=۱ \end{cases}$ الف) $\begin{cases} ۳x-y=۴ \\ x+۲y=۳ \end{cases}$

۸- رابطه‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} ۷ \\ ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$ مفروض است :

ماتریس سمت چپ را به صورت حاصل‌ضرب ۲ ماتریس بنویسید و مقادیر x و y را به دست آورید.

۹- معادلات زیر را با توجه به محاسبات در ماتریس‌های مربعی مرتبه‌ی ۲×۲ حل کنید.

ب) $\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix} + ۲X = \begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ الف) $X + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$

فصل ۷
ترکیبات

شمارش

امروزه به افراد جهت شناسایی آن‌ها شناسه‌های مختلفی نسبت می‌دهند، از جمله شماره‌ی شناسنامه، کد ملی و ... به وسایلی مانند خانه، ماشین و ... نیز جهت تعیین مالکیت آنها شماره و کدهایی نسبت داده می‌شود که گاهی از چند رقم یا حروفی در کنار هم تشکیل شده‌اند.

قبل از این ابداعات بشر، شناسه‌ها و نشانه‌هایی منحصر به فرد در عالم خلقت وجود داشته است. اثر انگشت یکی از این نشانه‌ها است که با دانستن آن می‌توان فرد را شناسایی کرد. مثال دیگر که ضمناً مهم‌ترین شناسه یا کدی است که در وجود جانداران از جمله انسان قرار دارد DNA است. کشف آن یکی از بزرگترین دستاوردهای علمی بشر در قرن بیستم به شمار می‌رود، حتماً در سال گذشته با برخی خواص این ملکول آشنا شده‌اید.

DNA منبع اطلاعات وراثتی هر شخص از جمله رنگ چشم، پوست، گروه خونی، قد و ... می‌باشد. در اجزای مختلف بدن حتی پوست و مو نیز یافت می شود. هم اکنون در موارد مختلفی از جمله امور جنایی از آن برای شناسایی اشخاص نیز استفاده می‌شود.

همان‌طور که می‌دانید DNA از دو رشته‌ی بسیار طولانی که به موازات هم و مارپیچی هستند تشکیل شده‌است. اجزای اصلی این دو رشته، چهار باز آلی به نام‌های اختصاری C، T، A و G[1] می‌باشند.

همان طور که در شکل دیده می شود روبروی حرفT در رشته‌ی دیگر حرف A و روبروی G حرف C قرار می‌گیرد ،به بیان دیگر T و A مکمل و G وC نیز مکمل یکدیگر می‌باشند.اگر عناصر یک رشته DNA را به طور افقی بنویسیم رشته‌ای بسیار طولانی به شکل زیر به‌دست می‌آید.

.... C C A G T A G C A ....

طول این رشته در بدن انسان بیش از 10^5 حرف می‌باشد! برای شناسایی هر فرد در کشور از کد ملی که ۱۰ رقمی می‌باشد استفاده می‌شود، حال تصوّر کنید

---

۱. سیتوزین، تیمین، آدنین و گوانین

کد بالا با این طول بسیار زیاد قادر است چه اطلاعاتی از بشر را منتقل نماید!

DNA دستورالعمل ساخت پروتئین‌های مختلفی را صادر می‌کند. پروتئین‌ها از اسیدهای آمینه تشکیل شده‌اند. در حدود ۲۰ نوع اسید آمینه وجود دارد. نحوه‌ی قرار گرفتن اسیدهای آمینه‌ی مختلف در پروتئین، نوع آن را تعیین می‌کند. سه حرف متوالی در طول رشته می‌تواند دستور ساخت اسید آمینه‌ی خاصی باشد و به رمز ژنتیک موسوم است. به عنوان مثال رشته‌ی CCGCAG در قطعه‌ای از رشته DNA نشان دهنده‌ی ترکیب دو نوع اسید آمینه‌ی خاص[1] برای ساخت پروتئین خاصی توسط سلول است.

سؤال

به نظر شما اگر قرار بود DNA برای نامیدن یک اسید آمینه به جای یک رشته‌ی سه حرفی از رشته‌ای دو حرفی استفاده کند آیا می‌توانست ۲۰ نوع اسید آمینه را نام‌گذاری کند؟

با انجام فعالیت زیر به جواب این سؤال دست خواهید یافت.

فعالیت

تعدادی از رشته‌های دو حرفی متشکل از ۴ حرف T ، C ، G و A عبارتند از :

AA, AT, AG, GA, CC و ...

الف) تمام رشته‌های دو حرفی که به وسیله‌ی T ، G ، C و A ساخته می‌شوند را بنویسید.

ب) آیا با دسته‌بندی مناسب یا رسم یک جدول یا نمودار می‌توانید همه‌ی آن‌ها را به شکل منظمی نشان دهید؟

ج) چگونه مطمئن می‌شوید که تمام حالت‌ها را نوشته‌اید؟ تعداد آن‌ها چند تا است؟

د) آیا می‌توانید با دسته‌بندی مناسب تعداد رشته‌های ۳ حرفی که با این ۴ حرف ساخته‌می‌شوند را بیابید؟

توجه کنید در بخش (د) از فعالیت فوق برخلاف (الف) نوشتن همه‌ی حالت‌ها به صورت دستی کار ساده‌ای نیست! بنابراین یافتن یک روش مناسب که تعداد حالت‌ها را بدون کم و زیاد بدهد با ارزش خواهد بود.

جدای از مطلب شگفت انگیز فوق مسائل بسیاری پیرامون ما هستند که در رابطه با حل آن‌ها باید دست به کار شمارش شویم.

---

۱. گلیسین و والین

با مطالعه‌ی این فصل خواهید توانست به سادگی مسائلی از این گونه را حل کنید.

فعالیت

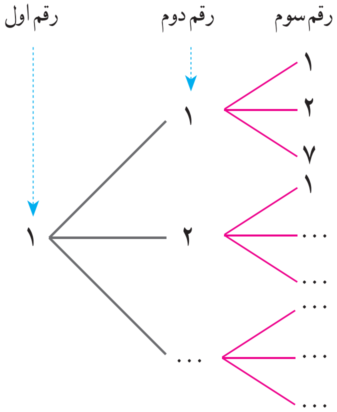
تمام اعداد سه رقمی را در نظر بگیرید که ارقام آن‌ها از مجموعه‌ی {۷ , ۲ , ۱} انتخاب شده است. تعدادی از آن‌ها عبارتند از : ۷۲۱ و ۱۲۷ و ۱۱۱.

الف) چند تا از این اعداد هستند که دو رقم سمت چپ آن‌ها برابر ۱۲ است؟

ب) با تکمیل شکل روبه‌رو تمام اعدادی که با رقم ۱ شروع می‌شوند را بنویسید. تعدادشان چند تا است؟

ج) تمام اعداد سه رقمی که با ۲ شروع می‌شوند چند تا هستند؟ چند تا با ۷ شروع می‌شوند؟

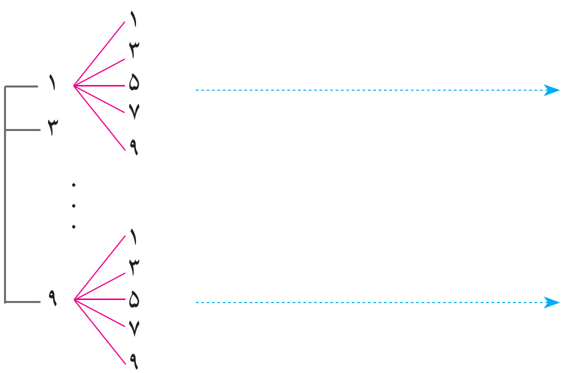
د) تعداد کل اعداد سه رقمی فوق چند تا است؟



مثال

تعداد اعداد دو رقمی با ارقام فرد را بیابید.

ارقام فرد عبارتند از ۹، ۷، ۵، ۳ و ۱. بنابراین با در نظر گرفتن نمودار حالت‌ها داریم :



۱۹ و ۱۷ و ۱۵ و ۱۳ و ۱۱

۳۹ و ۳۷ و ۳۵ و ۳۳ و ۳۱

⋮

۹۹ و ۹۷ و ۹۵ و ۹۳ و ۹۱

بنابراین جواب این مثال برابر است با $۵ \times ۵ = ۲۵$. دو نمودار فوق با توجه به ظاهرشان «نمودار درختی» حالت‌ها نامیده می‌شوند.

مثال

امید برای خرید یک جفت کفش و جوراب ورزشی به یک فروشگاه رفت، در این فروشگاه کفش در دو رنگ سفید و مشکی و جوراب در سه رنگ سفید، آبی و سبز عرضه شده بود. می‌خواهیم بدانیم امید به چند روش مختلف می‌تواند خرید خود را انجام دهد. اگر او کفش سفید را انتخاب کند برای انتخاب جوراب سه گزینه دارد:

۱- کفش سفید،جوراب سفید   ۲- کفش سفید،جوراب آبی   ۳ - کفش سفید،جوراب سبز

اگر او کفش مشکی را انتخاب کند مجدداً برای انتخاب جوراب سه روش وجود دارد. بنابراین امید $۲ \times ۳ = ۶$ روش مختلف برای خرید کفش و جوراب دارد. اگر جدول زیر را در نظر بگیریم کافی است در هر سطر یک علامت بزنیم.

<table>
<tr><td rowspan="2">کفش</td><td colspan="3">سفید</td><td colspan="3">مشکی</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">جوراب</td><td colspan="2">سفید</td><td colspan="2">آبی</td><td colspan="2">سبز</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

برای علامت زدن سطر اول دو حالت و برای علامت زدن سطر دوم ۳ حالت وجود دارد، بنابراین به ۶ طریق می‌توان جدول بالا را علامت زد.

۱- بین دو شهر X و Y دو جاده و بین دو شهر Y و Z چهار جاده وجود دارد. به چند طریق می‌توان از شهر X (از طریق Y) به شهر Z رفت؟

۲- محسن قصد دارد تعدادی از دوستان خود را در روز عید قربان دعوت کند، او می‌خواهد ناهار را خود آماده کند. برای این کار در نظر دارد یک غذا و یک سالاد درست کند. اگر او طرز تهیه ۴ نوع غذا و سه نوع سالاد را بداند به چند روش می‌تواند ناهار را آماده کند؟ با استفاده از نمودار درختی نیز به سؤال جواب دهید.

۳- سکه‌ای را سه مرتبه پرتاب می‌کنیم، ممکن است در هر مرتبه به رو یا پشت به زمین بیافتد. چند حالت مختلف ممکن است رخ بدهد؟ اگر به رو آمدن را با H و به پشت آمدن را با T نشان دهیم، کلیه حالت‌ها را با استفاده از نمودار درختی نشان دهید.

۴– قرار است یک آزمون ۳ سؤالی برگزار شود، هر سؤال یک تست چهار گزینه‌ای است با گزینه های الف، ب، ج و د. اگر قرار باشد در هر سؤال یک و تنها یک گزینه علامت زده شود به چند طریق مختلف ممکن است پاسخنامه پُر شود؟

۱. (الف) (ب) (ج) (د)
۲. (الف) (ب) (ج) (د)
۳. (الف) (ب) (ج) (د)

اصل ضرب

اگر خوب به مثال‌ها، فعالیت‌ها و تمرین‌های فوق توجه کرده باشید متوجه می‌شوید که وجه اشتراکی بین همه‌ی آن‌ها وجود دارد، در هر کدام از آن‌ها چندین جزء وجود دارد. در مثال مربوط به امید خرید او دو جزء دارد، یکی خرید کفش و دیگری خرید جوراب، در ساختن عدد دو رقمی با ارقام فرد دو جزء داریم، رقم یکان و رقم دهگان. در پرتاب سکه (تمرین ۳) سه جزء داریم، نتیجه‌ی پرتاب در مرتبه‌ی اول، دوم و سوم. جواب‌های به‌دست آمده در تمام حالت‌ها ما را به اصل ساده ولی مهم زیر رهنمون می‌سازند.

اصل ضرب: هرگاه عملی از دو جزء مختلف تشکیل شده باشد و جزء اول به m طریق مختلف و به ازای هر کدام از آن‌ها جزء دوم به n طریق مختلف قابل انجام باشد، آنگاه انجام آن عمل $m\times n$ حالت مختلف دارد.

یک تعمیم از اصل ضرب به قرار زیر است :

هرگاه عملی از سه جزء مختلف تشکیل شده باشد و جزء اول به m طریق مختلف، جزء دوم به n طریق مختلف و جزء سوم به p طریق مختلف قابل انجام باشد، آن‌گاه انجام آن عمل به $m\times n\times p$ حالت مختلف امکان پذیر است.

البته با توجه به الگوی فوق می‌توان اصل ضرب را به اعمالی با هر تعداد جزء تعمیم داد.

مثال

۱– چند کلمه‌ی دو حرفی با استفاده از حروف a ، b ، c و d می‌توان ساخت؟

برای این کار کافی است مشخص کنیم حرف اول و دوم چه هستند. اگر شکل زیر را برای دو حرف در نظر بگیریم.

خانه‌ی اول ۴ حالت و خانه‌ی دوم نیز ۴ حالت دارد. بنابراین جواب طبق اصل ضرب برابر $۴\times۴=۱۶$ است.

۲- چند عدد چهار رقمی با استفاده از ارقام {۵,۴,۳,۲,۱,۰} می‌توان ساخت. طوری که بر ۵ بخش پذیر باشد؟
اگر چهار جایگاه به شکل زیر برای ارقام در نظر بگیریم و تعداد حالت‌های ارقام را بالای هر جایگاه بنویسیم داریم :

۵	۶	۶	۲

بنابراین طبق اصل ضرب جواب برابر است با ۳۶۰ = ۲×۶×۶×۵ . توجه کنید رقم صفر نمی‌تواند در جایگاه سمت چپ باشد، بنابراین این جایگاه ۵ حالت دارد، جایگاه سمت راست هم دو حالت دارد ارقام ۰ یا ۵.

۳- با استفاده از سه رنگ آبی، قرمز و سبز به چند روش می‌توان خانه‌های جدول زیر را رنگ کرد؟

برای رنگ آمیزی هر خانه سه انتخاب داریم. بنابراین طبق اصل ضرب جواب برابر ۸۱ = ۳×۳×۳×۳ است.

۱- با استفاده از دو رقم ۲ و ۱ چند عدد ۵ رقمی می‌توان ساخت؟

۲- هر زیرمجموعه از {۶ ,... ,۲ ,۱} را می‌توان با یک کد ۶ تایی از ۱ و ۰ نشان داد. ۱، متناظر بودن عضو و ۰ متناظر نبودن است. به عنوان مثال کد ۰۱۰۱۱۰ متناظر مجموعه‌ی {۵,۴,۲} است. صفر در جایگاه اول کد یعنی عنصر یک در مجموعه نیست و یک در جایگاه چهارم یعنی ۴ در مجموعه هست و . . . .

الف) کد ۱۱۰۰۱۱متناظر چه زیر مجموعه‌ای است؟کد متناظر زیر مجموعه‌ی تهی چیست؟

ب) تعداد کدهای ۶ تایی از ۱ و ۰ چند است؟ تعداد زیر مجموعه‌های {۶ ,... ,۲ ,۱} چند است؟

ج) در حالت کلی تعداد زیر مجموعه‌های {n,...,۲ ,۱} چند است؟

۳- یک عدد سه رقمی را متقارن می‌نامیم اگر رقم یکان و صدگان آن برابر باشند، مانند ۲۳۲. چند عدد سه رقمی متقارن داریم؟

۴– الف) عبارت $(r+s)(t+u+v)$ پس از محاسبه چند جمله دارد؟

ب) عبارت $(x+y+z)(a+b)(c+d)$ پس از محاسبه چند جمله دارد؟

۵– چند عدد سه رقمی بدون رقم ۸ داریم؟

۶– با استفاده از سه رنگ آبی، قرمز و سبز به چند روش می‌توان خانه‌های شکل زیر را رنگ کرد طوری که خانه‌های مجاور رنگشان متفاوت باشد؟

۷– در سرزمین گچ‌های نقاشی a_1, a_2, a_3 از شهر A، b_1, b_2, b_3 از شهر B و c_1, c_2, c_3, c_4 از شهر C برای گردش فضایی با فضا پیمای آلفا ثبت نام کرده‌اند. می‌دانیم a_1 با b_1، a_2 با b_3، a_3 با c_2 و c_1 سازگار نبوده و نمی‌توانند با هم سوار فضاپیما شوند. در ضمن فضاپیما ظرفیت ۳ نفر دارد که قرار است از هر شهر یکی سوار بشود. به چند طریق می‌توان سه نفر را رهسپار کرد؟ (راهنمایی : از نمودار درختی استفاده کنید.)

جایگشت

مثال‌های زیادی وجود دارند که ترتیب انجام اعمال در آن‌ها مورد توجه است. قطعاً برای پوشیدن جوراب و کفش ترتیب انجام این دو عمل روشن است! فعالیت زیر را بخوانید و پاسخ دهید.

فعالیت

احمد، آرش و رضا به عنوان دانش‌آموزان ممتاز استان شناخته شده‌اند. به همین مناسبت در مرکز استان مراسمی جهت تقدیر از آن‌ها ترتیب داده شده است و قرار است یکی یکی جهت دریافت هدایای خود بالای سکو بروند. قطعاً روش‌های مختلفی برای بالا رفتن آن‌ها وجود دارد. مثلاً اول احمد، دوم آرش و سوم رضا یا اول احمد، دوم رضا و سوم آرش و ... می توان با استفاده از نمودار درختی حالت‌ها را شمرد.

احمد	رضا – آرش
	آرش – رضا
آرش	... – احمد
	احمد – ...
رضا	... – ...
	... – ...

الف) جدول روبرو را کامل کنید.

ب) با استفاده از اصل ضرب چه‌طور می‌توان به این سؤال جواب داد؟

مثال

چهار نفر به چند طریق می‌توانند در یک ردیف کنار هم بایستند؟
نفر سمت چپ می‌تواند هر یک از ۴ نفر باشد بنابراین ۴ حالت دارد، نفر دوم هر یک از ۳ نفر باقیمانده می‌تواند باشد پس ۳ حالت دارد. برای نفر سوم و چهارم به ترتیب ۲ و ۱ حالت وجود دارد، در نتیجه طبق اصل ضرب جواب برابر $۲۴ = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴$ است. مشابه فعالیت قبل با استفاده از نمودار درختی نیز جواب به‌دست می‌آید ولی روشن است که هر چه اعداد بزرگ‌تر باشند نمایش به وسیله‌ی نمودار درختی دشوارتر است.
در فعالیت و مثال بالا نحوه‌ی قرار گرفتن افراد مطرح شده است که در آن تنها ترتیب قرار گرفتن تعیین کننده است. موارد بسیاری در مسائل روزمره وجود دارد که نحوه‌ی قرار گرفتن اشیایی کنار هم مطرح می‌شود.

اگر تعدادی شیء متمایز داشته باشیم به هر نحوه‌ی قرار گرفتن آن‌ها در کنار هم یک «جایگشت» می‌گوییم.

به عنوان مثال ABC، BAC و BCA سه جایگشت مختلف از سه حرف A و B و C می‌باشند. در دو مثال بالا به ترتیب جایگشت‌های سه‌تایی و چهارتایی مطرح بود.

مثال

با استفاده از ارقام ۱،۲،۳،۷،۹ چند عدد ۵ رقمی با ارقام مختلف می‌توان نوشت؟
روشن است که باید تعداد جایگشت های ارقام ۱،۲،۳،۷،۹ را پیدا کنیم، به عبارت دیگر باید تمام ترتیب‌های مختلف کنار هم از آن‌ها را در جدول زیر بیابیم.

برای جایگاه اول ۵ حالت، جایگاه دوم ۴ حالت، .... وجود دارد. (مطابق شکل زیر)

۵	۴	۳	۲	۱

پس جواب طبق اصل ضرب برابر است با $۱۲۰ = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$.

معرفی یک نماد: برای سهولت در محاسبات حاصل ضرب اعداد متوالی از ۱ تا n را با نماد $n!$ (بخوانید n فاکتوریل) نشان می‌دهند. همچنین قرارداد می‌کنیم که: $۰! = ۱$.
به عبارت دیگر داریم: $n! = ۱ \times ۲ \times ... \times n$. توجه کنید که: $۱! = ۱$

مثال

تعداد جایگشت‌های حروف کلمه‌ی «کشورمان» برابر است با $۷!$.
با توجه به مثال‌های فوق گزاره کلی زیر در مورد تعداد جایگشت‌ها قابل بیان است :

تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر با $n!$ است.

۱– با توجه به مباحث بالا در مورد واژه‌ی «جایگشت» و دلیل نام‌گذاری آن بحث کنید.
۲– حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید :

الف) $\dfrac{۱۰!}{۵!}$ ب) $۱!+۲!+۳!+۴!$ ج) $\dfrac{n!}{(n-۱)!}$

۳– حاصل ضرب $۱۱\times۱۰\times۹\times۸$ را با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

۴– ۱۰ نامه‌ی مختلف را به چند طریق می‌توان در ۱۰ پاکت مختلف قرار داد؟

با استفاده از تنها ۳ رقم صفر و چند نماد فاکتوریل و پرانتز و اعمال ریاضی عدد ۶ را بسازید.

مثال

۱۰ نفر دانش‌آموز دبیرستانی در مسابقه‌ی دو ۱۰۰ متر شرکت کرده‌اند، نفرات اول، دوم و سوم مدال طلا، نقره و برنز دریافت خواهند کرد. به چند طریق ممکن است که برندگان طلا، نقره و برنز مشخص شوند؟

برای مشخص شدن مدال طلا ۱۰ امکان وجود دارد، برای مدال نقره ۹ امکان و برای مدال برنز ۸ امکان وجود دارد. بنابراین مطابق اصل ضرب جواب برابر $۸\times۹\times۱۰$ یعنی ۷۲۰ است. که می‌توان آن را به صورت $\dfrac{۱۰!}{۷!}$ نیز نشان داد.

در این مثال یک جایگشت سه تایی از ۱۰ نفر مورد نظر بود به طوری که ترتیب آن‌ها نیز نفرات اول تا سوم را مشخص می‌کرد. به طور کلی اگر جایگشت های k تایی از n شیء متمایز مد نظر باشد

تعداد آن‌ها برابر است با : $n(n-۱)(n-۲)...(n-(k-۱))$ که برابر است با $\frac{n!}{(n-k)!}$.

تعداد جایگشت‌های k تایی از n شیء متمایز را معمولاً با نماد $P(n,k)$ نشان می‌دهند و داریم:

$$P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

توجه کنید که: $k \le n$

۱- در مورد معنای $P(n,n)$ بحث کرده و به دو روش نشان دهید $P(n,n)=n!$.

۲- چند رشته‌ی (کلمه‌ی) سه حرفی با حروف متفاوت انگلیسی می‌توان نوشت؟

۳- درون بشقابی یک سیب، یک پرتقال و یک انار گذاشته شده‌است. اگر از بین ۶ نفر ۳ نفر به طرف بشقاب رفته و هر کدام یک میوه بردارند به چند روش ممکن است ۳ میوه توزیع شده باشند؟

۴- نشان دهید تعداد جایگشت‌های ۵ حرفی از حروف کلمه‌ی computer که حرف اول بی‌صدا باشد برابر $۵P(۷,۴)$ است.

به یاد داشته باشید که یکی از مهم‌ترین ویژگی‌ها در مبحث جایگشت، ترتیب قرار گرفتن اشیاء است. به عنوان مثال دو عدد ۱۲۳ و ۳۱۲ با هم یکی نیستند و در اصل دو جایگشت متفاوت از اعضای $\{۱,۲,۳\}$ می‌باشند. همچنین در مثال گذشته اگر برندگان مدال طلا، نقره و برنز مثلاً علی، احمد و حسین باشند فرق می‌کند با وقتی که احمد، حسین و علی باشند. عامل مشترک در ایجاد این تفاوت‌ها ترتیب قرار گرفتن اشیاء است. در بخش بعد با دسته‌ای از مسائل آشنا می‌شویم که ترتیب قرار گرفتن اشیاء مهم نیست.

۱- تمام جایگشت‌های حروف کلمه‌ی water را در نظر بگیرید.

الف) تعداد آن‌ها چند تا است؟

ب) در چند تا دو حرف a و w کنار هم هستند؟

ج) در چند تا دو حرف a و w کنار هم قرار ندارند؟

۲- تعداد جایگشت‌های حروف کلمه‌ی computer که در آن سه حرف m، o و c به صورت com قرار گرفته باشند چند تا است؟

۳- چند تابع یک به یک از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ..., ۱۰\}$ به مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ..., ۱۰\}$ قابل تعریف است؟

۴- چند عدد ۵ رقمی زوج با ارقام متمایز داریم؟

۵- در یک شرکت که ۲۵ عضو دارد قرار است یک رئیس، یک منشی و یک خزانه دار انتخاب شوند. اگر هر عضو فقط در حداکثر یکی از این سمت ها بتواند باشد به چند طریق می توان انتخاب آنها را انجام داد؟

۶- به چند طریق می‌توان ۴ کتاب مختلف ریاضی و ۳ کتاب مختلف فیزیک را در یک قفسه کنار هم چید طوری که کتاب های فیزیک همگی کنار هم باشند؟

۷- اگر در یک سالن دو ردیف صندلی و هر ردیف ۱۰ صندلی باشد، مشخص کنید به چند طریق ۶ دانش‌آموز اول دبیرستان، ۳ دانش‌آموز دوم و ۴ دانش‌آموز سوم دبیرستان می‌توانند روی آن‌ها بنشینند طوری که اولی‌ها در ردیف اول و دومی‌ها در ردیف دوم باشند؟

آرش، مهدی و حامد سوار بر اسب هستند و می‌خواهند با هم مسابقه بدهند. به چند طریق ممکن است به خط پایان برسند؟ (امکان هم‌زمان رسیدن را نیز در نظر داشته باشید!)

ترکیب

در اکثر مسائلی که تا به حال حل کرده‌ایم ترتیب قرار گرفتن اشیاء اعم از حروف، ارقام و... مهم بود. در پاره‌ای از مسائل ترتیب اشیاء به هیچ وجه مهم نیست. به عنوان مثال فرض کنید زهرا خواسته باشد ۳ کیلو شیرینی که هر کیلو از آن از یک شیرینی خاص است (سه نوع شیرینی) برای مهمانان از شیرینی‌فروشی محل خریداری کند. زهرا پس از ورود به شیرینی‌فروشی متوجه می‌شود در آن‌جا ۷ نوع شیرینی مختلف برای فروش وجود دارد. بنابراین برای تهیه‌ی سه نوع شیرینی مختلف گزینه‌های مختلفی برای او وجود دارد. قطعاً گزینه‌هایی که زهرا با آن‌ها مواجه است به ترتیب سه نوع شیرینی ربطی ندارد! تنها سه نوع انتخاب شده مهم است، یا اگر قرار باشد از افراد یک کلاس ۳۰ نفره ۳ نفر را برای نمایندگی در شورای دانش‌آموزی انتخاب‌کنیم در انتخاب ما ترتیب آن‌ها اهمیتی ندارد. مسلماً می‌توانید مثال‌های زیادی در زندگی روزمره بزنید که در آن‌ها ترتیب برای ما اهمیتی ندارد. حال به فعالیت صفحه‌ی بعد توجه کنید.

فعالیت

در یک مسابقه شطرنج، ۵ شطرنج باز برتر شرکت کرده‌اند. قرار است هر دو شطرنج باز یک بار با هم مسابقه بدهند.

الف) هر شطرنج باز چند بازی انجام خواهد داد؟

ب) تعداد کل بازی‌ها چند تا است؟

ج) اگر برای شرکت کنندگان شماره‌های ۱ تا ۵ را در نظر بگیریم، تمامی بازی‌ها را مشخص کنید.

د) در کدام قسمت مسئله ترتیب اهمیت ندارد؟

نمونه‌ی دیگر از مواردی که ترتیب در آن‌ها اهمیت ندارد مجموعه‌ها است. همان‌گونه که می‌دانید ترتیب اعضاء برای مشخص کردن یک مجموعه مهم نیست، به عنوان مثال مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳\}$ با مجموعه‌ی $\{۲, ۱, ۳\}$ یکسان است، به عبارت دیگر $\{۲, ۱, ۳\} = \{۱, ۲, ۳\}$.

این در حالی است که دو جایگشت ۱۲۳ و ۲۱۳ متفاوت هستند.

فعالیت

می‌خواهیم تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی $\{۱, ۲, ۳, ..., ۹\}$ را پیدا کنیم. تعدادی از آن‌ها عبارتند از: $\{۱, ۲, ۳\}, \{۱, ۲, ۴\}, \{۳, ۴, ۹\}, ...$

جلوی هر کدام از زیر مجموعه‌های فوق تمام جایگشت‌های اعضاء را می‌نویسیم.

$\{۱, ۲, ۳\}$: ۱۲۳, ۱۳۲, ۲۱۳, ۲۳۱, ۳۱۲, ۳۲۱

$\{۱, ۲, ۴\}$: ۱۲۴, ۱۴۲, ۲۱۴, ۲۴۱, ۴۱۲, ۴۲۱

در دو سطر فوق ۲×۶ جایگشت سه تایی نوشته شده است.

الف) جلوی $\{۳, ۴, ۹\}$ چه جایگشت‌هایی نوشته می‌شوند؟

ب) زیرمجموعه‌ی ۳ عضوی دیگری در نظر گرفته و مشابه عمل بالا را برای آن انجام دهید.

ج) آیا ممکن است برای دو زیر مجموعه ۳ عضوی مختلف دو جایگشت یکسان به‌دست آمده باشد؟

د) اگر تعداد کل زیر مجموعه‌های ۳ عضوی را که فعلاً برای ما مجهول است با a نشان دهیم، تعداد کل جایگشت‌های ۳تایی متناظر با آن‌ها که قسمتی از آن در ابتدای فعالیت و بند (الف) و (ب) به‌دست آمده برحسب a چه مقداری است؟

هـ) با توجه به این که تعداد جایگشت‌های ۳ تایی از اعضای $\{۱, ۲, ..., ۹\}$ برابر $P(۹, ۳)$ است و همچنین با استفاده از (د) a را بیابید.

مثال

تعداد زیر مجموعه‌های ۴ عضوی $\{1,2,\ldots,10\}$ را بیابید.

تعداد جایگشت‌های ۴ تایی از اعضای $\{1,2,\ldots,10\}$ برابر است با $\frac{10!}{6!}$. از طرفی اگر ترتیب قرار گرفتن اعضاء برای ما مهم نباشد خیلی از جایگشت‌ها نشانگر مجموعه‌های یکسانی هستند. به عنوان مثال هر دو جایگشت ۱۲۳۴ و ۴۲۱۳ نشانگر مجموعه‌ی $\{1,2,3,4\}$ هستند. بنابراین کل جایگشت‌های ۴تایی به دسته‌های ۲۴تایی تقسیم می‌شوند که هر دسته به مجموعه‌ی ۴ عضوی یکسانی اشاره دارند. زیرا تعداد جایگشت‌های ۴ عضو ثابت !۴ است. در نتیجه تعداد کل زیرمجموعه‌های چهارتایی برابر $\frac{10!}{6!}\times\frac{1}{24}$ است که عبارت است از $\frac{10!}{4!6!}$.

زیرمجموعه‌ها یا انتخاب‌های ۴تایی از اعضای $\{1,2,\ldots,10\}$ ترکیب‌های ۴ تایی از اعضای $\{1,2,\ldots,10\}$ نیز نامیده می‌شوند.

به طور کلی ترکیب‌های k تایی از n شیء متمایز به انتخاب های k تایی از آن n شیء اطلاق می‌شود که در آن‌ها ترتیب فاقد اهمیت است.

با توجه به مثال و فعالیت بالا می‌توان فرمول زیر را ارائه نمود.

تعداد ترکیب‌های kتایی از n شیء متمایز برابر $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ است. در ضمن این تعداد را با نماد $C(n,k)$ یا $\binom{n}{k}$ نیز نشان می دهند. بنابراین:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

($\binom{n}{k}$ را بخوانید «انتخاب k از n»)

با توجه به موارد بالا شرط $k \le n$ در فرمول $\binom{n}{k}$ الزامی است.

۱- با مراجعه به متن درس بگویید تعداد گزینه‌های خرید سه نوع شیرینی برای زهرا چند تا است؟

۲- در مثال قبل با توجه به فرمول $\binom{n}{k}$ مشخص کنید n و k چه اعدادی هستند؟

۳- تساوی‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$

ب) $\binom{n}{k}=\binom{n-۱}{k}+\binom{n-۱}{k-۱}$

۴- دو دلیل ذکر کنید که $\binom{n}{۰}=۱$.

۵- ۱۰ چراغ در یک ردیف قرار دارند. به چند طریق می‌توان ۳ تا از آن‌ها را روشن کرد؟ به چند طریق می‌توان ۷ تا از آن‌ها را روشن کرد؟ دو پاسخ را با هم مقایسه کنید.

۶- تعداد زیر مجموعه‌های چهار عضوی مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,...,۷\}$ را بیابید. به چند طریق می‌توان ۳ عضو از مجموعه‌ی A حذف کرد؟ دو جواب را مقایسه کنید. چه توضیحی دارید؟

۷- با توجه به دو تمرین قبل یک تساوی برای $\binom{n}{k}$ بیان کنید.

مثال

۱- از میان ۶ دانش‌آموز اول و ۸ دانش‌آموز دوم به چند طریق می‌توان کمیته‌ای ۵ نفره تشکیل داد به طوری که ۳ دانش‌آموز اول و ۲ دانش‌آموز دوم باشند؟ برای انتخاب ۳ دانش‌آموز اول $\binom{۶}{۳}$ راه وجود دارد و برای انتخاب ۲ دانش‌آموز دوم $\binom{۸}{۲}$ روش داریم. بنابراین طبق اصل ضرب جواب مسئله برابر $\binom{۸}{۲}\times\binom{۶}{۳}$ است.

۲- در یک آپارتمان که ۱۰ خانوار زندگی می‌کنند قرار است یک شورای ۴ نفره متشکل از اعضای آن تشکیل شود. از هر خانواده تنها زن یا شوهر می‌تواند عضو آن شورا بشود. به چند طریق ممکن است شورای ۴ نفره تشکیل شود؟

در ابتدا تعیین می‌کنیم که چهار خانواری که قرار است یک نفر از آن‌ها عضو شود کدامند، برای

این کار $\binom{۱۰}{۴}$ حالت وجود دارد. پس از انتخاب چهار خانوار از هر کدام به دو حالت یک نفر می‌تواند انتخاب شود. بنابراین جواب مسئله برابر $۲^۴ \times \binom{۱۰}{۴}$ است.

۱- نشان دهید : $$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\dots+\binom{n}{n}=۲^n$$

۲- از میان ۷ کشتی گیر و ۵ وزنه بردار به چند روش می‌توان ۳ نفر انتخاب کرد که حداقل یک نفر کشتی گیر باشد؟

۳- در یک مسابقه ورزشی، ورزشکارانی از ایران، روسیه، فرانسه، ترکیه و سوریه شرکت کرده‌اند. قرار است برای ارتباط بهتر ورزشکاران با هم تعدادی فرهنگ لغت به منظور آشنایی هر ورزشکار با سایر زبان‌ها تهیه شود. چند نوع فرهنگ لغت لازم است؟

۴- تعداد زیرمجموعه‌های زوج عضوی $\{۱,۲,\dots,۱۰\}$ را بیابید. (مجموعه تهی با صفر عضو، زوج عضوی است.)

۵- هفت نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از بین هفت نقطه انتخاب شده باشد؟

۶- از هر یک از شهرهای بیرجند، بوشهر، سنندج، زاهدان و یزد ۲۰ دانش‌آموز به اردوگاه دانش‌آموزی میرزا کوچک خان دعوت شده‌اند، به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز که دو به دو غیر هم‌شهری هستند انتخاب کرد؟

منابع

۱- بیرونی نامه، ابوالقاسم قربانی، سلسله انتشارات انجمن آثار ملی.

۲- تحلیل‌های ریاضی و کاربرد آن در اقتصاد و بازرگانی، جین.ا.وبر، ترجمه حسین‌علی پورکاظمی، انتشارات دانشگاه شهید بهشتی.

۳- حساب دیفرانسیل و انتگرال برای رشته‌های بازرگانی، زیست‌شناسی و علوم‌اجتماعی، د.ج. کرودیس و س.م.شلی، ترجمه ابوالقاسم لاله، مرکز نشر دانشگاهی.

۴- ریاضیات ۲ چاپ ۱۳۸۷، دکتر اسماعیل بابلیان، میرزا جلیلی، رضا شهریاری اردبیلی و دکتر علیرضا مدقالچی.

۵- ریاضیات پیش‌دانشگاهی جلد اول، لوییس لیتهلد، ترجمه محمد رجبی طرخورانی و عمید رسولیان، انتشارات دانشگاه هرمزگان.

۶- ریاضیات پیش‌دانشگاهی، اس. تی. هو، ترجمه محمد جلوداری ممقانی و لیدا فرخو، انتشارات دانشگاه پیام نور.

۷- زیست‌شناسی، جف جونز و ماری جونز، ترجمه محمد کرام‌الدینی، انتشارات مدرسه.

۸- سلول‌های بنیادی، جلد اول، سلول‌های بنیادی جنینی، دکتر حسین بهاروند، انتشارات خانه زیست‌شناسی.

۹- مقدمه بر اقتصاد ریاضی، حسین ذوالنور، انتشارات جهاد دانشگاهی دانشگاه شیراز.

۱۰- A. Xavier Cantert Algebra and Trigonometry.

۱۱- Algebra and Trigonometry, Beecher J.A.Penna J.A. Bittinger M.L (3ed, Addison Wesley, 2007)

۱۲- Alvin K.Bettinger Algebra and trigonometry International Text book.

۱۳- Andreuis Barnes Encyclopedia of Trigonometry, Global Media (2007).

۱۴- California Algebra 1: Concepts, Skills and Problem Solving, Glencoe/ McGraw Hill (2008).

۱۵- California Algebra 2: Concept, Skills, and Problem Solving, Glencoe/ McGraw Hill, U.S.A.

۱۶- D.Anneross Master Math, Trigonometry C.P 2002.

۱۷- David Raymond curtiss and Elton James Moulton Essential of Trigonometry with application D.C Health and company Birkbauser(2004).

۱۸- Discrete Mathematics and Applications, Kenneth H.Rosen, McGrow Hill Publication, 1998.

۱۹- Exploring Mathematics Scott Foresman 2000.

۲۰- G.Bancroft, M.Fledcher, Maths in Action, ARRL (1998).

۲۱- Mathematics for teachers, J.L.Martin, McMillan.

۲۲- Mathematics for students, J.L.Martin, McMillan.

۲۳- Mathematical Ideas, Charles D.Miller, Seventh Edition, Harper Collins Publisher.

۲۴- Principles & Standards for school Mathematics N.C.T.M.

۲۵- Real Life Mathematics, Everyday use of Mathematics Concepts, Evan M.Glazer, John W.McConnell Greenwood Press.

۲۶- Sharon L.senx and others, Functions, statistics and trigonometry, Second Edition, SFARR (1998).

۲۷- T. Andreesca 103 Trigonometry Problem.

۲۸- Trigonometry, Charles. Mckcague, Mar D. Turnes.

۲۹- WWW.TIMSS/RELEASED ITEMS/MATHEMATICS/08
(TIMSS 2003 سؤالات قابل انتشار).

معلمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب

این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۱۵۸۵۵/۳۶۳ - گروه درسی مربوط و یا پیام نگار (**Email**)

talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر تألیف کتاب های درسی ابتدایی و متوسطه نظری