بسم ا... الرّحمن الرّحیم

ریاضیات عمومی

و علوم پایه مرتبط با آن (جلد دوّم)

ویژه‌ی دانش‌آموزان ممتاز رشته‌ی تجربی

انتشارات خوشخوان

مؤلفان : حسین شفیع زاده ، رسول حاجی‌زاده

www.3gaam.com

فهرست

عنوان | صفحه

www.3gaam.com

www.3gaam.com

فصل هشتم

جلسه‌ی اول

نقاط بحرانی، ماکزیمم و مینیمم نسبی و مطلق

نقطه بحرانی

تابع f با دامنه $[a,b]$ را در نظر بگیرید. نقاطی از بازه باز (a,b) که در آن نقاط مشتق برابر صفر است و یا مشتق وجود ندارد را نقاط بحرانی f می‌نامیم.

نکته‌ی ۱. اگر $[a,b]$ دامنه‌ی f باشد آن‌گاه a و b نقاط بحرانی نمی‌باشند.

نکته‌ی ۲. در حالت کلی نقطه‌ی $c \in D_f$ را نقطه بحرانی f می‌نامیم هرگاه $f'(c) = ۰$ و یا $f'(c)$ موجود نباشد. (به‌جز ابتدا و انتهای بازه‌های بسته)

مثال ۱. نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید.

$۱)\ y = x^{۳} - ۳x + ۵$

$۲)\ y = x^{\frac{۸}{۳}} - x^{\frac{۲}{۳}}$

$۳)\ y = |x^{۳} + ۲x^{۲} + x|$

$۴)\ y = \begin{cases} x^{۲} - x & x \le ۱ \\ x^{۳} - ۴x & x > ۱ \end{cases}$

$۵)\ y = [x]$

حل:

$۱)\ y' = ۳x^{۲} - ۳$

$y' = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$ نقاط بحرانی

$۲)\ y' = \frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}} - \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} = \frac{۸x\sqrt[۳]{x^{۲}}}{۳} - \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}} = \frac{۸x^{۲} - ۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$

www.3gaam.com

در نقاط $x=\pm\frac{1}{2}$ مشتق برابر صفر است و در نقطه $x=0$ مشتق وجود ندارد. پس مجموعه‌ی نقاط بحرانی برابر است با $\left\{0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\}$

$$3)\ y=|x(x+1)^2|=\begin{cases}x(x+1)^2 & x\ge 0\\ -x(x+1)^2 & x<0\end{cases}$$

$$y'=\begin{cases}(x+1)^2+2x(x+1) & x>0\\ -(x+1)^2-2x(x+1) & x<0\end{cases}$$

$$y'=\begin{cases}(x+1)(3x+1) & x>0\\ -(x+1)(3x+1) & x<0\end{cases}$$

در نقاط ۱- و $x=-\frac{1}{3}$ مشتق برابر صفر است. در نقطه $x=0$ چون مشتق چپ و راست برابر نیستند پس مشتق وجود ندارد. بنابراین مجموعه نقاط بحرانی عبارت است از $\left\{0,-\frac{1}{3},-1\right\}$

$$4)\ y'=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ 3x^2-4 & x>1\end{cases}$$

در نقاط $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ و $x=\frac{1}{2}$ مشتق برابر صفر و در نقطه $x=1$ مشتق وجود ندارد. پس این تابع سه نقطه بحرانی دارد.

$$5)\ y'=\begin{cases}0 & x\notin Z\\ \text{وجود ندارد} & x\in Z\end{cases}$$

بنابراین تمام اعداد حقیقی نقاط بحرانی تابع‌اند.

نکته‌ی ۳. در تابع $y=|f(x)|$ نقاط بحرانی عبارتند از ریشه‌های $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ (f مشتق‌پذیر است)

تست ۱. **مجموع طول‌های نقاط بحرانی تابع $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+2}$ کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۴

$$y'=\frac{3x^2-6x}{3\sqrt[3]{(x^3-3x^2+2)^2}}$$

نقاط بحرانی : $3x^2-6x=0\ ,\ x^3-3x^2+2=0$

$$3x(x-2)=0\ ,\ x^3-3x^2+2=0$$

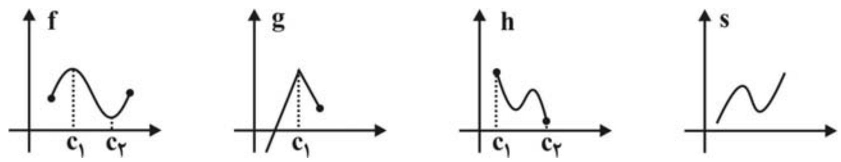
نقاط بحرانی عبارتند از صفر و ۲ و ۱ و $1\pm\sqrt{3}$ مجموع این نقاط برابر ۵ است.

ماکزیمم و مینیمم مطلق

تابع f با دامنه $[a,b]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $c\in[a,b]$ باشد. اگر برای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم $f(x)\le f(c)$ گوئیم f در c ماکزیمم مطلق دارد و $f(c)$ را ماکزیمم مطلق f می‌نامیم. بطور مشابه اگر برای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم $f(x)\ge f(c)$ گوئیم f در c مینیمم مطلق دارد و $f(c)$ را مینیمم مطلق f می‌نامیم.

نکته‌ی ۴. در حالت کلی بیش‌ترین عرض یک تابع را ماکزیمم مطلق آن تابع و کم‌ترین عرض یک تابع را مینیمم مطلق آن تابع می‌نامیم.

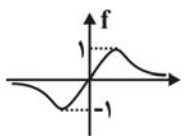
به شکل‌های زیر توجه کنید.



در توابع f و h ماکزیمم مطلق برابر $f(c_۱)$ و $h(c_۱)$ و مینیمم مطلق برابر $f(c_۲)$ و $h(c_۲)$ است. در تابع g ماکزیمم مطلق برابر $g(c_۱)$ است. این تابع مینیمم مطلق ندارد و تابع s نه ماکزیمم مطلق دارد و نه مینیمم مطلق.

نکته‌ی ۵. ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق در صورت وجود منحصر به فردند.

نکته‌ی ۶. اگر m و M به ترتیب مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق تابع پیوسته f باشند آن‌گاه برد f برابر $[m,M]$ است. مانند شکل زیر.



$\Rightarrow$ برد f $= [-۱, ۱]$

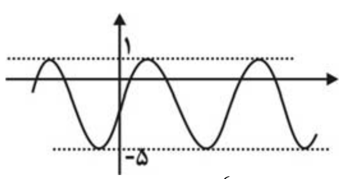
مثال ۲. ماکزیمم و مینیمم مطلق توابع زیر را بیابید.

$۱)\ y = ۳\sin x - ۱$ $\qquad ۲)\ y = |x| - |x-۱|$ $\qquad ۳)\ y = x[x] \quad -۱ \le x \le ۲$

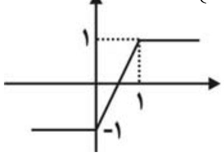
حل:

$-۱ \le \sin x \le ۱ \Rightarrow -۳ \le ۳\sin x \le ۳ \Rightarrow -۵ \le ۳\sin x - ۲ \le ۱ \Rightarrow -۵ \le y \le ۱$

پس مینیمم مطلق برابر ۵- و ماکزیمم مطلق برابر ۱ است.



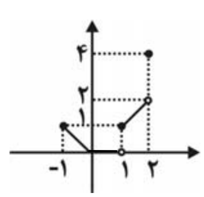
$$۲)\ y = |x| - |x-۱| = \begin{cases} -۱ & x \le ۰ \\ ۲x - ۱ & ۰ < x \le ۱ \\ ۱ & ۱ < x \end{cases}$$



با توجه به نمودار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق به ترتیب برابر ۱ و ۱- است.

۳)

$$\begin{cases} -۱ \le x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = -x \\ ۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = ۰ \\ ۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow y = x \\ x = ۲ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow y = ۴ \end{cases}$$



کم‌ترین مقدار تابع برابر صفر و بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۴ است.

www.3gaam.com