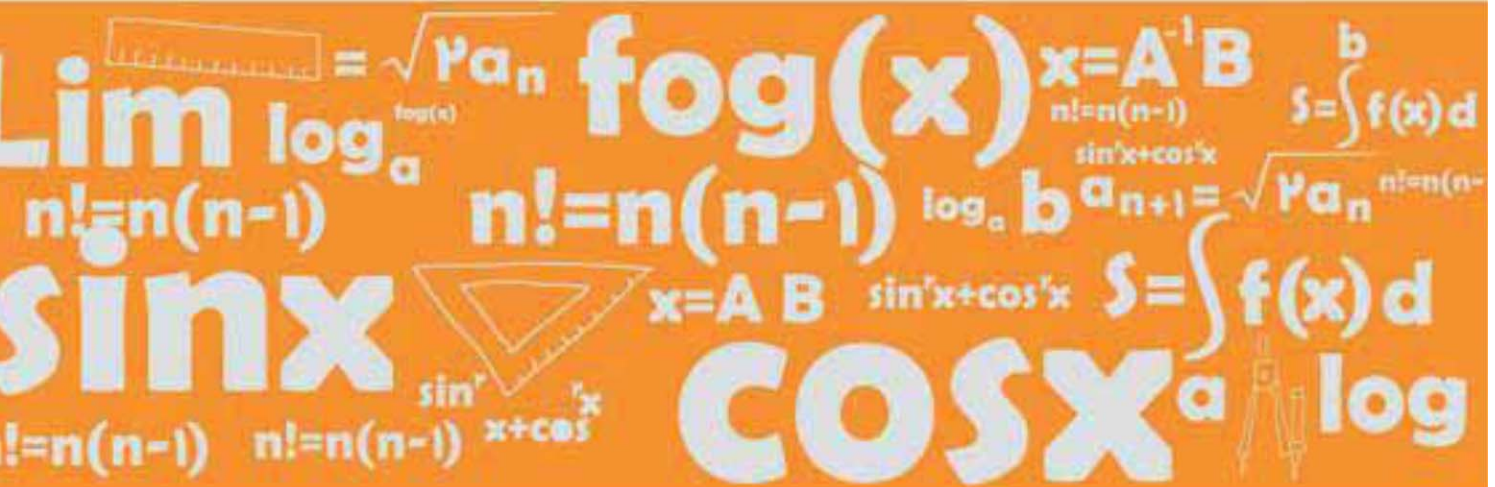




کتابهای کنکور
مهر و ماه

ریاضیات تجربی

ریاضی ۱ • ریاضی ۲ • ریاضی ۳ • ریاضی عمومی ۱ و ۲
هندسه ۱ • آمار و مدل سازی



رحیم قهرمان

اراده‌ی انسان معادله‌ای است که همیشه جواب دارد.

مقدمه

سلام به دانش‌پژوهان این مرز و بوم

در روزگاری که وقت کم است و همه در تلاشند که در سریع‌ترین زمان به سوی اهداف خود حرکت کنند بهره‌گیری از ابزارها و روش‌هایی که تسهیل‌کننده و کاربردی هستند می‌تواند بسیار مفید باشد. در درس ریاضی از آن‌جا که مفاهیم و روابط بسیار گسترده هستند، یادگیری باید با تمرین و ممارست زیاد همراه باشد. از این رو خوب است که منبع کاملی از مفاهیم و فرمول‌های ریاضی همیشه در دسترس باشد. یکی از روش‌های کاربردی، کتاب‌های کوچک دستی است که با عنوان (Hand Book) همیشه می‌تواند مانند یک **جعبه‌ی ابزار** در اختیار شما باشد و برای مراجعه به روابط و نیز مرور ریاضی به دانش‌پژوهان کمک کند. کتابی که در دست دارید، ریاضیات اختصاصی کنکور رشته تجربی است که از سری کتاب‌های لقمه‌ی مهروماه تهیه شده است. این جلد شامل همه‌ی تعاریف، نکته‌ها، روابط، فرمول‌های مربوط به دروس ریاضی (۱)، (۲)، (۳)، ریاضی عمومی پیش دانشگاهی، هندسه‌ی (۱) و آمار و مدل‌سازی است که به صورت منظم و دسته‌بندی شده ارائه گردیده است.

ویژگی‌های این کتاب عبارت است از:

۱ کل فصول مربوط به ریاضیات تجربی در ۲۷ فصل طبقه‌بندی شده

است که شامل درس نامه‌ها، نکات تستی، مفاهیم و فرمول‌های ریاضی است.

۲ در کتاب‌های ریاضی چهار سال دبیرستان، برخی از مطالب به شکل

پراکنده آمده است. در این کتاب، در کنار عنوان هر فصل ذکر شده است که

این فصل مربوط به کدام دروس و از کدام مقطع مختلف چهارسال تحصیلی

می‌باشد تا خواننده از سردرگمی‌های رهایی یابد.

۳ در ابتدای هر فصل، توضیحاتی به اختصار آمده و اهمیت آن فصل در

کنکور سراسری بیان شده است.

۴ در انتهای این کتاب ضمیمه‌ای ارائه شده است که در آن تمام

فرمول‌های پرکاربرد ریاضیات تجربی را بیان کرده‌ایم.

در پایان بر خود لازم می‌دانم از جناب آقای احمد اختیاری، مدیریت محترم

انتشارات مهروماه که در امر تألیف این اثر از هیچ مساعدتی دریغ ننموده‌اند،

تشکر کنم. همچنین از آقای جواد محمودی که با دستان هنرمند خود به

این اثر جان بخشید و در صفحه‌آرایی و طراحی اشکال کتاب با نهایت

دقت؛ سنگ تمام گذاشت و نیز از سرکار خانم فاطمه بخششی که زحمت

حروف‌چینی کتاب را برعهده داشتند، سپاس گزارم. در پایان از سرکار خانم

مینا نظری که با دقت فراوان این کتاب را نمونه‌خوانی و ویراستاری کردند،

کمال تشکر را دارم.

از آن جا که هیچ اثری، بدون عیب و نقص نیست، از این رو هرگونه انتقاد

و پیشنهاد را می‌توانید از طریق پیامک به سامانه‌ی ۳۰۰۰۷۲۱۲۰ و یا به

پست الکترونیکی rahimghahreman@yahoo.com با من در

میان بگذارید.

رحیم‌قهرمان

فهرست

- | | | | |
|-------|--------------------------|-------|--|
| ۱۵۱ ← | ۱۵ پیوستگی | ۷ ← | ۱ اعداد و نمادها |
| ۱۵۵ ← | ۱۶ دنباله‌ی اعداد | ۹ ← | ۲ مجموعه |
| ۱۶۶ ← | ۱۷ مجانب | ۱۳ ← | ۳ توان و رادیکال |
| ۱۷۵ ← | ۱۸ مشتق | ۲۰ ← | ۴ عبارت‌های جبری |
| ۱۹۵ ← | ۱۹ کاربرد مشتق | ۲۵ ← | ۵ اتحاد و تجزیه |
| ۲۲۱ ← | ۲۰ انتگرال | ۲۸ ← | ۶ هندسه‌ی مختصاتی و دستگاه معادلات خطی |
| ۲۳۰ ← | ۲۱ هندسه و استدلال | ۴۳ ← | ۷ دنباله‌ی حسابی و هندسی |
| ۲۵۱ ← | ۲۲ مساحت و قضیه فیثاغورس | ۵۳ ← | ۸ تابع نمایی و تابع لگاریتمی |
| ۲۶۴ ← | ۲۳ تشابه | ۶۲ ← | ۹ ماتریس |
| ۲۶۹ ← | ۲۴ شکل‌های فضایی | ۶۹ ← | ۱۰ تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش پذیری |
| ۲۷۷ ← | ۲۵ احتمال | ۷۱ ← | ۱۱ معادلات و نامعادلات |
| ۲۸۵ ← | ۲۶ مقاطع مخروطی | ۸۴ ← | ۱۲ تابع |
| ۳۱۶ ← | ۲۷ آمار و مدل‌سازی | ۱۱۲ ← | ۱۳ مثلثات |
| ۳۳۳ ← | ضمیمه: فرمول‌های مهم | ۱۳۱ ← | ۱۴ حد |



دنباله‌ی حسابی و هندسی

ریاضی «۲» + ریاضی عمومی پیش‌دانشگاهی



دنباله‌های حسابی و هندسی در کتاب‌های ریاضی (۲) و ریاضی عمومی پیش‌دانشگاهی مطرح شده و یکی از مباحث بسیار آسانی است که در کنکور سراسری اغلب ۱ تست به آن تعلق می‌گیرد.

تعریف دنباله

به هر تعداد از اعداد که آن‌ها را پشت سرهم نوشته باشیم، یک دنباله از اعداد می‌گوییم.

تذکره:

۱ به هر عدد که در یک دنباله نوشته شده باشد، یک جمله‌ی دنباله می‌گوییم.

۲ هر دنباله را با نمادهای $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{t_n\}$, ... نمایش می‌دهند.

تعریف دنباله‌ی بازگشتی: هرگاه جمله‌ی عمومی یک دنباله، برحسب یکی (یا بیشتر از یکی) از جملات قبل از آن باشد، این دنباله را یک دنباله‌ی بازگشتی می‌گویند.

دنباله‌ی حسابی

تعریف: دنباله‌ی حسابی دنباله‌ای است که اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی آن برابر مقدار ثابتی مانند d باشد، یا به عبارت



نکته

اگر دنباله‌ی حسابی جمله‌ی وسط داشته باشد (تعداد جملات فرد باشد)، حاصل جمع جمله‌های متساوی الفاصله از طرفین برابر است با، دو برابر جمله‌ی وسطی. به بیان دیگر داریم:

$$a_1 = \overset{1}{\text{آ}} \rightarrow \overset{2}{\text{آ}} \rightarrow \dots \rightarrow \overset{k}{\text{آ}} \rightarrow \dots \rightarrow \overset{n}{\text{آ}} \rightarrow \overset{n-1}{\text{آ}} \rightarrow \dots \rightarrow \overset{2}{\text{آ}} \rightarrow \overset{1}{\text{آ}} \Rightarrow a_1 + a_n = 2a_k$$

۵ وقتی در یک تست یا مسئله‌ای، مجموع و حاصل ضرب ۳ عدد یا ۵ یا عدد که جمله‌های متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند، معلوم باشند و هدف تعیین اعداد باشد، راه‌حل این است که سه جمله‌ای را به ترتیب $a-d$ ، a ، $a+d$ و پنج جمله‌ای را به ترتیب $a-2d$ ، $a-d$ ، a ، $a+d$ ، $a+2d$ فرض نموده، یک دستگاه دو معادله دو مجهولی بر حسب a و d تشکیل داده و آن را حل کنیم.

۶ اگر همه‌ی جملات یک دنباله‌ی حسابی را با عدد k جمع کنیم یا عدد k را از آن کم کنیم، قدرنسبت دنباله‌ی حسابی تغییر نمی‌کند.

۷ اگر همه‌ی جملات یک دنباله‌ی حسابی را k برابر کنیم، قدرنسبت دنباله‌ی حسابی نیز k برابر می‌شود.

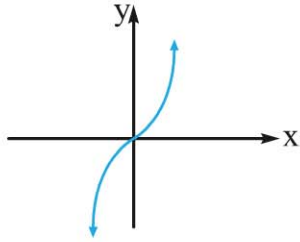
۸ اگر همه‌ی جملات یک دنباله‌ی حسابی را بر عدد k تقسیم کنیم، قدرنسبت دنباله‌ی حسابی نیز بر عدد k تقسیم می‌شود. ($k \neq 0$)

۹ در دنباله‌ی حسابی غیر ثابت a_n ، با قدرنسبت $d \neq 0$ ، اگر فقط جملات مرتبه‌ی زوج یا مرتبه‌ی فرد را نگه داریم، آن‌گاه دنباله‌ی حسابی جدیدی با قدرنسبت $2d$ به وجود می‌آید.



f را یک تابع اکیداً صعودی می‌گویند هر گاه به ازای هر:

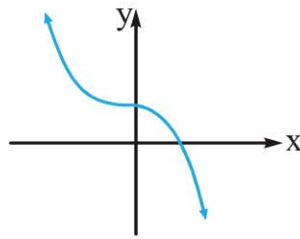
$$۲) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



(یعنی با افزایش x ها، y ها افزایش پیدا می‌کنند.)

f را یک تابع نزولی می‌گویند هر گاه به ازای هر:

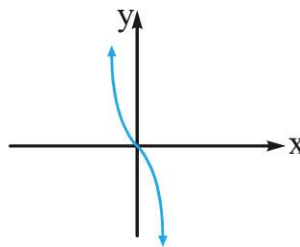
$$۳) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



(یعنی با افزایش x ها، y ها افزایش نمی‌یابند.)

f را یک تابع اکیداً نزولی می‌گویند هر گاه به ازای هر:

$$۴) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



(یعنی با افزایش x ها، y ها کم می‌شوند.)

نتیجه‌گیری کلی: هر تابع اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی را **اکیداً** **یکنوا** می‌نامیم و هر تابع صعودی و یا نزولی را **یکنوا** می‌نامیم.

نکات

- ۱) تابع ثابت $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$) هم نزولی و هم صعودی است.
- ۲) در منحنی‌های توابع اکیداً یکنوا، هیچ دو نقطه با عرض‌های برابر نباید وجود داشته باشد.

نکاتی که در محاسبه‌ی حدود به آن‌ها نیاز داریم

۱ $\frac{\text{عدد غیر صفر}}{\text{صفر حدی}} = \infty$	۲ $\frac{\text{عدد}}{\infty} = \text{صفر}$
۳ $\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف نشده}$	۴ $\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = \text{صفر}$
۵ $\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر حدی}} = \text{مبهم}$	۶ $\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف نشده}$
۷ $\text{صفر} \times \infty = (\text{صفر مطلق})$	۸ $\infty \times (\text{صفر حدی}) = \text{مبهم}$
۹ $\frac{\text{صفر حدی}}{\infty} = \text{صفر}$	۱۰ $\frac{\infty}{\text{صفر حدی}} = \infty$
۱۱ $\frac{\text{صفر مطلق}}{\infty} = \text{صفر}$	۱۲ $\frac{\infty}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف نشده}$
۱۳ $(\text{صفر مطلق})^{+\infty} = \text{صفر}$	۱۴ $(\text{صفر مطلق})^{-\infty} = \text{تعریف نشده}$
۱۵ $(\text{صفر حدی})^{+\infty} = \text{صفر}$	۱۶ $(\text{صفر حدی})^{-\infty} = \infty$
۱۷ $(0 < \text{عدد} < 1)^{+\infty} = \text{صفر}$	۱۸ $(0 < \text{عدد} < 1)^{+\infty} = \text{صفر}$
۱۹ $(0 < \text{عدد} < 1)^{-\infty} = \infty$	۲۰ $+\infty + \infty = +\infty$
۲۱ $-\infty - \infty = -\infty$	۲۲ $+\infty - \infty = \text{مبهم}$
۲۳ $\frac{\infty}{\infty} = \text{مبهم}$	۲۴ $\infty^{-\infty} = \text{صفر}$
۲۵ $(\infty)^{\text{صفر مطلق}} = 1$	۲۶ $1^{\infty} = 1$

حد چند تابع خاص

۱ بررسی حد در تابع

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & ; x \in \mathbb{Z} \\ f_2(x) & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$



برای محاسبه‌ی حد تابع f در $x = a$ (صحیح یا غیر صحیح)،

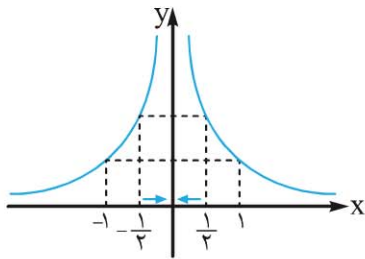
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \quad \text{همواره داریم:}$$

۲ اگر تابع f به ازای هر x در اطراف a تعریف شده باشد،

$$\lim_{x \rightarrow a} ([f(x)] + [-f(x)]) = -1 \quad \text{آن‌گاه:}$$

حد بی‌نهایت (حد نامتناهی)

تعبیر هندسی مفهوم حد بی‌نهایت



نمودار تابع نشان می‌دهد که وقتی مقادیر x ، به سمت صفر میل کنند، مقادیر تابع در مجاورت محور y ها زیاد و زیادتر می‌شوند.

تعریف: فرض کنیم تابع f در بازه‌ی I شامل x_0 مگر

احتمالاً در x_0 تعریف شده باشد، گوییم حد تابع f وقتی که x به

سمت x_0 میل می‌کند برابر مثبت بی‌نهایت است، هرگاه: اگر x به

قدر کافی به x_0 نزدیک شود، آن‌گاه $f(x)$ از هر عدد مثبتی بزرگ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{و بزرگ‌تر شود. در این صورت می‌نویسیم:}$$

تعریف: فرض کنیم تابع f در بازه‌ی I شامل x_0 مگر

احتمالاً در x_0 تعریف شده باشد، گوییم حد تابع f وقتی x به سمت

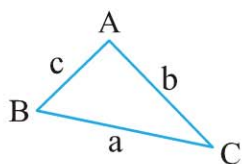
x_0 میل می‌کند، برابر منهای بی‌نهایت است، هرگاه: اگر x به قدر

کافی به x_0 نزدیک شود $f(x)$ از هر عدد منفی، کوچک و کوچک‌تر

دستور هرون: اگر اندازه‌ی اضلاع مثلث ABC به صورت

$$AB = c \text{ و } BC = a \text{ و } AC = b \text{ و } P = \frac{a+b+c}{2} \text{ نصف محیط}$$

باشد، آن‌گاه مساحت مثلث ABC برابر است با:



$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

رابطه‌های طولی در مثلث قائم‌الزاویه

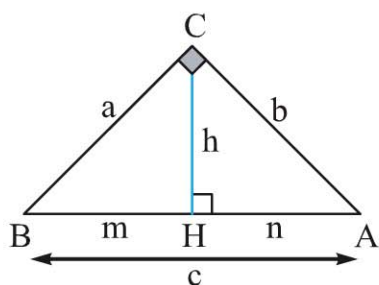
تعریف: عدد مثبت a را واسطه‌ی هندسه‌ی بین دو عدد

مثبت b و c می‌نامند، هرگاه $a^2 = b \times c$.

قضیه: در هر مثلث قائم‌الزاویه:

(الف) ارتفاع وارد بر وتر، واسطه‌ی هندسه‌ی دو پاره‌خطی است که پای ارتفاع بر وتر پدید آورده است.

(ب) هر ضلع زاویه‌ی قائمه، واسطه‌ی هندسه‌ی اندازه‌ی تصویر قائم آن ضلع بر وتر است.



$$1) h^2 = m \times n$$

$$2) b^2 = c \times n$$

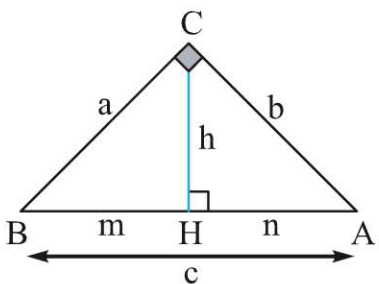
$$3) a^2 = c \times m$$

قضیه: در هر مثلث قائم‌الزاویه:

(الف) حاصل ضرب دو ضلع زاویه‌ی

قائمه، برابر است با حاصل ضرب

ارتفاع وارد بر وتر در وتر. $ab = ch$



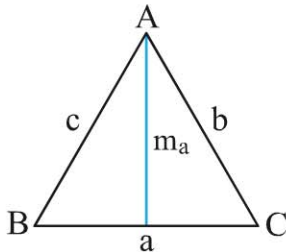


فصل بیست و دوم

ب) مربع عکس ارتفاع وارد بر وتر برابر است با مجموع مربعات وارون‌های دو ساق.

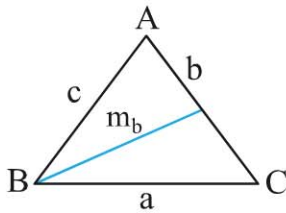
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$$

۱ قضیه میانه‌ها: در هر مثلث، مجموع مربعات هر دو ضلع برابر است با دو برابر مربع میانه‌ی نظیر ضلع سوم به علاوه‌ی نصف مربع ضلع سوم.



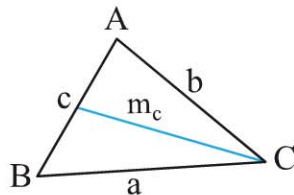
۱

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$



۲

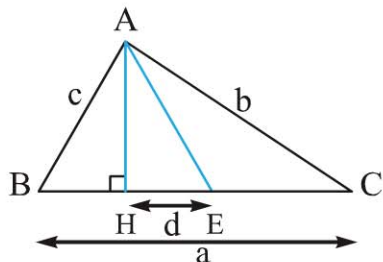
$$a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}$$



۳

$$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$$

۲ در هر مثلث، تفاضل مربع‌های دو ضلع برابر است با دو برابر حاصل ضرب ضلع سوم در تصویر قائم میانه‌ی نظیر ضلع سوم بر آن ضلع.



$$b^2 - c^2 = 2a \times d$$



$$۲) \sqrt[n]{an^3 + bn^2 + cn + d} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt[n]{a} \left(n + \frac{b}{3a}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{b_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)b_n}$$

۲

۳ هم‌ارزی‌های معروف مثلثاتی

۱ $\sin^n u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u^n$	۲ $\tan^n u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u^n$
۳ $1 - \cos u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}u^2$	۴ $u - \sin u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{u^3}{6}$
۵ $\tan u - u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{u^3}{3}$	۶ $\tan u - \sin u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{u^3}{2}$

دنباله‌ی اعداد

۱ سرعت رشد دنباله‌ها

$$n^n > n! > a^n > n^a > \log_a^n$$

۲ هم‌ارزی‌های رادیکالی برای محاسبه‌ی حدود

$$۱ \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \sqrt[n]{a} \left|x + \frac{b}{na}\right| \quad (n \text{ زوج})$$

$$۲ \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \sqrt[n]{a} \left(x + \frac{b}{na}\right) \quad (n \text{ فرد})$$

$$۳ \sqrt[n]{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \left|x - \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)\right|$$

(اگر n فرد باشد، قدرمطلق نمی‌گذاریم.)

$$۴ x^n \sqrt{\frac{x+a}{x+b}} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} x + \frac{a-b}{n}$$





مجانب

۱ اگر خط $y = mx + h$ مجانب مایل نمودار $y = f(x)$ باشد،
آن‌گاه:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad h = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$$

مشتق

۱ قاعده‌ی مشتق زنجیری

$$\begin{cases} y = f(u) \Rightarrow y'_u = f'(u) \\ u = g(x) \Rightarrow u'_x = g'(x) \end{cases} \Rightarrow y'_x = y'_u \times u'_x$$

۲ معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی $A \left| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right.$ واقع بر منحنی f

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

۳ شیب خطوط مماس بر منحنی‌های f و g در محل تلاقی

به ترتیب $m_1 = f'(x_0)$ و $m_2 = g'(x_0)$ ، باشد، آن‌گاه:

$$\tan \alpha = \left| \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)} \right| = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

۴ معادله‌ی خط قائم از نقطه‌ی $A \left| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right.$ واقع بر منحنی f

$$y - f(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

کاربرد مشتق

۱ آهنگ تغییرات متوسط $\frac{df}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$



مجموعه کتاب‌های لقمه



خلاصه‌ی ریاضیات کنکور تجربی در دستان شماست!
 این کتاب مروری کامل بر مفاهیم، فرمول‌ها و نکات ۷ کتاب ریاضی رشته‌ی تجربی می‌باشد. این چکیده‌ی مختصر و مفید به شما کمک می‌کند که بر چهار چوب‌های کلی و روابط مهم ریاضیات تجربی مسلط شوید و هر وقت که خواستید به آن مراجعه کنید. خوب است بدانید در این خلاصه، مطالب به صورت کتاب به کتاب و فصل به فصل دسته‌بندی شده، بنابراین برای یافتن مطالب و استفاده از آن بسیار راحت است.



۰۳-۴۶۴۰۸۴۰۰
 ۳۰۰۰۷۲۱۲۰
 www.mehromah.ir

