احتمال رخداد یک پیشامد

اگر یک تاس را پرتاب کنیم، نتیجه‌های ممکن آن ۶ حالت دارد که در دو حالت عدد رو شده مضرب ۳ است (۳ یا ۶)، بنابراین شانس رو شدن عدد مضرب ۳ در این آزمایش $\frac{۲}{۶}$ است. این عدد را احتمال وقوع رو شدن عدد مضرب ۳ در پرتاب یک تاس می‌گوییم و در حالت کلی: احتمال رخداد پیشامد A از فضای نمونه‌ای S را با $P(A)$ نشان می‌دهیم و برای محاسبه‌ی $P(A)$ کافی است تعداد اعضای A یعنی $n(A)$ را بر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای یعنی $n(S)$ تقسیم کنیم. عدد حاصل یعنی $P(A)$ عددی حقیقی است که شانس رخداد پیشامد A را اندازه‌گیری می‌کند.

$$\text{احتمال رخداد پیشامد A در فضای نمونه‌ای S} = P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن}}$$

برای تعیین احتمال یک پیشامد دلخواه مانند A مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱) مشخص کردن آزمایش تصادفی

۲) مشخص کردن فضای نمونه‌ای و تعیین تعداد اعضای آن

۳) مشخص کردن پیشامد مطلوب و تعیین تعداد اعضای آن

سپس با استفاده از رابطه‌ی $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$، احتمال رخداد پیشامد به‌دست می‌آید.

در این قسمت انواع سؤالات احتمال را به پنج دسته تقسیم می‌کنیم:

دسته‌ی اول: احتمال فرزند یا سکه

مثال ۵۰: خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است، مطلوب است احتمال آن‌که: (تمرین ۳ کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۸)

آ) ۲ فرزند این خانواده پسر باشد.

ب) حداقل ۲ فرزند خانواده پسر باشد.

پ) تعداد فرزندان پسر بیش‌تر از تعداد فرزندان دختر باشد.

پاسخ: فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی $۱۶ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$ عضو دارد، بنابراین: $n(S) = ۱۶$

آ) ۲ فرزند از ۴ فرزند خانواده پسر باشد: $A \Rightarrow n(A) = \binom{۴}{۲} = \frac{۴ \times ۳}{۲!} = ۶ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۱۶} = \frac{۳}{۸}$

ب) هر ۴ فرزند پسر باشند یا ۳ فرزند از ۴ فرزند پسر باشند یا ۲ فرزند از ۴ فرزند پسر باشند. $\Leftarrow B$: حداقل ۲ فرزند خانواده پسر باشد.

$$\Rightarrow n(B) = \binom{۴}{۲} + \binom{۴}{۳} + \binom{۴}{۴} = ۶ + ۴ + ۱ = ۱۱ \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۱۱}{۱۶}$$

پ) هر ۴ فرزند پسر باشند یا ۳ فرزند از ۴ فرزند پسر باشند. $\Leftarrow C$: تعداد فرزندان پسر بیش‌تر از تعداد فرزندان دختر باشد.

$$\Rightarrow n(C) = \binom{۴}{۳} + \binom{۴}{۴} = ۴ + ۱ = ۵ \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{۵}{۱۶}$$

مثال ۵۱: سکه‌ای را ۳ بار پرتاب می‌کنیم. با چه احتمالی:

آ) فقط یک بار سکه «رو» می‌آید. **ب) حداکثر ۲ بار سکه «رو» می‌آید.**

پاسخ: اگر سکه‌ای را ۳ بار پرتاب کنیم، فضای نمونه‌ای $۸ = ۲^۳$ عضو دارد. پس: $n(S) = ۸$

آ) فقط یک بار سکه «رو» می‌آید: $A \Rightarrow n(A) = \binom{۳}{۱} = ۳ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۸}$

ب) حداکثر ۲ بار سکه «رو» می‌آید: $B \Rightarrow n(B) = \binom{۳}{۰} + \binom{۳}{۱} + \binom{۳}{۲} = ۱ + ۳ + ۳ = ۷ \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۷}{۸}$

دسته‌ی دوم: پرتاب تاس

مثال ۵۲: تاسی را سه بار می‌اندازیم. مطلوب است احتمال آن‌که: (مثال ۷ کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۷)

آ) هر سه عدد رو شده مثل هم باشند. ب) هر سه عدد رو شده متمایز باشند.

پ) مجموع اعداد رو شده‌ی سه تاس بزرگ‌تر از ۱۶ باشد. ت) دقیقاً در دو پرتاب عدد ۵ ظاهر شود.

پاسخ: فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی $۶\times۶\times۶=۲۱۶$ عضو دارد. $S=\{(x,y,z)\,|\,x,y,z\in\{۱,۲,...,۶\}\}$

آ) هر ۳ عدد رو شده مثل هم باشند: $A \Rightarrow A=\{(۱,۱,۱),(۲,۲,۲),(۳,۳,۳),(۴,۴,۴),(۵,۵,۵),(۶,۶,۶)\}$

$$\Rightarrow n(A)=۶ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۲۱۶}=\frac{۱}{۳۶}$$

ب) برای این‌که اعداد رو شده‌ی سه تاس متمایز باشند، تاس اول هر عددی می‌تواند باشد که برای آن ۶ حالت ممکن است و تاس دوم هر عددی به جز عدد رو شده در تاس اول می‌تواند باشد، یعنی ۵ حالت دارد و برای تاس سوم هر عددی به جز دو عدد رو شده در تاس‌های اول و دوم یعنی ۴ حالت موجود است و لذا طبق اصل ضرب به $۶\times۵\times۴=۱۲۰$ طریق اعداد رو شده‌ی سه تاس متمایز هستند. بنابراین اگر B پیشامد مطلوب باشد، آن‌گاه:

$$n(B)=۱۲۰ \Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱۲۰}{۲۱۶}=\frac{۵}{۹}$$

پ) مجموع اعداد رو شده‌ی سه تاس بزرگ‌تر از ۱۶ باشد: $C \Rightarrow C=\{\overbrace{(۵,۶,۶),(۶,۵,۶),(۶,۶,۵)}^{\text{مجموع}=۱۷},\underbrace{(۶,۶,۶)}_{\text{مجموع}=۱۸}\}$

$$\Rightarrow n(C)=۴ \Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۴}{۲۱۶}=\frac{۱}{۵۴}$$

ت) دقیقاً در دو پرتاب عدد ۵ ظاهر شود: $D \Rightarrow n(D)=\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{در دو پرتاب از ۳ پرتاب عدد ۵ ظاهر شود.}}\times\overbrace{۵}^{\text{در پرتاب دیگر عددی غیر از ۵ ظاهر شود.}}=۱۵ \Rightarrow P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۱۵}{۲۱۶}=\frac{۵}{۷۲}$

مثال ۵۳: در پرتاب دو تاس احتمال آن‌که مجموع اعداد رو شده‌ی دو تاس ۶ باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۵}{۳۶}$ ۲) $\frac{۶}{۳۶}$ ۳) $\frac{۴}{۳۶}$ ۴) $\frac{۳}{۳۶}$

پاسخ: فضای نمونه‌ای این پدیده تصادفی ۳۶ عضو دارد.

مجموع اعداد رو شده‌ی دو تاس ۶ باشد: $A=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\} \Rightarrow n(A)=۵ \Rightarrow P(A)=\frac{۵}{۳۶}$

بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مثال ۵۴: در پرتاب دو تاس احتمال آن‌که حاصل جمع اعداد رو شده مضرب ۵ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳۶}$ ۲) $\frac{۷}{۳۶}$ ۳) $\frac{۹}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳۶}$

پاسخ:

$$n(S)=۳۶ \quad , \quad A=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱),(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\}$$

$$\Rightarrow n(A)=۷ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷}{۳۶}$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۵۵: دو تاس سفید و یک تاس قرمز را پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که عدد تاس قرمز، کوچک‌تر از عدد تاس‌های سفید باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۷۲}$ ۲) $\frac{۵۵}{۲۱۶}$ ۳) $\frac{۵۵}{۷۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲۱۶}$

پاسخ: فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی $۶^۳=۲۱۶$ عضو دارد.

عدد تاس قرمز $=۱ \Rightarrow$ عدد تاس‌های سفید ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ می‌توانند باشند. $\Rightarrow ۵\times۵=۲۵$

عدد تاس قرمز $=۲ \Rightarrow$ عدد تاس‌های سفید ۳، ۴، ۵ و ۶ می‌توانند باشند. $\Rightarrow ۴\times۴=۱۶$

عدد تاس قرمز $=۳ \Rightarrow$ عدد تاس‌های سفید ۴، ۵ و ۶ می‌توانند باشند. $\Rightarrow ۳\times۳=۹$

عدد تاس قرمز $=۴ \Rightarrow$ عدد تاس‌های سفید ۵ و ۶ می‌توانند باشند. $\Rightarrow ۲\times۲=۴$

عدد تاس قرمز $=۵ \Rightarrow$ عدد تاس‌های سفید ۶ می‌تواند باشد. $\Rightarrow ۱\times۱=۱$

$\Rightarrow n(A)=۲۵+۱۶+۹+۴+۱=۵۵ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵۵}{۲۱۶} \Rightarrow$ گزینه‌ی (۲) صحیح است.

دسته‌ی سوم: احتمال انتخاب از یک ظرف، جعبه یا گروه

مثال ۵۶: از جعبه‌ای که حاوی ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب خراب است، ۳ سیب به تصادف برمی‌داریم، مطلوب است احتمال آن‌که: (تمرین ۷ کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۲)

آ) هر سه سیب سالم باشند. ب) دو سیب سالم و یکی خراب باشد. پ) تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های خراب بیش‌تر باشد.

پاسخ: فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی مجموعه‌ی شامل همه‌ی حالت‌های ممکن در انتخاب ۳ سیب از ۱۷ سیب جعبه است که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S)=\binom{17}{3}=\frac{17\times16\times15}{3!}=680$$

آ) اگر A پیشامد سالم بودن هر سه سیب باشد، آن‌گاه:

$$n(A)=\binom{12}{3}=\frac{12\times11\times10}{3!}=220\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{220}{680}=\frac{11}{34}$$

ب) اگر B پیشامد سالم بودن دو سیب و خراب بودن یکی از آن‌ها باشد، آن‌گاه:

$$n(B)=\binom{12}{2}\times\binom{5}{1}=\frac{12\times11}{2}\times5=330\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{330}{680}=\frac{33}{68}$$

پ) اگر D پیشامد مطلوب باشد، آن‌گاه:

۲ سیب سالم و یکی خراب یا هر ۳ سیب سالم : $D\Rightarrow n(D)=\binom{12}{2}\binom{5}{1}+\binom{12}{3}=330+220=550\Rightarrow P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{550}{680}=\frac{55}{68}$

مثال ۵۷: از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره‌ی سبز، ۴ مهره‌ی آبی و ۲ مهره‌ی زرد می‌باشد، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که: (مثال ۳ کتاب درسی- صفحه‌ی ۹)

آ) هر سه سبز باشند. ب) هر سه هم‌رنگ باشند. پ) فقط دو مهره آبی باشد.

پاسخ: فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی مجموعه‌ی شامل همه‌ی حالت‌های ممکن در انتخاب ۳ مهره از بین ۱۱ مهره موجود در جعبه است که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S)=\binom{11}{3}=\frac{11\times10\times9}{3!}=165$$

آ) پیشامد سبز بودن هر سه مهره : $A\Rightarrow n(A)=\binom{5}{3}=10\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{10}{165}=\frac{2}{33}$

ب) پیشامد هم‌رنگ بودن هر سه مهره (هر سه سبز یا هر سه آبی) : $B\Rightarrow n(B)=\binom{5}{3}+\binom{4}{3}=14\Rightarrow P(B)=\frac{14}{165}$

پ) ۲ مهره آبی و ۱ مهره غیرآبی : $C\Rightarrow n(C)=\binom{4}{2}\binom{7}{1}=42\Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{42}{165}=\frac{14}{55}$

مثال ۵۸: درون جعبه‌ای ۵ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه قرار دارد. از این جعبه دو مهره با هم خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که هر دو مهره هم‌رنگ باشند، چند برابر احتمال آن است که دقیقاً یکی از مهره‌ها سفید باشد؟

۱) $\frac{9}{19}$ ۲) $\frac{11}{17}$ ۳) $\frac{13}{15}$ ۴) $\frac{5}{23}$

پاسخ: انتخاب ۲ مهره از ۸ مهره : $S\Rightarrow n(S)=\binom{8}{2}=28$

هر دو مهره‌ی انتخاب شده هم‌رنگ باشند. : $A\Rightarrow n(A)=\binom{5}{2}+\binom{3}{2}=10+3=13\Rightarrow P(A)=\frac{13}{28}$

یک مهره سفید و یک مهره سیاه باشد. : $B\Rightarrow n(B)=\binom{5}{1}\binom{3}{1}=15\Rightarrow P(B)=\frac{15}{28}\Rightarrow\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{13}{28}}{\frac{15}{28}}=\frac{13}{15}$

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۵۹: از بین ۳ داوطلب گروه ریاضی، ۴ داوطلب گروه تجربی و ۲ داوطلب گروه انسانی، سه نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال آن‌که از هر گروه دقیقاً یک نفر انتخاب شده باشد، چه‌قدر است؟

پاسخ: فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی تمام حالات ممکن در انتخاب ۳ نفر از ۹ نفر می‌باشد که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S)=\binom{9}{3}=\frac{9\times8\times7}{3!}=84$$

اگر A پیشامد مطلوب باشد، آن‌گاه:

$$n(A)=\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{2}{1}=24\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{24}{84}=\frac{2}{7}$$

مثال ۶۰: درون جعبه‌ای ۸ مهره‌ی سیاه و سفید وجود دارد. از این جعبه ۲ مهره با هم و به تصادف بیرون می‌آوریم. اگر احتمال هم‌رنگ نبودن دو مهره $\frac{۳}{۷}$ باشد، احتمال آن‌که هر دو مهره سفید باشند را به‌دست آورید. (فرض کنیم تعداد مهره‌های سفید بیش‌تر از تعداد مهره‌های سیاه باشد.)

پاسخ: فرض کنیم x مهره‌ی سفید درون جعبه باشد، در این صورت تعداد مهره‌های سیاه $۸-x$ است.

$$P\,(\text{هم‌رنگ نبودن دو مهره}) = P\,(\text{یک مهره سفید و یک مهره سیاه}) = \frac{\binom{x}{۱}\binom{۸-x}{۱}}{\binom{۸}{۲}} = \frac{x(۸-x)}{۲۸} = \frac{۳}{۷}$$

$$\Rightarrow x(۸-x) = ۱۲ \Rightarrow x = ۶ \text{ یا } ۲ \Rightarrow \quad x = ۶ \text{ قابل قبول است.}$$

در واقع درون جعبه ۶ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سیاه قرار دارد. بنابراین:

$$P\,(\text{سفید بودن هر دو مهره}) = \frac{\binom{۶}{۲}}{\binom{۸}{۲}} = \frac{۱۵}{۲۸}$$

مثال ۶۱: دو جعبه‌ی A و B را در اختیار داریم. در جعبه‌ی A، ۳ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه و در جعبه‌ی B، ۲ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه وجود دارند. از هر جعبه یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم، احتمال هم‌رنگ بودن دو مهره را به‌دست آورید.

پاسخ: S: تمام حالات انتخاب یک مهره از ۷ مهره‌ی جعبه‌ی A و یک مهره از ۷ مهره‌ی جعبه‌ی B $\Rightarrow n(S) = \binom{۷}{۱}\binom{۷}{۱} = ۴۹$

اگر C پیشامد هم‌رنگ بودن دو مهره باشد، آن‌گاه:

آ) یک مهره‌ی جعبه‌ی A سفید و یک مهره‌ی جعبه‌ی B نیز سفید باشد.

ب) یک مهره‌ی جعبه‌ی A سیاه و یک مهره‌ی جعبه‌ی B نیز سیاه باشد.

بنابراین:

$$n(C) = \binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱} + \binom{۴}{۱}\binom{۵}{۱} = ۲۶ \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{۲۶}{۴۹}$$

مثال ۶۲: در کیسه‌ای ۴ مهره‌ی آبی، ۳ مهره‌ی سبز و ۲ مهره‌ی قرمز وجود دارد. ۳ مهره به تصادف و پی‌درپی و با جایگذاری از این کیسه خارج می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد مهره‌ی اول آبی، دومی سبز و سومی آبی باشد؟ اگر این عمل را بدون جایگذاری انجام دهیم، چه‌قدر احتمال دارد مهره‌ی اول آبی، دومی سبز و سومی آبی باشد؟ (تمرین ۲ کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۸)

پاسخ: در انتخاب ۳ مهره با جایگذاری (مهره‌ی اول را که انتخاب می‌کنیم به کیسه برگردانده و دوباره مهره‌ای برمی‌داریم و ...) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با: $n(S) = ۹\times۹\times۹$

$$A: \text{مهره‌ی اول آبی، مهره‌ی دوم سبز و مهره‌ی سوم آبی} \Rightarrow n(A) = \binom{۴}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۴}{۱} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۶}{۲۴۳}$$

توجه کنیم که در انتخاب دومین مهره‌ی آبی، مهره‌ی آبی اول را به کیسه برگردانده‌ایم و مجدداً از ۴ مهره‌ی آبی یکی را به تصادف انتخاب می‌کنیم.

فرض کنیم سه مهره را پی‌درپی و بدون جایگذاری انتخاب کرده باشیم پس ترتیب مهم است. برای به‌دست آوردن $n(S)$ و $n(A)$ از اصل ضرب استفاده می‌کنیم: $n(S) = ۹\times۸\times۷$

$$A: \text{مهره‌ی اول و سوم آبی و مهره‌ی دوم سبز باشد.} \Rightarrow n(A) = \binom{۴}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۳}{۱} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۱۴}$$

مثال ۶۳: می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز کلاس دوم و ۷ دانش‌آموز کلاس سوم یک تیم ۳ نفره به تصادف انتخاب کنیم. چه‌قدر احتمال دارد:

آ) هیچ دانش‌آموز کلاس دوم در تیم نباشد. (تمرین ۸ کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۹)

ب) تعداد دانش‌آموزان کلاس سوم در تیم انتخابی از تعداد دانش‌آموزان کلاس دوم بیش‌تر باشد.

پاسخ: فضای نمونه‌ای تمام حالات انتخاب ۳ دانش‌آموز از ۱۲ دانش‌آموز است، پس: $n(S) = \binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۳!} = ۲۲۰$

آ) A: هیچ دانش‌آموزی از کلاس دوم در تیم نباشد. $\Rightarrow$ هر سه دانش‌آموز از کلاس سوم باشند. $\Rightarrow n(A) = \binom{۷}{۳} = \frac{۷\times۶\times۵}{۳!} = ۳۵$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳۵}{۲۲۰} = \frac{۷}{۴۴}$$

ب) اگر B پیشامد مطلوب باشد، آن‌گاه باید ۲ دانش‌آموز از کلاس سوم و ۱ دانش‌آموز از کلاس دوم و یا هر ۳ دانش‌آموز از کلاس سوم باشند.

$$\Rightarrow n(B) = \binom{۷}{۳} + \binom{۷}{۲}\binom{۵}{۱} = ۳۵ + ۱۰۵ = ۱۴۰ \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۱۴۰}{۲۲۰} = \frac{۷}{۱۱}$$

مثال ۶۴: ۸ گوی یکسان با شماره‌های ۱ تا ۸ را درون کیسه‌ای ریخته‌ایم. از این کیسه ۳ گوی با هم و به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که:

آ) شماره‌ی روی هیچ‌یک از گوی‌ها از ۵ بزرگ‌تر نباشد.
ب) گوی با شماره‌ی ۵ خارج شده باشد.

پاسخ: فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی انتخاب ۳ گوی از ۸ گوی درون کیسه است که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S)=\binom{۸}{۳}=\frac{۸\times۷\times۶}{۳!}=۵۶$$

آ) فرض کنیم A پیشامد آن باشد که شماره‌ی روی هیچ‌یک از گوی‌ها بزرگ‌تر از ۵ نباشد، در این صورت باید سه گوی از گوی‌های با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را انتخاب کنیم که تعداد راه‌های انجام این کار برابر است با:

$$n(A)=\binom{۵}{۳}=\frac{۵\times۴\times۳}{۳!}=۱۰\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۵۶}=\frac{۵}{۲۸}$$

ب) اگر B پیشامد خارج شدن گوی با شماره‌ی ۵ از بین ۳ گوی خارج شده باشد، آن‌گاه باید ۲ گوی دیگر از بین ۷ گوی باقی‌مانده انتخاب شود، بنابراین:

$$n(B)=\binom{۷}{۲}=۲۱\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۲۱}{۵۶}=\frac{۳}{۸}$$

مثال ۶۵: در ظرفی ۵ مهره به شماره‌های ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ و ۵ ریخته‌ایم. دو مهره به تصادف و با هم از ظرف بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آن‌که:

آ) مجموع شماره‌ها از ۶ بزرگ‌تر باشد.
ب) مجموع شماره‌ها مضرب ۴ باشد.

پاسخ: فضای نمونه‌ای تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ است. پس:

$$S=\{\{۱,۲\},\{۱,۳\},...\}\Rightarrow n(S)=\binom{۵}{۲}=۱۰$$

آ) فرض کنیم A پیشامد آن باشد که مجموع شماره‌ها از ۶ بزرگ‌تر باشد، آن‌گاه:

$$A=\{\{۲,۵\},\{۳,۴\},\{۳,۵\},\{۴,۵\}\}\Rightarrow n(A)=۴\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=۰/۴$$

ب) $B:$ مجموع شماره‌ها مضرب ۴ باشد $\Rightarrow B=\{\{۱,۳\},\{۳,۵\}\}\Rightarrow n(B)=۲\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=۰/۲$

توجه کنیم که در مسائل انتخاب ترتیب مهم نیست، بنابراین اعضای فضای نمونه‌ای و پیشامدها به صورت مجموعه‌های دو عضوی نوشته شده است، نه به صورت زوج مرتب.

مثال ۶۶: از بین ۳ نفر با رنگ چشم روشن و ۴ نفر با رنگ چشم مشکی، دو نفر به‌طور تصادفی برای انجام آزمایشی انتخاب می‌شوند. احتمال آن‌که رنگ چشم این دو نفر با هم متفاوت باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ۴) $\frac{۵}{۷}$

پاسخ:

$S:$ تمام حالات انتخاب ۲ نفر از بین ۷ نفر $\Rightarrow n(S)=\binom{۷}{۲}=\frac{۷\times۶}{۲}=۲۱$

$A:$ تمام حالات انتخاب یک نفر با رنگ چشم روشن و یک نفر با رنگ چشم مشکی $\Rightarrow n(A)=\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}=۱۲$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۲}{۲۱}=\frac{۴}{۷}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۶۷: درون جعبه‌ای ۲ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه وجود دارد. از این جعبه مهره‌ای به تصادف بیرون می‌آوریم و آن را مجدداً به جعبه برمی‌گردانیم و سپس مهره‌ی دیگری به تصادف از جعبه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که دقیقاً یکی از مهره‌های خارج شده سفید باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱۲}{۲۵}$ ۴) $\frac{۶}{۲۵}$

پاسخ: مهره‌ی اول را به ۵ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم و با توجه به این‌که مهره‌ی اول انتخاب شده را دوباره به جعبه برمی‌گردانیم، مهره‌ی دوم را نیز به ۵ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم، بنابراین: $n(S)=۵\times۵=۲۵$

اگر A پیشامدی باشد که دقیقاً یکی از مهره‌های انتخاب شده سفید باشد، آن‌گاه:

۱) مهره‌ی اول سفید و مهره‌ی دوم سیاه است که تعداد حالات برابر است با: $۲\times۳=۶$

۲) مهره‌ی اول سیاه و مهره‌ی دوم سفید است که تعداد حالات برابر است با: $۳\times۲=۶$

$$n(A)=۶+۶=۱۲\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۲}{۲۵}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

مثال ۶۸: دانش‌آموزی می‌خواهد به ۷ سؤال از ۱۰ سؤال آزمونی به تصادف پاسخ دهد. احتمال آن‌که وی دقیقاً به ۴ سؤال از ۵ سؤال اول پاسخ داده باشد، چه‌قدر است؟

پاسخ: فضای نمونه‌ای عبارت است از تمام حالات انتخاب تصادفی ۷ سؤال از ۱۰ سؤال، که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S)=\binom{10}{7}=\binom{10}{3}=\frac{10\times9\times8}{3!}=120$$

اگر A پیشامد مطلوب باشد، آن‌گاه:

$$A: \text{به ۴ سؤال از ۵ سؤال اول و ۳ سؤال از ۵ سؤال دوم به تصادف پاسخ دهد} \Rightarrow n(A)=\binom{5}{4}\binom{5}{3}=5\times10=50$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$$

مثال ۶۹: از میان ۱۰ جفت کفش متمایز، دو لنگه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که آن دو لنگه از یک جفت باشند را به‌دست آورید.

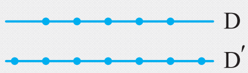
پاسخ: فضای نمونه‌ای تمام حالات انتخاب ۲ لنگه کفش از بین ۲۰ لنگه کفش موجود است که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S)=\binom{20}{2}=\frac{20\times19}{2}=190$$

در ۱۰ حالت ۲ لنگه کفش انتخاب شده مربوط به یک جفت کفش می‌باشند، بنابراین اگر A پیشامد مطلوب باشد، آن‌گاه:

$$n(A)=10\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{10}{190}=\frac{1}{19}$$

مثال ۷۰: دوازده نقطه مطابق شکل مقابل روی دو خط موازی قرار دارند. از این نقطه‌ها سه نقطه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که سه نقطه‌ی انتخاب شده، رأس‌های یک مثلث باشند را به‌دست آورید.



پاسخ: فضای نمونه‌ای تمام حالات انتخاب ۳ نقطه از ۱۲ نقطه موجود است که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S)=\binom{12}{3}=\frac{12\times11\times10}{3!}=220$$

فرض کنیم A پیشامد آن باشد که بتوان با سه نقطه‌ی حاصل یک مثلث ساخت، پس:

$$n(A)=\underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{۲ نقطه از D}}\overbrace{\binom{7}{1}}^{\text{۱ نقطه از D′}}+\underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{۱ نقطه از D}}\overbrace{\binom{7}{2}}^{\text{۲ نقطه از D′}}=70+105=175\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{175}{220}=\frac{35}{44}$$

مثال ۷۱: در یک کلاس ۳۲ نفر دانش‌آموز در ۴ ردیف ۸ تایی روی نیمکت نشسته‌اند. به‌طور تصادفی دو نفر از دانش‌آموزان را انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که: (نهایی- دی ۸۹)

آ) هر دو از ردیف اول باشند. ب) یک نفر از ردیف اول و یک نفر از ردیف دوم باشد.

پاسخ: فضای نمونه‌ای تمام حالات انتخاب ۲ نفر از ۳۲ نفر است که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S)=\binom{32}{2}=\frac{32\times31}{2}=496$$

آ) A: هر دو نفر از ۸ نفر ردیف اول باشند $\Rightarrow n(A)=\binom{8}{2}=\frac{8\times7}{2}=28\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{28}{496}=\frac{7}{124}$

ب) B: یک نفر از ردیف اول و یک نفر از ردیف دوم باشند $\Rightarrow n(B)=\binom{8}{1}\times\binom{8}{1}=64\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{64}{496}=\frac{4}{31}$

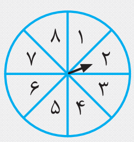
مثال ۷۲: از مجموعه‌ی $A=\{1,2,3,\dots,20\}$ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که این عدد، یک عدد اول باشد را به‌دست آورید.

پاسخ: فضای نمونه‌ای تمام حالات انتخاب یک عدد از ۲۰ عدد مجموعه‌ی A است که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S)=\binom{20}{1}=20$$

B: عدد انتخاب شده عدد اول باشد $\Rightarrow B=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}\Rightarrow n(B)=8\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

مثال ۷۳: عقربه‌ای مطابق شکل زیر و به تصادف پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیه‌ی شکل می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چه‌قدر احتمال دارد: (تمرین ۸ کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۲)



آ) عقربه عددی اول را نشان بدهد. ب) عقربه عددی اول یا فرد را نشان بدهد.

پ) عقربه روی عدد مضرب ۳ بایستد.

پاسخ : فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی به صورت $S=\{۱,۲,\cdots,۸\}$ است.

آ) اگر A پیشامد اول بودن عدد باشد، آن‌گاه:

$$A=\{۲,۳,۵,۷\} \Rightarrow n(A)=۴ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

ب) اگر B پیشامد اول بودن یا فرد بودن عدد باشد، آن‌گاه:

$$B=\{۱,۲,۳,۵,۷\} \Rightarrow n(B)=۵ \Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۵}{۸}$$

پ) اگر C پیشامد مضرب ۳ بودن عدد باشد، آن‌گاه:

$$C=\{۳,۶\} \Rightarrow n(C)=۲ \Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

مثال ۷۴: **در یک ظرف ۵ گوی قرمز با شماره‌های ۱ تا ۵ و چهار گوی آبی با شماره‌های ۱ تا ۴ قرار دارند. به‌طور تصادفی یک گوی از هر رنگ خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، لااقل شماره‌ی یکی از آن‌ها عدد ۲ می‌باشد؟**

پاسخ : فضای نمونه‌ای تمام حالات انتخاب یک گوی قرمز از شماره‌ی ۱ تا ۵ و یک گوی آبی از شماره‌ی ۱ تا ۴ می‌باشد که تعداد حالت‌های آن برابر است با: (دقت کنید که رنگ گوی‌ها هم مهم است.)

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),\ldots,(۵,۴)\} \Rightarrow n(S)=\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}=۲۰$$

گوی قرمز ← ، → گوی آبی

اگر A پیشامدی باشد که در آن لااقل شماره‌ی یکی از آن‌ها عدد ۲ باشد، آن‌گاه:

$$A=\{(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۱,۲),(۳,۲),(۴,۲),(۵,۲)\}$$

$$\Rightarrow n(A)=۸ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸}{۲۰}=۰/۴$$

دسته‌ی چهارم: احتمال ساختن کلمه یا عدد خاص

مثال ۷۵: **یک عدد ۶ رقمی با جابه‌جایی ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۶ به‌وجود می‌آید. احتمال آن‌که عدد حاصل بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد را به‌دست آورید.**

پاسخ : فضای نمونه‌ای S تمام اعداد ۶ رقمی و بدون تکرار ارقام حاصل از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۶ می‌باشد، بنابراین تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S)=\underline{۵}\times\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}=۵\times۵!$$

فرض کنیم A پیشامد مطلوب باشد، در این صورت A شامل تمام اعداد ۶ رقمی است که رقم یکان آن صفر باشد، پس:

$$n(A)=\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}\times\underline{۱}=۵! \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵!}{۵\times۵!}=\frac{۱}{۵}$$

مثال ۷۶: **تمام اعداد دو رقمی را که با جابه‌جایی ارقام ۱ ، ۲ ، ۲ ، ۳ و ۴ می‌توان ساخت، روی کارت‌های متمایز نوشته و در یک کیسه قرار می‌دهیم و سپس یکی از این کارت‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که عدد روی کارت، رقم ۳ داشته باشد، کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۶}{۱۳}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷}{۱۷}$

پاسخ : تمام اعداد دو رقمی با ارقام ۱ ، ۲ ، ۲ ، ۳ و ۴ : $S=\{۱۲,۱۳,۱۴,۲۱,۲۲,۲۳,۲۴,۳۱,۳۲,۳۴,۴۱,۴۲,۴۳\} \Rightarrow n(S)=۱۳$

تمام اعداد دو رقمی شامل رقم ۳ : $A=\{۱۳,۳۱,۲۳,۳۴,۴۳,۳۲\} \Rightarrow n(A)=۶ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۳}$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال ۷۷: **یک عدد ۶ رقمی با جابه‌جایی ارقام ۰، ۱، ۱، ۲، ۲ و ۲ به‌وجود می‌آید. احتمال آن‌که عدد حاصل فرد باشد چه‌قدر است؟**

پاسخ : فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی مجموعه‌ی تمام اعداد ۶ رقمی حاصل از جابه‌جایی ارقام ۰، ۱، ۱، ۲، ۲ و ۲ می‌باشد. برای به‌دست آوردن تعداد اعضای فضای نمونه‌ای S، ۶ مکان به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$\square\square\square\square\square\square$

رقم صفر در مکان سمت چپ قرار نمی‌گیرد، بنابراین هر یک از ۵ مکان باقی‌مانده را می‌توانیم انتخاب کنیم و رقم صفر را قرار دهیم. از ۵ مکان باقی‌مانده ۳ مکان را انتخاب می‌کنیم و ۳ رقم ۲ را قرار می‌دهیم که این کار به $\binom{۵}{۳}=۱۰$ طریق انجام می‌شود و در آخر ۲ مکان باقی می‌ماند که ۲ رقم یک را قرار می‌دهیم، پس:

$$n(S)=\binom{۵}{۱}\binom{۵}{۳}\binom{۲}{۲}=۵۰$$

فرض کنیم A پیشامد فرد بودن عدد حاصل باشد. در این صورت رقم سمت راست اعداد حاصل باید یک باشد و باید ارقام ۰، ۱، ۲، ۲ و ۲ در ۵ مکان باقی‌مانده قرار بگیرند که تعداد اعضای A برابر است با:

$$\underbrace{\square\square\square\square\square}_{\text{رقم ۰ در یکی از این چهار مکان قرار می‌گیرد.}}\ \boxed{۱}$$

رقم ۱

$$n(A)=\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۳}\binom{۱}{۱}=۱۶ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۶}{۵۰}=\frac{۸}{۲۵}$$

رقم ۰ در سمت چپ قرار نمی‌گیرد.

مثال ۷۸: حروف a، b، c، d و e را کنار هم می‌نویسیم. احتمال آن‌که کلمه‌ی حاصل به d ختم شده و حرف a در وسط آن قرار گیرد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳۰}$ ۲) $\frac{۱}{۲۰}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ: S: تمام جایگشت‌های ۵ تایی با ۵ حرف متمایز $\Rightarrow n(S) = ۵! = ۱۲۰$

A: تمام جایگشت‌هایی که حرف وسط a و حرف آخر d باشد. $\Rightarrow n(A) = \underline{۳} \times \underline{۲} \times \underset{a}{\underline{۱}} \times \underline{۱} \times \underset{d}{\underline{۱}} = ۶$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۱۲۰} = \frac{۱}{۲۰}$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

دسته‌ی پنجم: احتمال در جایگشت‌ها

مثال ۷۹: ۳ کتاب ریاضی و ۴ کتاب فیزیک (کتاب‌ها همگی متمایزند.) را به تصادف در یک ردیف قرار می‌دهیم. مطلوب است احتمال آن‌که کتاب‌های ریاضی همگی در سمت چپ قرار بگیرند؟

پاسخ: فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی تمام حالات قرار گرفتن ۷ کتاب متمایز در یک ردیف است که تعداد اعضای آن برابر است با:

$n(S) = ۷!$

فرض کنیم A پیشامد قرار گرفتن کتاب‌های ریاضی در کنار هم و کتاب‌های فیزیک در کنار هم باشند به‌طوری که کتاب‌های ریاضی همگی در سمت چپ قرار بگیرند.

$\boxed{\text{۳ کتاب ریاضی}}\boxed{\text{۴ کتاب فیزیک}} \Rightarrow n(A) = ۳! \times ۴! \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳! \times ۴!}{۷!} = \frac{۱}{۳۵}$

مثال ۸۰: ۶ نفر که دو نفر آن‌ها برادر یک‌دیگرند به تصادف در یک ردیف می‌ایستند، چه‌قدر احتمال دارد: (مثال ۵ کتاب درسی - صفحه‌ی ۱۶)

آ) دو برادر کنار هم قرار گرفته باشند. ب) دو برادر در اول و آخر صف واقع شده باشند.

پ) دقیقاً یک نفر بین دو برادر قرار گرفته باشد.

پاسخ: فضای نمونه‌ای عبارت است از کل حالت‌هایی که ۶ نفر می‌توانند در یک ردیف، کنار هم قرار بگیرند که این تعداد حالت برابر است با:

$n(S) = ۶! = ۷۲۰$

آ) فرض کنیم A پیشامد کنار هم قرار گرفتن دو برادر باشد. ابتدا دو برادر را کنار هم قرار می‌دهیم و ۱ نفر فرض می‌کنیم و با ۴ نفر دیگر ۵ نفر می‌شوند که به !۵ طریق کنار هم قرار می‌گیرند و خود برادرها نیز به !۲ طریق می‌توانند در کنار هم با هم جابه‌جا شوند، پس:

$$n(A) = ۵! \times ۲! \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲! \times ۵!}{۶!} = \frac{۱}{۳}$$

ب) ۶ جایگاه به صورت زیر در نظر می‌گیریم. در جایگاه اول از سمت چپ هر یک از دو برادر می‌توانند قرار بگیرند و جایگاه ششم برادر دیگر و ۴ جایگاه بین آن‌ها توسط ۴ نفر دیگر به !۴ طریق ممکن می‌تواند تغییر کند، لذا اگر B پیشامد مطلوب باشد آن‌گاه:

$$\overset{۲}{\square}\underbrace{\square\square\square\square}_{۴!}\overset{۱}{\square} \Rightarrow n(B) = ۲ \times ۴! \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۲ \times ۴!}{۶!} = \frac{۱}{۱۵}$$

پ) فرض کنیم C پیشامد مطلوب باشد. ابتدا یک نفر از ۴ نفر دیگر را به تصادف انتخاب می‌کنیم و بین دو برادر قرار می‌دهیم و این ۳ نفر را یک نفر فرض می‌کنیم و با ۳ نفر دیگر ۴ نفر می‌شوند که به !۴ طریق کنار هم قرار می‌گیرند و خود برادرها نیز به !۲ طریق می‌توانند جابه‌جا شوند، لذا:

$$n(C) = \binom{۴}{۱} \times ۴! \times ۲! = ۴ \times ۴! \times ۲! \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{۴ \times ۴! \times ۲!}{۶!} = \frac{۴}{۱۵}$$

مثال ۸۱: از بین ۵ مرد و ۴ زن، ۳ نفر را به ترتیب انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که فقط نفر اول و آخر از یک جنس باشند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۷}{۱۸}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۴}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۸}$

پاسخ: نفر اول به ۹ حالت، نفر دوم به ۸ حالت و نفر سوم را می‌توان به ۷ طریق به تصادف انتخاب کرد، بنابراین تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

$n(S) = ۹ \times ۸ \times ۷$

A : (مرد، زن، مرد) یا (زن، مرد، زن) $\Rightarrow n(A) = ۵ \times ۴ \times ۴ + ۴ \times ۵ \times ۳ = ۵ \times ۴ \times ۷$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۵ \times ۴ \times ۷}{۹ \times ۸ \times ۷} = \frac{۵}{۱۸}$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

پرسش‌های جلسه دوم

۱۱ خانواده‌ای دو فرزند دارد. احتمال آن‌که خانواده حداقل یک فرزند پسر داشته باشد، چه‌قدر است؟

۱۲ یک تاس سالم را دو بار پرتاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که:
آ) هر دو عدد رو شده فرد باشند. ب) حداقل یکی از اعداد رو شده ۵ باشد.
پ) عدد رو شده در پرتاب اول بزرگ‌تر از عدد رو شده در پرتاب دوم باشد.

۱۳ تاسی را ۳ بار می‌اندازیم. مطلوب است احتمال آن‌که مجموع سه عدد رو شده کوچک‌تر از ۵ باشد. (نهایی- دی ۹۰)

۱۴ از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی آبی است، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم، مطلوب است محاسبه‌ی احتمال آن‌که:
آ) هر سه مهره هم‌رنگ باشند. ب) دو مهره آبی و یک مهره قرمز باشد. (نهایی- شهریور ۹۲)

۱۵ در ظرفی ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه قرار دارد. اگر ۳ مهره از این ظرف انتخاب کنیم، چه‌قدر احتمال دارد فقط یک مهره سیاه باشد؟

۱۶ در جعبه‌ای ۶ لامپ سالم و ۴ لامپ معیوب موجود است. سه لامپ به تصادف و هم‌زمان خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که لامپ‌ها از یک نوع باشند را بیابید. (نهایی- شهریور ۹۰)

۱۷ از جعبه‌ای که شامل ۴ مهره‌ی سفید، ۳ مهره‌ی سبز و ۲ مهره‌ی سیاه می‌باشد، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که فقط دو مهره سفید باشد؟ (نهایی- خرداد ۹۱)

۱۸ از کیسه‌ای که شامل ۳ مهره‌ی قرمز و ۴ مهره‌ی سبز می‌باشد، ۲ مهره به تصادف خارج می‌کنیم، مطلوب است احتمال آن‌که هر دو مهره هم‌رنگ باشد؟ (نهایی- شهریور ۹۱)

۱۹ در جعبه‌ی A، ۳ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه و در جعبه‌ی B، ۲ مهره‌ی سفید و ۱ مهره‌ی سیاه موجود است. از هر جعبه یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال آن‌که دو مهره هم‌رنگ نباشند را به‌دست آورید.

۲۰ یک عدد سه رقمی با ارقام ۰، ۱، ۲، ۴ و ۶ و بدون تکرار و به تصادف به‌وجود می‌آید. احتمال آن‌که عدد حاصل فرد باشد، چه‌قدر است؟

۲۱ می‌خواهیم از بین ۵ مرد و ۳ زن، یک کمیته‌ی ۳ نفری انتخاب کنیم. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال آن‌که: (نهایی- خرداد ۹۲)
آ) حداکثر یک مرد انتخاب شود. ب) هر سه مرد باشند.

پاسخ پرسش‌های جلسه‌دوم

۱۱ فضای نمونه‌ای خانواده‌ای با دو فرزند به صورت $S=\{$(پ ، پ) , (د ، پ) , (پ ، د) , (د ، د)$\}$ است. S دارای ۴ عضو است. ($n(S)=۴$) از طرفی اگر A پیشامد مطلوب باشد، آن‌گاه: $A \Rightarrow A=\{$(پ ، پ) , (پ ، د) , (د ، پ)$\}$: این خانواده حداقل یک فرزند پسر داشته باشد.

پیشامد A، ۳ عضو دارد. ($n(A)=۳$). بنابراین: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۴}$

۱۲ فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی (یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم) به صورت $S=\{(x,y)\,|\,x,y\in\{۱,۲,\ldots,۶\}\}$ است که $۶\times۶=۳۶$ عضو دارد.

آ) هر دو عدد رو شده فرد باشند: $B \Rightarrow B=\{(x,y)\,|\,x,y\in\{۱,۳,۵\}\}\Rightarrow n(B)=\underbrace{۳}_{\text{تعداد حالات عدد پرتاب اول}}\times\underbrace{۳}_{\text{تعداد حالات عدد پرتاب دوم}}=۹$

$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$

ب) حداقل یکی از اعداد رو شده ۵ باشد: $C \Rightarrow C=\{(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵),(۴,۵),(۵,۵),(۶,۵),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۶)\}$

$\Rightarrow n(C)=۱۱\Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۱۱}{۳۶}$

پ) **روش اول:** D : عدد رو شده در پرتاب اول از عدد رو شده در پرتاب دوم بزرگ‌تر باشد.

$D=\{(۲,۱),(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۵,۱),\ldots,(۵,۴),(۶,۱),\ldots,(۶,۵)\}$

$\Rightarrow n(D)=۱۵\Rightarrow P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$

روش دوم: از بین ۳۶ حالت فضای نمونه‌ای، در ۶ حالت اعداد رو شده در دو پرتاب با هم برابرند و در ۳۰ حالت باقی‌مانده در نصف حالات عدد تاس پرتاب اول بزرگ‌تر از عدد تاس پرتاب دوم است، لذا: $P(D)=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$

۱۳

فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی $n(S)=6^3=216$ عضو دارد. فرض کنیم A پیشامد آن باشد که مجموع سه عدد رو شده کوچک‌تر از ۵ باشد، در این صورت:

$$A=\{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\} \Rightarrow n(A)=4 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{216}=\frac{1}{54}$$

۱۴

فضای نمونه‌ای تمام حالات انتخاب ۳ مهره از ۹ مهره‌ی جعبه می‌باشد که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S)=\binom{9}{3}=\frac{9\times8\times7}{3!}=84$$

آ) هر سه مهره آبی یا هر سه مهره قرمز $\Leftarrow$ هر سه مهره هم‌رنگ باشد: A

$$\Rightarrow n(A)=\binom{5}{3}+\binom{4}{3}=10+4=14 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{14}{84}=\frac{1}{6}$$

ب) دو مهره آبی و یک مهره قرمز باشد: $B \Rightarrow n(B)=\binom{4}{2}\binom{5}{1}=6\times5=30 \Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{30}{84}=\frac{5}{14}$

۱۵

فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی تمام حالات انتخاب ۳ مهره از ۷ مهره‌ی ظرف است و تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S)=\binom{7}{3}=\frac{7\times6\times5}{3!}=35$$

فرض کنیم A پیشامدی باشد که در آن یک مهره سیاه و دو مهره‌ی دیگر سفید باشد، آن‌گاه:

$$n(A)=\binom{3}{1}\binom{4}{2}=18 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{18}{35}$$

۱۶

فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی تمام حالات ممکن در انتخاب ۳ لامپ از ۱۰ لامپ موجود است که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S)=\binom{10}{3}=\frac{10\times9\times8}{3!}=120$$

هر سه لامپ از یک نوع باشند: $A \Rightarrow n(A)=\underset{\text{هر ۳ لامپ سالم باشند.}}{\binom{6}{3}}+\overset{\text{هر ۳ لامپ معیوب باشند.}}{\binom{4}{3}}=20+4=24 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

۱۷

فضای نمونه‌ای تمام حالات انتخاب ۳ مهره از ۹ مهره‌ی جعبه می‌باشد که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S)=\binom{9}{3}=\frac{9\times8\times7}{3!}=84$$

۲ مهره سفید و یک مهره غیر سفید باشد: $A \Rightarrow n(A)=\binom{4}{2}\binom{5}{1}=30 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{30}{84}=\frac{5}{14}$

۱۸

فضای نمونه‌ای تمام حالات انتخاب ۲ مهره از ۷ مهره‌ی کیسه می‌باشد که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S)=\binom{7}{2}=\frac{7\times6}{2}=21$$

فرض کنیم A پیشامد هم‌رنگ بودن دو مهره باشد، در این صورت باید هر دو مهره قرمز یا هر دو مهره سبز باشند و داریم:

$$n(A)=\binom{3}{2}+\binom{4}{2}=3+6=9 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$$

۱۹

فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی تمام حالات خارج کردن یک مهره از ۷ مهره‌ی جعبه‌ی A و یک مهره از ۳ مهره‌ی جعبه‌ی B است که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S)=\binom{7}{1}\binom{3}{1}=7\times3=21$$

فرض کنیم C پیشامد هم‌رنگ نبودن دو مهره باشد، در این صورت:

(مهره‌ی جعبه‌ی B سفید باشد و مهره‌ی جعبه‌ی A سیاه باشد.) یا (مهره‌ی جعبه B سیاه باشد و مهره‌ی جعبه‌ی A سفید باشد.): C

$$\Rightarrow n(C)=\binom{3}{1}\binom{1}{1}+\binom{4}{1}\binom{2}{1}=3+8=11 \Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{11}{21}$$

۲۰

فضای نمونه‌ای تمام اعداد سه رقمی بدون تکرار ارقام حاصل از ارقام ۰، ۱، ۲، ۴ و ۶ است که تعداد اعضای آن بنابر اصل ضرب برابر است با:

$$n(S)=\underline{4}\times\underline{4}\times\underline{3}=48$$

فرض کنیم A پیشامد مطلوب باشد، در واقع A شامل تمام اعداد سه رقمی از S باشد که رقم یکان آن ۱ باشد، بنابراین:

$$n(A)=\underline{3}\times\underline{3}\times\underline{1}=9 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{9}{48}=\frac{3}{16}$$

۲۱

فضای نمونه‌ای تمام حالات انتخاب ۳ نفر از بین ۸ نفر است، بنابراین:

$$n(S)=\binom{8}{3}=\frac{8\times7\times6}{3!}=56$$

آ) حداکثر یک مرد انتخاب شود: $A \Rightarrow n(A)=\binom{5}{1}\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=15+1=16 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{16}{56}=\frac{2}{7}$

ب) هر ۳ نفر مرد باشند: $B \Rightarrow n(B)=\binom{5}{3}=10 \Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$

تست‌های جلسه دوم

۳۶. در پرتاب دو تاس احتمال آن‌که مجموع اعداد رو شده عددی اول باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۷}{۱۸}$ ۳) $\frac{۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱۷}{۳۶}$

۳۷. در پرتاب سه تاس احتمال آن‌که اعداد رو شده همگی زوج و مجموع آن‌ها بزرگ‌تر از ۱۰ باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۲۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳۶}$ ۳) $\frac{۳}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱}{۷۲}$

۳۸. یک تاس سالم را سه بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که در پرتاب‌های اول و دوم عدد رو شده زوج باشد و در پرتاب سوم عدد ۵ ظاهر شود چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱}{۲۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳۰}$

۳۹. در پرتاب یک سکه و یک تاس احتمال آن‌که سکه «پشت» و عدد رو شده‌ی تاس عدد بزرگ‌تر از ۴ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۴۰. یک تاس و سه سکه را با هم می‌اندازیم. احتمال آن‌که تعداد دفعاتی که در پرتاب ۳ سکه «رو» ظاهر می‌شود با عدد روی تاس برابر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۳۶}$ ۲) $\frac{۵}{۳۶}$ ۳) $\frac{۵}{۴۸}$ ۴) $\frac{۷}{۴۸}$

۴۱. خانواده‌ای دارای ۵ فرزند است. احتمال آن‌که دقیقاً ۴ فرزند این خانواده دختر باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳۲}$ ۲) $\frac{۷}{۳۲}$ ۳) $\frac{۹}{۳۲}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۴۲. احتمال آن‌که تعداد فرزندان دختر یک خانواده‌ی چهار فرزندی، از دو تا بیش‌تر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۱۶}$

۴۳. محفظه‌ای شامل ۵ موش سفید و ۲ موش سیاه است. ۳ موش از محفظه گریخته‌اند. احتمال آن‌که اولی سفید و سومی سیاه باشند چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲۱}$ ۲) $\frac{۵}{۲۱}$ ۳) $\frac{۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱}{۱۵}$

۴۴. از بین ۵ نفر با گروه خونی A و ۴ نفر با گروه خونی B، سه نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که از هر دو گروه انتخاب شده باشند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲۱}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۴۵. از بین ۵ موش سالم و ۴ موش دیابتی، ۳ موش را به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال آن‌که فقط دو موش سالم باشند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۲) $\frac{۴}{۲۱}$ ۳) $\frac{۱}{۲۱}$ ۴) $\frac{۵}{۴۲}$

۴۶. از بین ۵ دانش‌آموز دختر گروه ریاضی و ۷ دانش‌آموز دختر گروه تجربی، سه نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که هر سه دانش‌آموز از یک گروه باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۹}{۴۴}$

۴۷. از جعبه‌ای که شامل ۴ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه است، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که فقط دو مهره سفید باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۶}{۳۵}$ ۲) $\frac{۱۸}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱}{۲۱}$ ۴) $\frac{۲}{۲۱}$

۴۸. در آزمایشگاهی ۶ خفاش و ۴ موش نگهداری می‌شوند. برای انجام یک آزمایش دو حیوان به تصادف و به ترتیب از بین آن‌ها انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که هر دو حیوان انتخاب شده خفاش باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۴۹. از سه دانش‌آموز رشته‌ی ریاضی و دو دانش‌آموز رشته‌ی تجربی، دو نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد هر دو هم رشته باشند؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۰}$

۵۰. در یک کیسه ۳ مهره‌ی سفید، ۵ مهره‌ی سیاه و ۱ مهره‌ی زرد وجود دارد. ۳ مهره از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که از هر رنگ مهره‌ای خارج شده باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۷}{۲۸}$ ۲) $\frac{۱۵}{۲۸}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲۸}$ ۴) $\frac{۵}{۲۸}$

۵۱. از بین ۳ دانش‌آموز گروه ریاضی، ۴ دانش‌آموز گروه تجربی و ۱ دانش‌آموز گروه انسانی، چهار دانش‌آموز را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که از هر گروه حداقل یک نفر انتخاب شده باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۵۲. در یک کیسه تعدادی مهره‌ی قرمز، سیاه و آبی وجود دارد به‌طوری که تعداد مهره‌های قرمز دو برابر تعداد مهره‌های سیاه و تعداد مهره‌های سیاه ثلث تعداد مهره‌های آبی می‌باشد. اگر یک مهره به تصادف از کیسه انتخاب کنیم، احتمال سیاه بودن این مهره کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

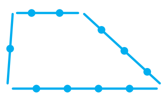
۵۳. شخصی می‌خواهد به ۳ سؤال از ۱۰ سؤال آزمونی به تصادف پاسخ دهد. احتمال آن‌که این شخص به سؤال اول پاسخ داده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۱۰}$ ۲) $\frac{۵}{۱۰}$ ۳) $\frac{۲}{۱۰}$ ۴) $\frac{۳}{۱۰}$

۵۴. در جعبه‌ی A، ۲ لامپ سالم و ۲ لامپ معیوب و در جعبه‌ی B، ۳ لامپ سالم و ۲ لامپ معیوب وجود دارند. از هر جعبه به تصادف دو لامپ خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که هر ۴ لامپ خارج شده سالم باشند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲۰}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۰}$

۵۵. از میان ۱۰ نقطه‌ی شکل زیر، ۴ نقطه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که با این ۴ نقطه بتوان یک چهارضلعی ساخت به‌طوری که روی هر خط فقط یک رأس آن قرار بگیرد چه‌قدر است؟



۱) $\frac{۲}{۳۵}$ ۲) $\frac{۴}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳۰}$ ۴) $\frac{۷}{۳۰}$

۵۶. اگر با ارقام ۱، ۲، ۴ و ۶ یک عدد چهار رقمی بسازیم، چه‌قدر احتمال دارد این عدد زوج باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) ۱

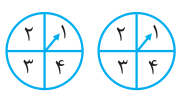
۵۷. با جابه‌جایی ارقام ۱، ۲، ۲، ۳ و ۵ یک عدد ۵ رقمی به‌وجود می‌آید. احتمال آن‌که دو رقم سمت راست زوج باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۵۸. اعداد ۱، ۲، ۳، ... و ۱۹ بر روی ۱۹ کارت یکسان نوشته شده‌اند. به تصادف دو کارت از بین آن‌ها بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال مجموع اعداد این دو کارت زوج است؟

۱) $\frac{۸۰}{۱۷۱}$ ۲) $\frac{۸۱}{۱۷۱}$ ۳) $\frac{۹۰}{۱۷۱}$ ۴) $\frac{۹۱}{۱۷۱}$

۵۹. هریک از دو صفحه‌ی عقربه‌دار به ۴ قطاع برابر با شماره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ تقسیم شده‌اند. عقربه‌ی مربوط به هر صفحه را می‌چرخانیم. احتمال این‌که عقربه‌ها در نواحی هم‌شماره متوقف شوند، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۶۰. ۳ دانش‌آموز سال اول و ۴ دانش‌آموز سال دوم به تصادف روی ۱۰ صندلی که در دو ردیف ۵ تایی قرار دارند می‌نشینند. احتمال آن‌که دانش‌آموزان سال اول در یک ردیف نشسته باشند چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۸}$

۶۱. ۴ کتاب ریاضی و ۳ کتاب فیزیک را به تصادف در یک ردیف قرار می‌دهیم (کتاب‌ها همگی متمایزند). احتمال آن‌که کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۷}$

۶۲. یک تاس سفید و یک تاس سیاه را با هم پرتاب می‌کنیم. اگر a برآمد تاس سفید و b برآمد تاس سیاه باشد، احتمال آن‌که معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + ax + b = ۰$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۳۶}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۶۳. از بین ۵ زن و شوهر، چهار نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که در بین ۴ نفر هیچ زن و شوهری نباشد، کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۱۵}$ ۲) $\frac{۷}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲۱}$ ۴) $\frac{۸}{۲۱}$

۶۴. از میان ۹ نفر دانش‌آموزی که ۵ نفر سال سوم و ۴ نفر سال دوم می‌باشند، ۵ نفر انتخاب شده‌اند. احتمال این‌که ۳ نفر از سال سوم و ۲ نفر از سال دوم باشند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۸}{۲۱}$ ۲) $\frac{۹}{۲۱}$ ۳) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲۱}$

۶۵. دو رأس از یک پنج‌ضلعی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که این دو رأس مجاور باشند، برابر است با:

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۶۶. در جعبه‌ی A، ۲ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه و در جعبه‌ی B، ۴ مهره‌ی سیاه و ۳ مهره‌ی سفید قرار دارد. از هر یک از دو جعبه یک مهره بیرون می‌کشیم، احتمال آن‌که مهره‌ها همرنگ باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۶}{۳۵}$ ۲) $\frac{۱۲}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱۵}{۳۵}$ ۴) $\frac{۱۸}{۳۵}$

۶۷. اعداد ۱، ۲، ... و ۸ بر روی ۸ کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف دو کارت از بین آن‌ها بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مجموع اعداد این دو کارت مضرب ۵ است؟

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۹}{۱۴}$ ۳) $\frac{۳}{۱۴}$ ۴) $\frac{۱۳}{۲۸}$

۶۸. از بین ۵ زوج، ۴ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که هیچ زن و شوهری در بین انتخاب شدگان نباشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۲۱}$ ۲) $\frac{۸}{۲۱}$ ۳) $\frac{۵}{۲۱}$ ۴) $\frac{۱۶}{۲۱}$

۶۹. یک کلمه‌ی چهار حرفی، بدون تکرار حروف و با حروف کلمه‌ی «خوارزمی» به‌وجود می‌آید. احتمال آن‌که در کلمه‌ی حاصل حرف نقطه‌دار نباشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۳۵}$ ۴) $\frac{۱}{۳۵}$

۲ پاسخ تست‌های جلسه‌دوم

۳۶- (۳) فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی ۳۶ عضو دارد.

A: مجموع اعداد رو شده عددی اول باشد.

$$A=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۴),(۱,۶),(۲,۱),(۲,۳),(۲,۵),(۳,۲),(۳,۴),(۴,۱),(۴,۳),(۵,۲),(۵,۶),(۶,۱),(۶,۵)\}$$

$$\Rightarrow n(A)=۱۵\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$$

۳۷- (۱) پیشامد A: هر ۳ عدد زوج و مجموع بزرگ‌تر از ۱۰ باشد.

$$A=\{(۲,۴,۶),(۲,۶,۴),(۲,۶,۶),(۴,۴,۴),(۴,۴,۶),(۴,۶,۴),(۴,۶,۶),(۴,۲,۶),(۴,۶,۲),(۶,۲,۴),(۶,۴,۲),(۶,۴,۴),(۶,۶,۲),(۶,۲,۶),(۶,۶,۶),(۶,۴,۶),(۶,۶,۴)\}$$

$$\Rightarrow n(A)=۱۷\ ,\ n(S)=۶^۳=۲۱۶$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۷}{۲۱۶}$$

۳۸- (۳) $n(S)=۶^۳=۲۱۶$

A: در پرتاب‌های اول و دوم عدد زوج و در پرتاب سوم عدد ۵ ظاهر شود.

$$\Rightarrow n(A)=۳\times۳\times۱=۹\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۲۱۶}=\frac{۱}{۲۴}$$

۳۹- (۳) فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی $۱۲=۶\times۲$ عضو دارد.

A = {(پ، ۵),(پ، ۶)} : سکه «پشت» و عدد تاس بزرگ‌تر از ۴ باشد.

$$\Rightarrow n(A)=۲\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۱۲}=\frac{۱}{۶}$$

۴۰- (۴) $n(S)=۶\times۲^۳=۴۸$

اگر A پیشامد مطلوب باشد، آن‌گاه:

A = { (ر، پ، پ، ۱) , (پ، ر، پ، ۱) , (پ، پ، ر، ۱) , (ر، ر، ر، ۳) , (ر، ر، پ، ۲) , (ر، پ، ر، ۲) , (پ، ر، ر، ۲) }

$$\Rightarrow n(A)=۷\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷}{۴۸}$$

۴۱- (۱) فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی $۳۲=۲^۵$ عضو دارد.

اگر A پیشامد مطلوب باشد، آن‌گاه:

$$n(A)=\binom{۵}{۴}=۵\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵}{۳۲}$$

۴۲- (۲) اگر A پیشامد مطلوب باشد، آن‌گاه:

A: ۳ فرزند از ۴ فرزند یا هر ۴ فرزند دختر باشند.

$$\Rightarrow n(A)=\binom{۴}{۳}+\binom{۴}{۴}=۴+۱=۵\ ,\ n(S)=۲^۴=۱۶$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵}{۱۶}$$

۴۳- (۲) موشی که اول از محفظه گریخته هر یک از ۷ موش محفظه می‌تواند باشد، موش دوم هر یک از ۶ موش باقی‌مانده و موش سوم نیز هر یک از ۵ موش باقی‌مانده در محفظه خواهد بود، بنابراین:

$$n(S)=۷\times۶\times۵$$

A: موش اول سفید و موش سوم سیاه باشد.

A: (اولی سفید و دومی سفید و سومی سیاه) یا (اولی سفید و دومی سیاه و سومی سیاه)

$$\Rightarrow n(A)=۵\times۴\times۲+۵\times۲\times۱=۵\times۵\times۲$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵\times۵\times۲}{۷\times۶\times۵}=\frac{۵}{۲۱}$$

۴۴- (۳) S: تمام حالات انتخاب ۳ نفر از ۹ نفر

$$\Rightarrow n(S)=\binom{۹}{۳}=\frac{۹\times۸\times۷}{۳!}=۸۴$$

C: (۲ نفر با گروه خونی A و ۱ نفر با گروه خونی B) یا (۲ نفر با گروه خونی B و ۱ نفر با گروه خونی A)

$$\Rightarrow n(C)=\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}+\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}=۴۰+۳۰=۷۰$$

$$\Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۷۰}{۸۴}=\frac{۵}{۶}$$

۴۵- (۱) $n(S)=\binom{۹}{۳}=\frac{۹\times۸\times۷}{۳!}=۸۴$

A: دو موش سالم و یک موش دیابتی باشد.

$$\Rightarrow n(A)=\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}=۴۰\Rightarrow P(A)=\frac{۴۰}{۸۴}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

۴۶- (۴) $n(S)=\binom{۱۲}{۳}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۳!}=۲۲۰$

$$n(A)=\binom{۵}{۳}+\binom{۷}{۳}=۱۰+۳۵=۴۵$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴۵}{۲۲۰}=\frac{۹}{۴۴}$$

۴۷- (۲) فضای نمونه‌ای تمام حالات انتخاب ۳ مهره از ۷ مهره‌ی جعبه است، لذا:

$$n(S)=\binom{۷}{۳}=۳۵$$

A: ۲ مهره سفید و یک مهره سیاه باشد.

$$\Rightarrow n(A)=\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}=۱۸\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۸}{۳۵}$$

۴۸- (۳) S: انتخاب ۲ حیوان به تصادف و با ترتیب از بین ۱۰ حیوان

$$\Rightarrow n(S)=۱۰\times۹=۹۰$$

A: هر دو حیوان خفاش باشند. $\Rightarrow n(A)=۶\times۵=۳۰$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۰}{۹۰}=\frac{۱}{۳}$$

۴۹- (۱) S: تمام حالات انتخاب ۲ نفر از ۵ نفر

$$\Rightarrow n(S)=\binom{۵}{۲}=۱۰$$

A: هر دو همرشته باشند. $\Rightarrow n(A)=\binom{۳}{۲}+\binom{۲}{۲}=۴$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۱۰}=\frac{۲}{۵}$$

۵۰- (۴) $n(S)=\binom{۹}{۳}=\frac{۹\times۸\times۷}{۳!}=۸۴$

A: از هر رنگ مهره‌ای انتخاب کنیم.

$$\Rightarrow n(A)=\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}\binom{۱}{۱}=۱۵ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۵}{۸۴}=\frac{۵}{۲۸}$$

۵۱- (۴) S: انتخاب ۴ نفر از ۸ نفر

$$\Rightarrow n(S)=\binom{۸}{۴}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵}{۴!}=۷۰$$

A: (۲ نفر ریاضی، ۱ نفر تجربی و ۱ نفر انسانی) یا (۱ نفر ریاضی، ۲ نفر تجربی و ۱ نفر انسانی)

$$n(A)=\binom{۳}{۲}\binom{۴}{۱}\binom{۱}{۱}+\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۲}\binom{۱}{۱}=۱۲+۱۸=۳۰$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۰}{۷۰}=\frac{۳}{۷}$$

۵۲- (۱) فرض می‌کنیم تعداد مهره‌های سیاه برابر x باشد، بنابراین:

تعداد مهره‌های آبی = ۳ (تعداد مهره‌های سیاه) = $۳x$

تعداد مهره‌های قرمز = ۲ (تعداد مهره‌های سیاه) = $۲x$

پس در کیسه $x+۲x+۳x=۶x$ مهره وجود دارد که x تای آن سیاه است، لذا:

$$P(\text{سیاه بودن مهره})=\frac{x}{۶x}=\frac{۱}{۶}$$

۵۳- (۴) S: تمام حالات انتخاب ۳ سؤال از ۱۰ سؤال

$$\Rightarrow n(S)=\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰\times۹\times۸}{۳!}=۱۲۰$$

A: تمام حالات انتخاب ۲ سؤال از بین ۹ سؤال از شماره‌های ۲ تا ۱۰ (یکی از ۳ سؤال پاسخ داده شده، سؤال شماره یک است.)

$$\Rightarrow n(A)=\binom{۹}{۲}=\frac{۹\times۸}{۲}=۳۶ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۶}{۱۲۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

۵۴- (۲) S: تمام حالات انتخاب ۲ لامپ از ۴ لامپ جعبه‌ی A و ۲ لامپ از ۵ لامپ جعبه‌ی B

$$\Rightarrow n(S)=\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۲}=۶۰$$

C: ۲ لامپ جعبه‌ی A سالم و ۲ لامپ جعبه‌ی B سالم

$$\Rightarrow n(C)=\binom{۲}{۲}\binom{۳}{۲}=۳ \Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۳}{۶۰}=\frac{۱}{۲۰}$$

۵۵- (۲) S: تمام حالات انتخاب ۴ نقطه از ۱۰ نقطه

$$\Rightarrow n(S)=\binom{۱۰}{۴}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷}{۴!}=۲۱۰$$

A: روی هر خط فقط یک نقطه انتخاب می‌کنیم.

$$\Rightarrow n(A)=\binom{۱}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}=۲۴$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۴}{۲۱۰}=\frac{۴}{۳۵}$$

۵۶- (۳) **روش اول:**

S: تمام اعداد چهار رقمی حاصل از ارقام ۱، ۲، ۴ و ۶

$$\Rightarrow n(S)=۴\times۴\times۴\times۴$$

A: تمام اعداد زوج و چهار رقمی از S $\Rightarrow n(A)=۴\times۴\times۴\times۳$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴\times۴\times۴\times۳}{۴\times۴\times۴\times۴}=\frac{۳}{۴}$$

روش دوم: رقم یکان هر عدد چهار رقمی حاصل یکی از ارقام مجموعه‌ی $\{۱,۲,۴,۶\}$ است که در ۳ حالت زوج است. بنابراین احتمال مطلوب برابر $\frac{۳}{۴}$ است.

۵۷- (۱) S: تمام اعداد ۵ رقمی حاصل از ارقام ۱، ۲، ۲، ۳ و ۵

$$\Rightarrow n(S)=\frac{۵!}{۲!}$$

A: دو رقم زوج در سمت راست قرار گیرد.

$$\Rightarrow n(A)=\underbrace{۳\times۲\times۱}_{\text{جابه‌جایی ارقام ۱، ۳ و ۵}}\times\underbrace{۱\times۱}_{\text{دو رقم ۲}}=۶$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{\frac{۵!}{۲}}=\frac{۱۲}{۵!}=\frac{۱}{۱۰}$$

۵۸- (۲) فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی تمام حالات انتخاب ۲ کارت از بین ۱۹ کارت موجود می‌باشد که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S)=\binom{۱۹}{۲}=\frac{۱۹\times۱۸}{۲}=۱۷۱$$

اگر مجموع دو عدد زوج باشد، آن‌گاه باید هر دو عدد زوج یا هر دو عدد فرد باشند، بنابراین اگر زوج بودن مجموع اعداد روی دو کارت را پیشامد A در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$n(A)=\underbrace{\binom{۱۰}{۲}}_{\text{هر دو کارت فرد باشند.}}+\underbrace{\binom{۹}{۲}}_{\text{هر دو کارت زوج باشند.}}=۴۵+۳۶=۸۱$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸۱}{۱۷۱}$$

۵۹- (۲) با چرخاندن هر یک از عقربه‌ها، ۴ حالت اتفاق می‌افتد. فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی به صورت زیر است:

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),\dots,(۴,۴)\} \Rightarrow n(S)=۴\times۴=۱۶$$

فرض کنیم A پیشامد مطلوب باشد، در این صورت:

$$A=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴)\}$$

$$\Rightarrow n(A)=۴ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۱۶}=\frac{۱}{۴}$$

۶۰- (۱) فضای نمونه‌ای تمام حالت‌های نشستن ۷ نفر روی ۱۰ صندلی است که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S)=P(۱۰,۷)=\frac{۱۰!}{۳!}$$

فرض کنیم A پیشامد قرار گرفتن ۳ دانش‌آموز سال اول در یک ردیف باشد، در این صورت:

$$n(A)=\underbrace{۲}_{\substack{\text{در هر یک از ۲ ردیف}\\\text{می‌توانند قرار گیرند.}}}\times\overbrace{P(۵,۳)}^{\text{قرار گرفتن ۳ نفر روی ۵ صندلی}}\times\underbrace{P(۷,۴)}_{\substack{\text{قرار گرفتن ۴ نفر روی ۷}\\\text{صندلی باقی‌مانده}}}$$

$$=\cancel{۲}\times\frac{۵!}{\cancel{۲}!}\times\frac{۷!}{۳!}=\frac{۵!\times۷!}{۳!}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\frac{۵!\times۷!}{۳!}}{\frac{۱۰!}{۳!}}$$

$$=\frac{۵!\times۷!}{۱۰\times۹\times۸\times۷!}=\frac{۱۲۰}{۱۰\times۹\times۸}=\frac{۱}{۶}$$

۶۱- (۴) فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی تمام حالات قرار گرفتن ۷ کتاب (۷ شیء متمایز) در یک ردیف است که تعداد اعضای آن برابر است با: $n(S)=۷!$

فرض کنیم A پیشامد قرار گرفتن کتاب‌های فیزیک در کنار هم باشد. در این صورت ۳ کتاب فیزیک را به عنوان یک کتاب در نظر می‌گیریم و به همراه ۴ کتاب ریاضی دیگر، ۵ کتاب خواهیم داشت.

تعداد اعضای پیشامد A برابر است با:

$$n(A)=\underbrace{۵!}_{\text{تعداد جابه‌جایی ۵ کتاب}}\times\overbrace{۳!}^{\text{تعداد جابه‌جایی ۳ کتاب فیزیک}}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵!\times ۳!}{۷!}=\frac{۵!\times ۶}{۷\times ۶\times ۵!}=\frac{۱}{۷}$$

۶۲- (۱) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی به صورت $S=\{(a,b)\mid a,b\in\{۱,۲,\cdots,۶\}\}$ است. در واقع:

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),\cdots,(۱,۶),\cdots,(۶,۱),\cdots,(۶,۶)\}\Rightarrow n(S)=۳۶$$

شرط آن‌که معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲+ax+b=۰$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد آن است که $\Delta=a^۲-۴b>۰$. بنابراین اگر A پیشامد مطلوب باشد، آن‌گاه: $A=\{(a,b)\mid a^۲-۴b>۰\}$

$$A=\{(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$$

$$\Rightarrow n(A)=۱۷\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۷}{۳۶}$$

۶۳- (۴) فضای نمونه‌ای تمام حالات انتخاب ۴ نفر از بین ۱۰ نفر است که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S)=\binom{۱۰}{۴}=\frac{۱۰\times ۹\times ۸\times ۷}{۴!}=۲۱۰$$

اگر A پیشامد مطلوب باشد، آن‌گاه:

$$n(A)=\underbrace{\binom{۵}{۴}}_{\text{انتخاب ۴ زوج از ۵ زوج}}\times\overbrace{۲\times ۲\times ۲\times ۲}^{\text{از بین هر زوج مرد یا زن را انتخاب می‌کنیم.}}=۵\times ۲^۴=۸۰$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸۰}{۲۱۰}=\frac{۸}{۲۱}$$

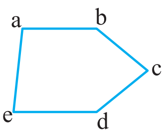
۶۴- (۳)

$$n(S)=\binom{۹}{۵}=\binom{۹}{۴}=\frac{۹\times ۸\times ۷\times ۶}{۴!}=۱۲۶$$

$$n(A)=\binom{۵}{۳}\binom{۴}{۲}=۱۰\times ۶=۶۰\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶۰}{۱۲۶}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

۶۵- (۲) فضای نمونه‌ای S تمام حالات انتخاب دو رأس از ۵ رأس است، پس: $n(S)=\binom{۵}{۲}=۱۰$

A: دو رأس مجاور باشند.



$$\Rightarrow A=\{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,e\},\{e,a\}\}$$

$$\Rightarrow n(A)=۵\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$$

۶۶- (۴)

S: انتخاب یک مهره از جعبه‌ی A و یک مهره از جعبه‌ی B

$$\Rightarrow n(S)=\binom{۵}{۱}\binom{۷}{۱}=۳۵$$

C: هر دو مهره سفید یا هر دو مهره سیاه

$$\Rightarrow n(C)=\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}+\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}=۱۸\Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۱۸}{۳۵}$$

۶۷- (۳) فضای نمونه‌ای این پدیده‌ی تصادفی تمام حالات انتخاب دو کارت از بین ۸ کارت موجود می‌باشد که تعداد حالت‌های آن برابر است با: $n(S)=\binom{۸}{۲}=\frac{۸\times ۷}{۲}=۲۸$

اگر A پیشامدی باشد که در آن مجموع اعداد دو کارت انتخاب شده مضرب ۵ باشد، آن‌گاه:

$$A=\{\{۱,۴\},\{۲,۳\},\{۲,۸\},\{۳,۷\},\{۴,۶\},\{۷,۸\}\}\Rightarrow n(A)=۶$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۲۸}=\frac{۳}{۱۴}$$

۶۸- (۲) فضای نمونه‌ای تمام حالات انتخاب ۴ نفر از بین ۱۰ نفر (۵ زوج) می‌باشد که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S)=\binom{۱۰}{۴}=\frac{۱۰\times ۹\times ۸\times ۷}{۴\times ۳\times ۲\times ۱}=۲۱۰$$

فرض کنیم A پیشامدی باشد که در آن هیچ زن و شوهری در بین ۴ نفر انتخاب شده نباشد. در این صورت برای نفر اول ۱۰ انتخاب، برای نفر دوم ۸ انتخاب (توجه کنیم همسر نفر اولی که انتخاب شده است نیز نمی‌تواند انتخاب شود)، به همین ترتیب برای نفر سوم ۶ انتخاب و برای نفر چهارم ۴ انتخاب خواهیم داشت.

بنابر اصل ضرب تعداد راه‌های انتخاب برابر $۱۰\times ۸\times ۶\times ۴$ خواهد بود و چون برای انتخاب ترتیب قائل شده‌ایم (در صورتی‌که در فضای نمونه‌ای ۴ نفر را با هم انتخاب کرده‌ایم)، باید عدد حاصل را بر $۴!$ (برای برهم زدن ترتیب) تقسیم کنیم. بنابراین:

$$n(A)=\frac{۱۰\times ۸\times ۶\times ۴}{۴!}=۸۰\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸۰}{۲۱۰}=\frac{۸}{۲۱}$$

۶۹- (۳) فضای نمونه‌ای تمام کلمات چهارحرفی و با حروف متمایز کلمه‌ی هفت حرفی «خوارزمی» است که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S)=۷\times ۶\times ۵\times ۴$$

اگر پیشامد A شامل تمام کلمات چهار حرفی بدون نقطه باشد، آن‌گاه A شامل تمام کلمات چهار حرفی با حروف «و، ا، ر، م، ی» است. توجه کنیم حرف «ی» فقط در آخر کلمه بدون نقطه است. بنابراین:

$$n(A)=۴\times ۳\times ۲\times ۲\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴\times ۳\times ۲\times ۲}{۷\times ۶\times ۵\times ۴}=\frac{۲}{۳۵}$$