باسمه تعالی

پیش نویس سرفصل های کتاب درسی ریاضی ۳ علوم تجربی پایه دوازدهم به قرار زیر اعلام می گردد.

۱- تابع

۲- مثلثات

۳- مشتق

۴- کاربرد مشتق

۵- احتمال

۶- هندسه

واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی

دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی

ریاضی 3 علوم تجربی

پشتیبانی و نقد و بررسی کتاب ریاضی 3 علوم تجربی

منابع پشتيباني تاليف کتاب رياضي 3 پايه دوازدهم رشته علوم تجربی

ردیف	نام فایل	نوع	موضوع	نویسنده	تاریخ		حجم فایل
1	سرفصل پیشنهادی کتاب ریاضی 3 پایه دوازدهم رشته علوم تجربی	pdf		گروه تالیف	96/09/13	دانلود	
2	ریز مواد پیشنهادی کتاب ریاضی 3 پایه دوازدهم رشته علوم تجربی	pdf		گروه تالیف	96/10/30	دانلود	
3	پیش نویس غیر قابل استناد درس اول فصل اول ریاضی 3 (پایه دوازدهم رشته علوم تجربی)	pdf		گروه تالیف	97/1/29	دانلود	
4	پیش نویس غیر قابل استناد درس دوم فصل اول ریاضی 3 (پایه دوازدهم رشته علوم تجربی)	pdf		گروه تالیف	97/1/29	دانلود	
5	پیش نویس غیر قابل استناد درس سوم فصل اول ریاضی 3 (پایه دوازدهم رشته علوم تجربی)	pdf		گروه تالیف	97/1/29	دانلود	
6	پیش نویس غیر قابل استناد فصل ششم:احتمال-درس اول: قانون احتمال کل ریاضی 3 (پایه دوازدهم رشته علوم تجربی)	pdf		گروه تالیف	97/02/02	دانلود	
7	پیش نویس غیر قابل استناد فصل پنجم(هندسه)- دروس 1 و 2 ریاضی 3 (پایه دوازدهم رشته علوم تجربی)	pdf		گروه تالیف	97/02/08	دانلود	
8	پیش نویس غیر قابل استناد فصل دوم(مثلثات)- درس 1	pdf		گروه تالیف	97/02/11	دانلود	
9	پیش نویس غیر قابل استناد فصل دوم(مثلثات)- درس 2	pdf		گروه تالیف	97/02/11	دانلود	
10	پیش نویس غیر قابل استناد فصل چهارم(کاربرد مشتق)- درس 1	pdf		گروه تالیف	97/03/01	دانلود	
11	پیش نویس غیر قابل استناد فصل سوم (حد و مشتق)- درس 1	pdf		گروه تالیف	97/03/09	دانلود	
12	پیش نویس غیر قابل استناد فصل چهارم- درس 2	pdf		گروه تالیف	97/03/13	دانلود	

باسمه تعالی

پیش نویس سرفصل های کتاب درسی ریاضی ۳ رشته تجربی پایه دوازدهم به قرار زیر اعلام می گردد.

فصل اول: تابع (ترکیب توابع، چندجمله ای ها، تابع صعودی و نزولی، وارون برخی توابع و تحدید دامنه)

فصل دوم: مثلثات (تناوب، تابع تانژانت، نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا، معادلات مثلثاتی)

فصل سوم: مشتق (فرآیندهای مشتق، تابع مشتق، برخی قضایای مشتق)

فصل چهارم: کاربرد مشتق (حدهای نامتناهی، آهنگ تغییرات و بهینه سازی، رسم نمودار توابع)

فصل پنجم: احتمال (احتمال کل، آمار)

فصل ششم: هندسه (مقاطع مخروطی، تفکر تجسمی)

درس اوّل

ترکیب توابع

فعالیت

یک مادهٔ غذایی را با دمای ۲ درجهٔ سانتی‌گراد از یخچال بیرون می‌آوریم. تعداد باکتری‌هایی را که در آن با افزایش دما رشد می‌کنند با $N(d)$ نمایش می‌دهیم و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$N(d)=۲۰d^{۲}-۸۰d+۵۰۰, \quad ۲\leq d\leq ۱۴$$

که در این رابطه، d دمای مادهٔ غذایی پس از خروج از یخچال برحسب درجه است.

الف) هر کدام از مقادیر زیر را به‌دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$$N(۱۰)=۲۰(۱۰)^{۲}-۸۰(۱۰)+۵۰۰=۱۷۰۰$$

یعنی تعداد باکتری‌های موجود در یک غذای یخچالی با دمای ۱۰ درجه، ۱۷۰۰ تا است.

$N(۲)=$ ....

....

$N(۳)=$ ....

....

همچنین هنگامی که غذا از یخچال بیرون آورده می‌شود، دمای آن با گذر زمان افزایش می‌یابد و از تابع $d(t)$ با ضابطه زیر به‌دست می‌آید :

$$d(t)=۴t+۲ \quad ; \quad ۰\leq t\leq ۳$$

ب) هر کدام از مقادیر زیر را به‌دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$$d(۲)=۱۰$$

دمای غذایی که ۲ ساعت قبل از یخچال بیرون آورده شده است برابر ۱۰ درجه است.

$d(۱)=$ ....

$d(۳)=$ ....

به‌طور کلی می‌توان گفت در تابع d، با داشتن زمان، می‌توان دمای غذا را به‌دست آورد و در تابع N، با داشتن دمای غذا، می‌توان تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد.

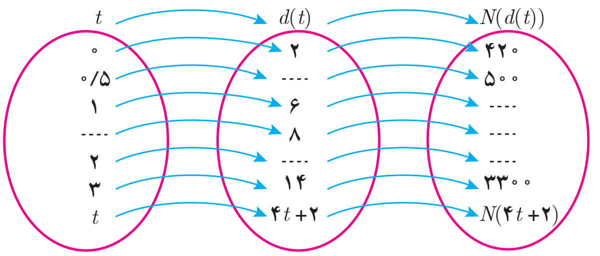
زمان $\xrightarrow{d}$ دما $\xrightarrow{N}$ تعداد باکتری‌ها

از الف و ب می‌توان نتیجه گرفت : تعداد باکتری‌های موجود در یک مادهٔ غذایی که دو ساعت قبل از یخچال بیرون آورده شده است برابر ۱۷۰۰ است.

پ) جدول زیر را کامل کنید :

t	$d(t)=۴t+۲$	$N(d(t))=N(۴t+۲)$
۰	$d(۰)=۲$	$N(d(۰))=N(۲)=۴۲۰$
۰/۵	$d(۰/۵)=\cdots$	$N(d(۰/۵))=N(\cdots)=۵۰۰$
۱	$d(۱)=۶$	$N(d(۱))=N(۶)=\cdots$
...	$d(\cdots)=۸$	$N(d(\cdots))=N(۸)=\cdots$
۲	$d(۲)=\cdots$	$N(d(۲))=N(\cdots)=\cdots$
۳	$d(۳)=۱۴$	$N(d(۳))=N(۱۴)=۳۳۰۰$

ت) به کمک جدول قسمت «پ»، جاهای خالی را تکمیل کنید.



همان‌طور که دیدیم می‌توان با داشتن زمان، دمای غذا را به‌دست آورد و با داشتن دما، تعداد باکتری‌ها را می‌توان مشخص کرد. آیا به نظر شما می‌توان با داشتن زمان و بدون داشتن دما، تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد؟

به بیان دیگر تابعی ساخت که N را برحسب t مشخص کند.

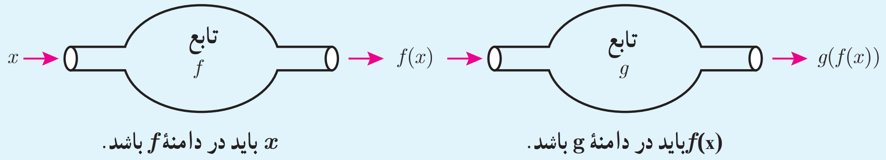
برای به‌دست آوردن این تابع به‌صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$N(d(t))=N(۴t+۲)=۲۰(۴t+۲)^۲-۸۰(۴t+۲)+۵۰۰=$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots =۳۲۰t^۲+۴۲۰ \qquad ۰\leq t\leq ۳$$

$N(d(t))$ تعداد باکتری‌هایی در غذای یخچالی را نشان می‌دهد که به میزان t ساعت از یخچال بیرون مانده است.

«مراحل ساخت تابع gof»



مرحلهٔ اول : x ورودی و $f(x)$ خروجی است. مرحلهٔ دوم : $f(x)$ ورودی و $g(f(x))$ خروجی است.

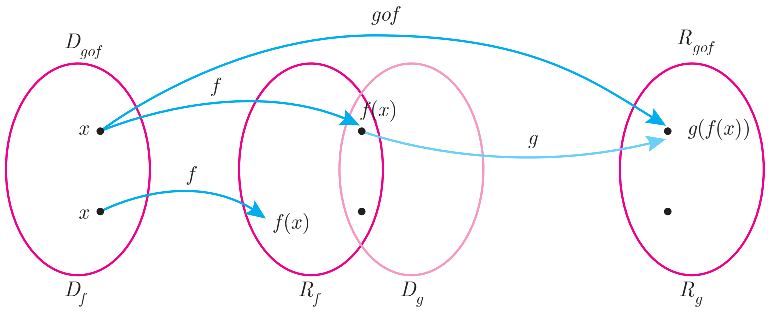
اگر f و g دو تابع باشند به‌طوری که اشتراک برد f و دامنهٔ g غیر تهی باشد، تابع $g(f(x))$ را به‌صورت $(gof)(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را ترکیب g با f می‌نامیم.

دامنهٔ تابع مرکب:

دامنهٔ تابع مرکب gof مجموعه xهایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند :

۱ــ x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲ــ $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.

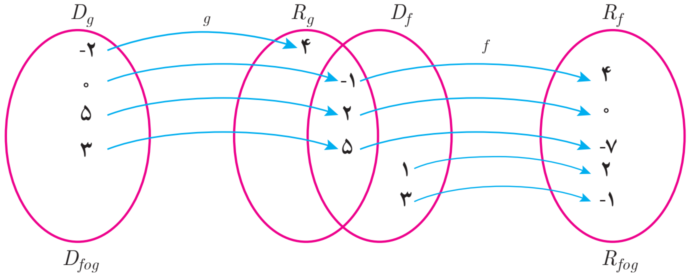


بنابراین دامنهٔ تابع gof را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in Dg\}$$

مثال : اگر $f=\{(۱,۲),(۳,-۱),(۲,۰)(-۱,۴),(۵,-۷)\}$ و $g=\{(۰,-۱),(۵,۲),(۳,۵)(-۲,۴)\}$ ، تابع fog را در صورت امکان بنویسید.

$$\left.\begin{array}{l}(fog)(۰)=g(f(۰))=f(-۱)=۴\\(fog)(۵)=f(g(۵))=f(۲)=۰\\(fog)(۳)=f(g(۳))=f(۵)=-۷\\(fog)(-۲)=f(g(-۲))=f(۴)\ \text{تعریف نشده}\end{array}\right\}\rightarrow fog=\{(۰,۴),(۵,۰),(۳,-۷)\}$$



کار در کلاس

با توجه به جدول‌های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به‌دست آورید.

x	f(x)
−۳	−۷
−۲	−۵
−۱	−۳
۰	−۱
۱	۳
۲	۵
۳	۵

x	g(x)
−۳	۸
−۲	۳
−۱	۰
۰	−۱
۱	۰
۲	۳
۳	۸

الف) $(fog)(۱)=\cdots$

ب) $(fog)(-۱)=\cdots$

پ) $(gof)(۰)=\cdots$

ج) $(gog)(-۲)=\cdots$

ت) $(gof)(۲)=\cdots$

ث) $(fof)(۱)=\cdots$

مثال : اگر $f(x)=x-۲$ و $g(x)=x^۲-۱$ ، دامنه و ضابطهٔ تابع gof را به‌دست آورید.

$$(gof)(x)=g(f(x))=f^۲(x)-۱=(x-۲)^۲-۱$$

$$D_f=\mathbb{R}\,,D_g=\mathbb{R}\,,D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}$$

$$D_{gof}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,(x-۲)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$, $g(x)=۲x^۲-۱$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید.

$$(gof)(x)=g(f(x))=۲f^۲(x)-۱=۲(\sqrt{x-۱})^۲-۱=۲(x-۱)-۱=۲x-۳$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)-۱}=\sqrt{۲x^۲-۱-۱}=\sqrt{۲x^۲-۲}$$

$$D_f=[۱,+\infty),D_g=\mathbb{R}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g,\}=\{x\in[۱,+\infty)|\ \sqrt{x-۱}\in\mathbb{R}\}=[۱,+\infty)$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۲x^۲-۱\in[۱,+\infty)\}=$$

$$\{\mathbb{R}\,|\,۲x^۲-۱\geq ۱\}=\{\mathbb{R}\,|\,x^۲\geq ۱\}=(-\infty,-۱)\cup[۱,+\infty)$$

کار در کلاس

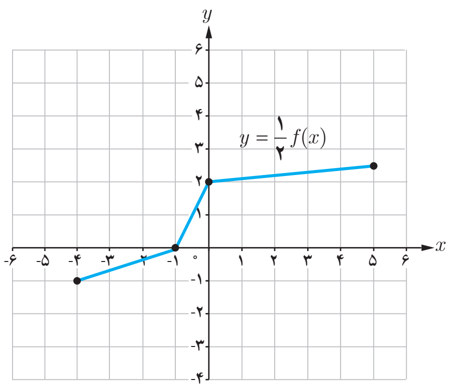
اگر $f(x)=\dfrac{۲}{x-۱},g(x)=\dfrac{۳}{x}$ ، دامنه و ضابطهٔ fog را به‌دست آورید.

«انتقال توابع»

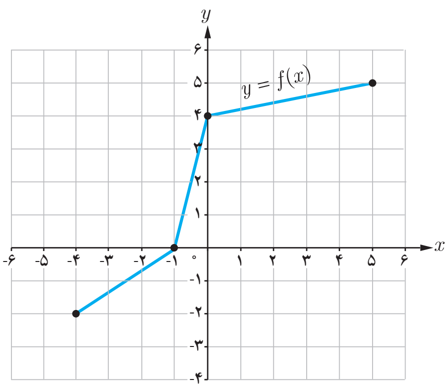
رسم نمودار $kf(x)$:

یادآوری : همان‌طور که در پایهٔ یازدهم دیدید اگر k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ را k برابر کنیم.

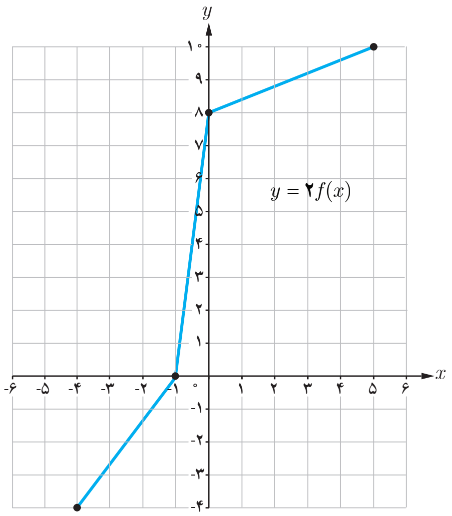
مثال : نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل زیر داده شده است. نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}f(x)$ و $y=-f(x)$ و $y=۲f(x)$ را رسم کنید.



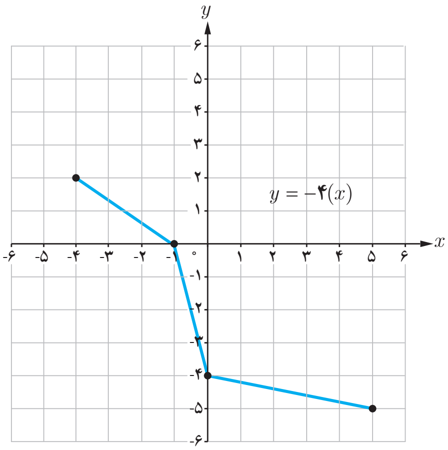
x	$\frac{۱}{۲}f(x)$
−۴	−۱
−۱	۰
۰	۲
۵	$\frac{۵}{۲}$



x	f(x)
−۴	−۲
−۱	۰
۰	۴
۵	۵



x	۲f(x)
−۴	−۴
−۱	۰
۰	۸
۵	۱۰



x	−f(x)
−۴	۲
−۱	۰
۰	−۴
۵	−۵

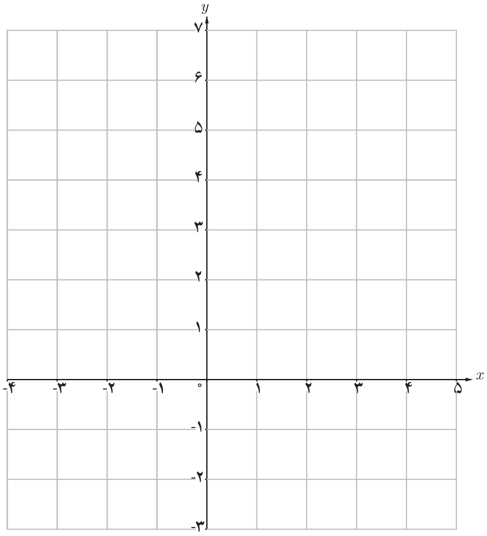
با توجه به آنچه که گفته شد نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور xهاست.

همان‌طور که در این مثال دیدید برای رسم نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(x)$ عرض هر نقطهٔ نمودار $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{۲}$ و برای رسم نمودار $y=-f(x)$ عرض هر نقطه را در ۱− و برای رسم نمودار $y=۲f(x)$ عرض هر نقطه را در ۲ ضرب می‌کنیم. یعنی دامنه تغییر نمی‌کند و دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ همان دامنهٔ $y=f(x)$ است، اما برد آنها لزوماً یکی نیست.

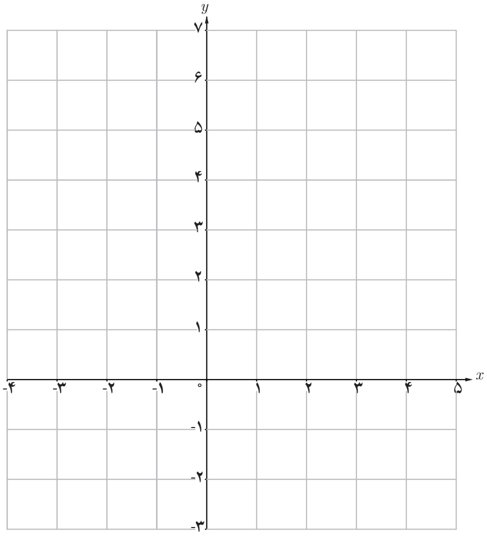
همچنین محل تلاقی نمودار توابع f و kf با محور xها یکی هستند. یعنی ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ و $kf(x)=۰$ یکی است.

کار در کلاس

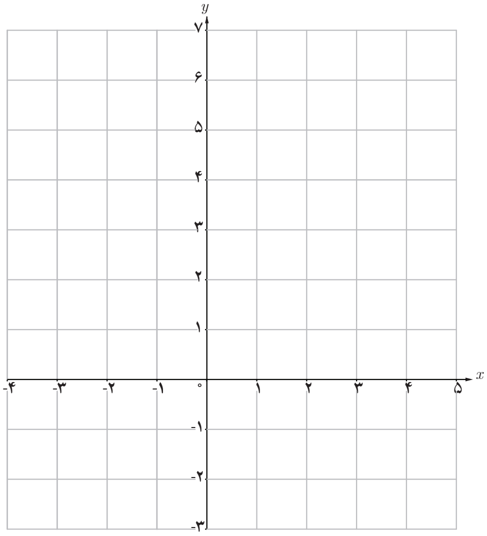
نمودار تابع $f(x)=|x-۳|$ را در بازهٔ $[-۳,۴]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x)=-|x-۳|$ و $h(x)=۳|x-۳|$ و $k(x)=-\frac{۱}{۴}|x-۳|$ را رسم کنید.



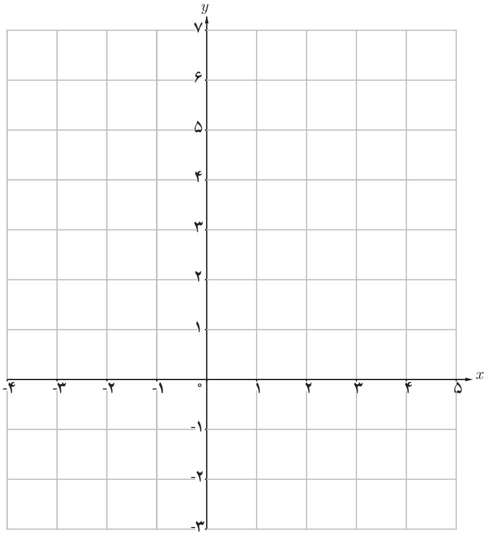
g



f



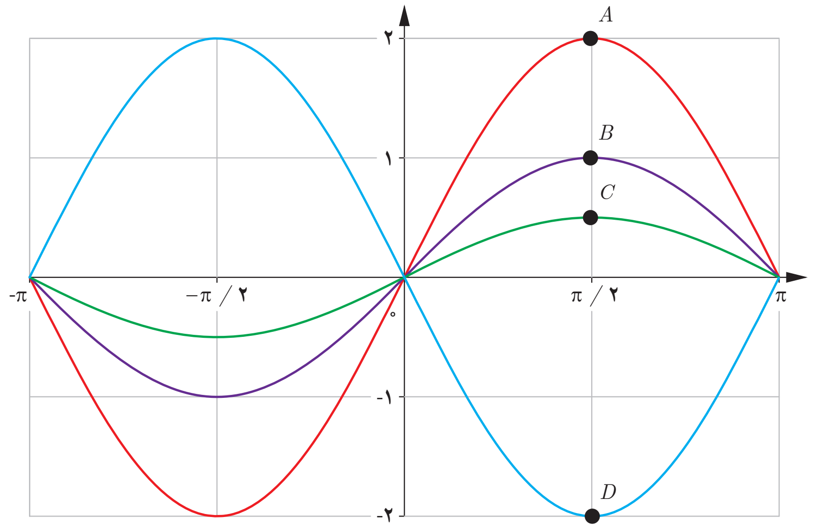
k



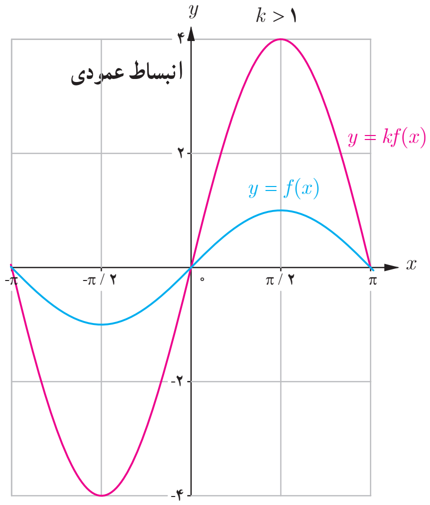
h

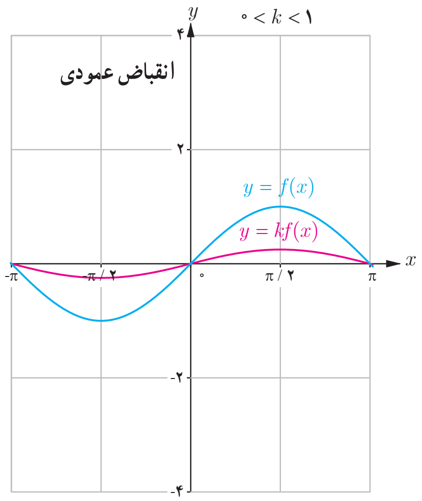
کار در کلاس

در شکل زیر نمودار توابع با ضابطه‌های $y=\sin x$ و $y=۲\sin x$ و $y=-۲\sin x$ و $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ رسم شده است. مشخص کنید هر کدام از ضابطه‌ها مربوط به کدام نمودار است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کنید.



نمودار تابع $y=kf(x)$ به کمک نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید : اگر $k>۱$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط عمودی یافته است. اگر $۰<k<۱$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k جمع می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض عمودی یافته است. اگر $k<۰$ ابتدا نمودار f نسبت به محور xها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.





رسم نمودار $f(kx)$:

مثال : تابع $f(x)=x+۳$ را با دامنه $[-۴,۰]$ در نظر می‌گیریم و چگونگی رسم نمودار توابع $f=(۲x)$ و $f(\frac{x}{۲})$ را بررسی می‌کنیم.
ضابطهٔ تابع $f=(۲x)$ به صورت $f(۲x)=۲x+۳$ است و دامنهٔ آن به شکل زیر مشخص می‌شود :

$-۴\leq۲x\leq۰$

$-۲\leq x\leq۰ \quad \rightarrow \quad$ دامنهٔ $f(۲x)$: $D=[-۲,۰]$

همچنین ضابطهٔ تابع $f(\frac{x}{۲})$ به صورت $f(\frac{x}{۲})=\frac{x}{۲}+۳$ است و دامنهٔ آن به شکل زیر مشخص می‌شود.

$-۴\leq\frac{x}{۲}\leq۰$

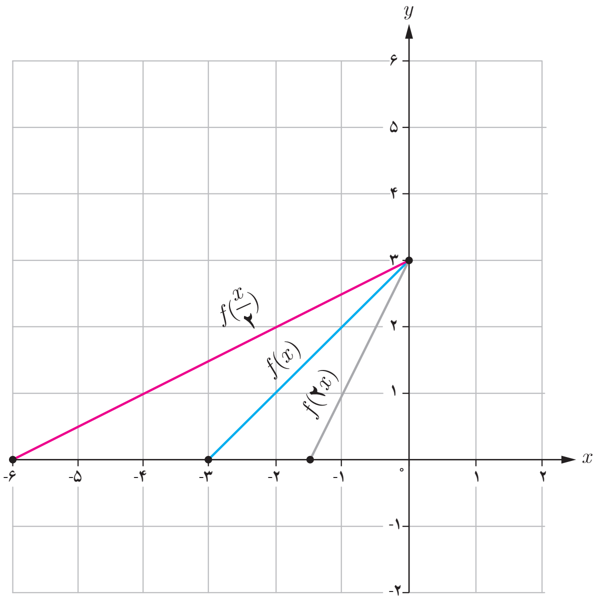
$-۸\leq x\leq۰ \quad \rightarrow \quad$ دامنهٔ $f(\frac{x}{۲})$: $D=[-۸,۰]$

برخی از نقاط نمودار این سه تابع در جدول‌های زیر نوشته شده است :

x	-۴	-۳	-۲	-۱	۰
$f(x)=x+۳$	-۱	۰	۱	۲	۳

x	-۲	$-۱/۵$	-۱	$-۰/۵$	۰
$f(۲x)=۲x+۳$	-۱	۰	۱	۲	۳

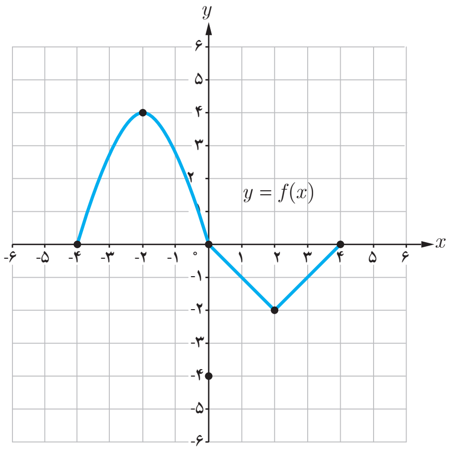
x	-۸	-۶	-۴	-۲	۰
$f(\frac{x}{۲})=\frac{x}{۲}+۳$	-۱	۰	۱	۲	۳



فعالیت

نمودار $f(x)$ به صورت زیر داده شده است :

دامنهٔ این تابع $[-۴,۴]$ است. می‌خواهیم با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار توابع $y=f(۲x)$ و $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنیم.



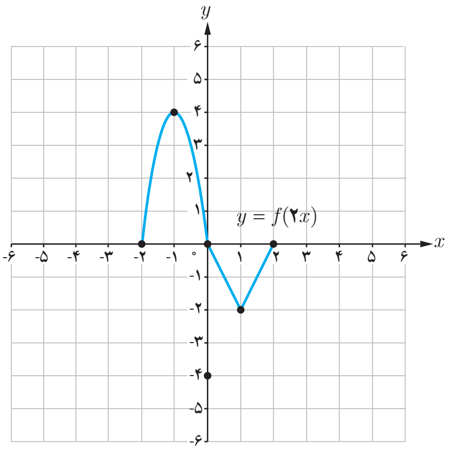
x	$f(x)$
-۴	۰
-۲	۴
۰	۰
۲	-۲
۴	۰

الف) برای تشخیص دامنهٔ $y=f(۲x)$ قرار می‌دهیم :

$$-۴ \le ۲x \le ۴ \rightarrow -۲ \le x \le ۲$$

پس دامنهٔ تابع $y=f(۲x)$ بازهٔ $[-۲,۲]$ است. جدول نقاط را کامل کنید.

برای رسم نمودار $f(۲x)$، طول نقاط یا همان xها باید محاسبه شود.



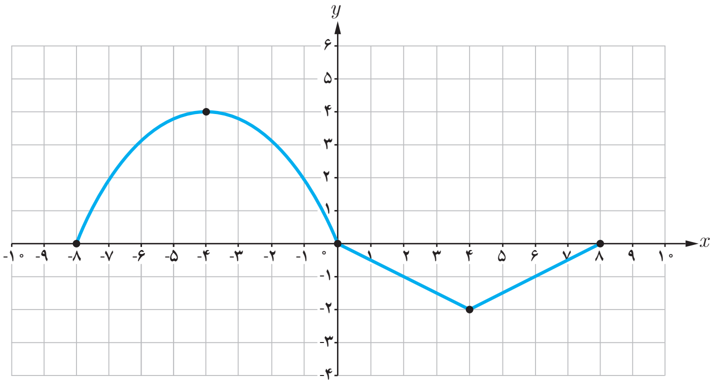
x	$۲x$	$f(۲x)$	$(x, f(۲x))$
-۲	-۴	۰	$(-۲,۰)$
...	-۲	۴	$(...,۴)$
...	۰	۰	$(...,۰)$
...	۲	-۲	$(...,-۲)$
...	۴	۰	$(...,۰)$

ب) برای تشخیص دامنهٔ $y = f(\frac{۱}{۲}x)$ قرار می‌دهیم :

$$-۴ \le \frac{۱}{۲}x \le ۴ \rightarrow -۸ \le x \le ۸$$

پس دامنهٔ تابع $y = f(\frac{۱}{۲}x)$ بازهٔ $[-۸,۸]$ است و نقاط متناظر به‌صورت زیر است :

x	$f(\frac{۱}{۲}x)$
-۸	۰
-۴	۴
۰	۰
۴	-۲
۸	۰



همان‌طور که ملاحظه کردید برای رسم نمودار $y=f(۲x)$ طول هر نقطهٔ نمودار $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{۲}$ و برای رسم نمودار $y = f(\frac{۱}{۲}x)$ طول هر نقطه را در ۲ ضرب می‌کنیم. یعنی دامنهٔ تابع $y=f(kx)$ با دامنهٔ تابع $y=f(x)$ الزاماً یکی نیست ولی برد تابع $y=f(kx)$ همان برد تابع $y=f(x)$ است.

کار در کلاس

با استفاده از نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ هر تابع را به نمودارش نظیر کنید. در هر مورد دامنه و برد را مشخص کنید.

الف) $y = -\sqrt{x} - ۱$

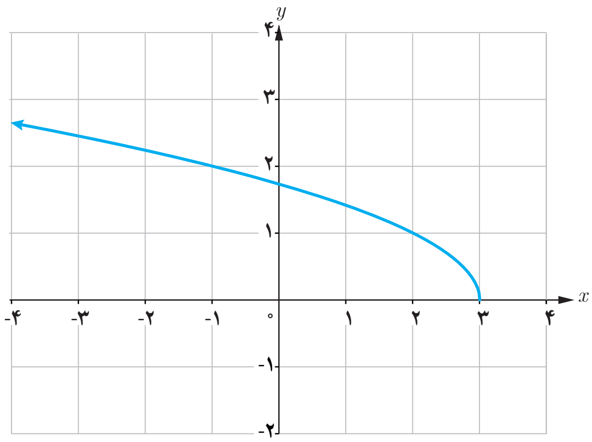
ب) $y = \sqrt{x} + ۲$

پ) $y = \sqrt{x - ۲}$

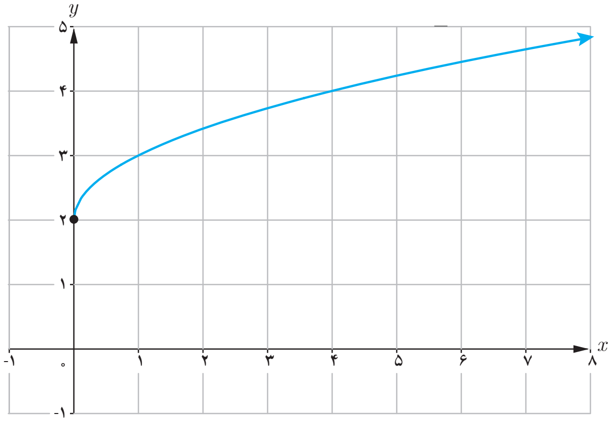
ت) $y = \sqrt{x + ۴}$

ث) $y = \sqrt{۲x}$

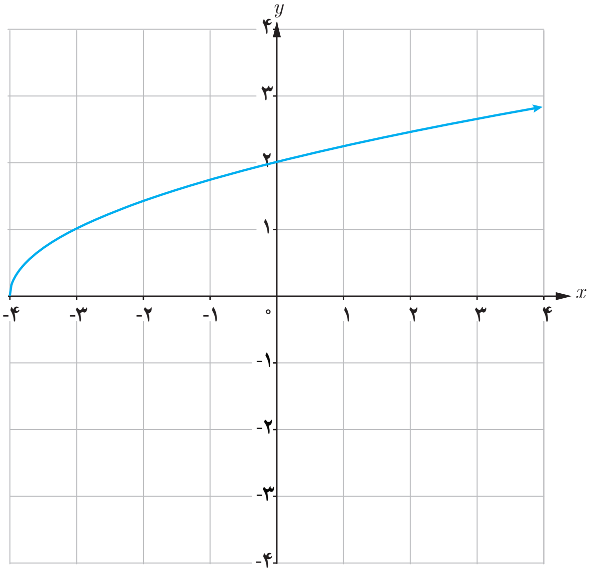
ج) $y = \sqrt{-x + ۳}$



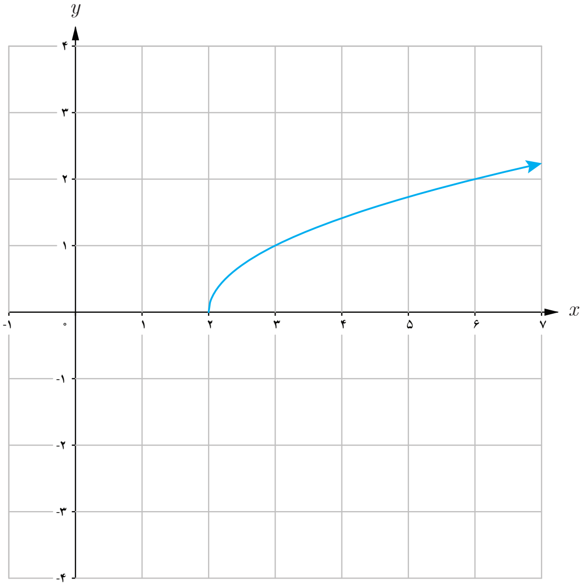
(۱)



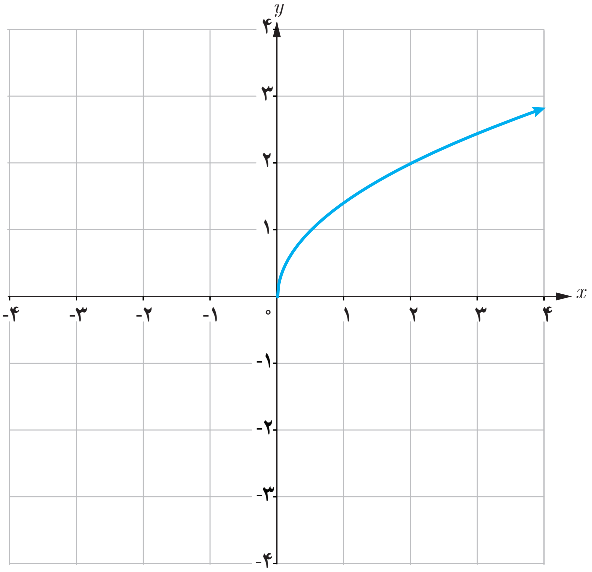
(۲)



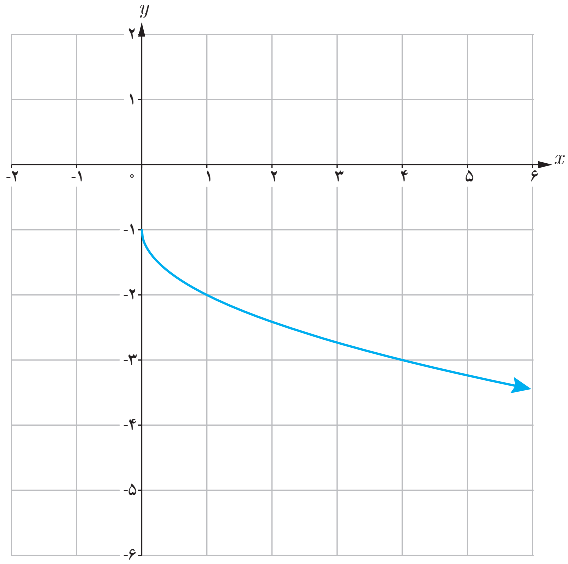
(۳)



(۴)

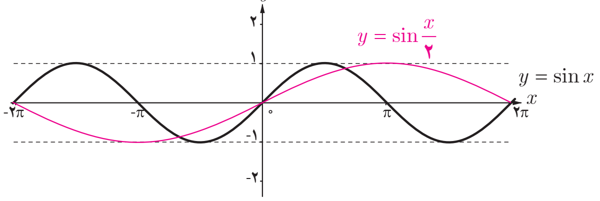


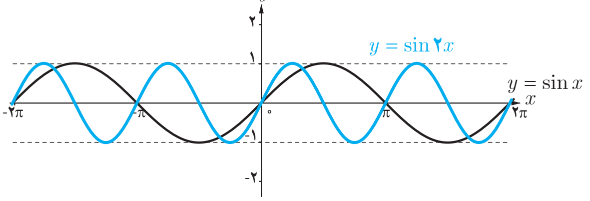
(۵)



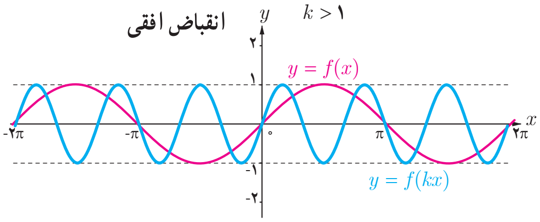
(۶)

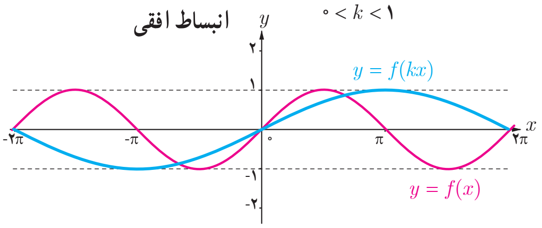
مثال : در شکل‌های زیر نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\sin 2x$ و $y=\sin\frac{x}{2}$ در بازهٔ $[-2\pi,2\pi]$ رسم شده‌اند. همان‌طور که دیده می‌شود نمودار $y=\sin 2x$ با انقباض در امتداد محورxها و نمودار $y=\sin\frac{x}{2}$ با انبساط در امتداد محورxها به‌دست آمده است.





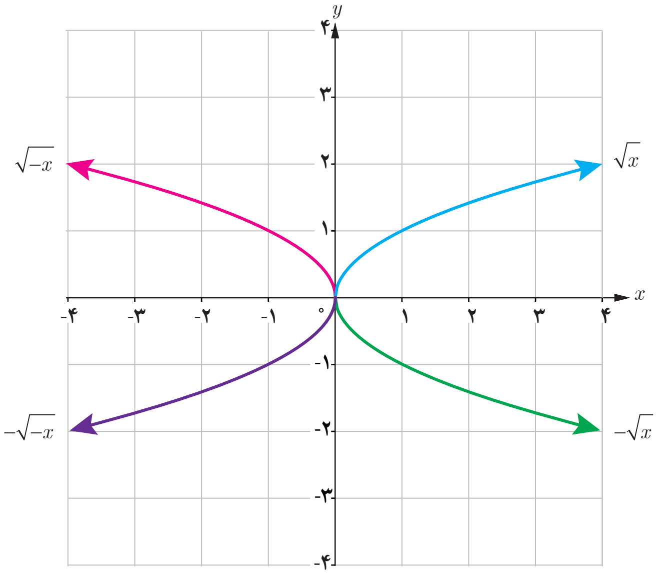
نمودار تابع $y=f(kx)$ به کمک نمودار تابع $y=f(x)$ به‌دست می‌آید : اگر $k>0$، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور xها به‌دست آورد. در حالتی که $k>1$ نمودار $y=f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض و در حالتی که $k<1$ نمودار $y=f(x)$ با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط می‌شود.





با توجه به آنچه که گفته شد نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور yهاست.

مثال : نمودار توابع $\sqrt{-x}$ و $-\sqrt{x}$ و $-\sqrt{-x}$ را به کمک نمودار تابع $\sqrt{x}$ رسم کنید.



دامنه و برد توابع فوق را مشخص کنید.

کار در کلاس

اگر $k<0$، نمودار تابع $f(kx)$ از روی نمودار تابع $f(x)$ چگونه رسم می‌شود؟

تمرین

۱ اگر $f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}$ و $g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}$ ، توابع fog و gof را به‌دست آورید.

۲ در هر قسمت ضابطه‌های $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$ و در صورت امکان $(fog)(۰)$ را بیابید.

الف) $f(x)=\sqrt{x+۴}\ ;\ g(x)=x^{۲}$

ب) $f(x)=x^{۲}-۵\ ;\ g(x)=\sqrt{x+۶}$

پ) $f(x)=\sqrt{۳-۲x}\ ;\ g(x)=\dfrac{۶}{۳x-۵}$

ت) $f(x)=\sqrt{x+۲}\ ;\ g(x)=\sqrt{x^{۲}-۱۶}$

ث) $f(x)=\sin x\ ;\ g(x)=\sqrt{x}$

ج) $f(x)=x\quad+\quad;\ g(x)=\cos x$

۳ مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x)=x^{۲}-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^{۲}-۴}$ ؛ آنگاه $(fog)(۵)=-۲۵$ و $(fog)(x)=-x^{۲}$.

ب) برای دو تابع f و g که $f\neq g$ تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ وقت بر قرار نیست.

پ) اگر $f(۷)=۵$ و $g(۴)=۷$ ، آنگاه $(fog)(۴)=۳۵$.

ت) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۲x-۱$ ، آنگاه $(fog)(۵)=g(۲)$.

۴ الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ‌تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج‌شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام راه به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

۵ تابع $h(x)=(۳x^{۲}-۴x+۱)^{۵}$ ترکیب کدام دو تابع است؟ حاصل $(fog)(x)$ است یا $(gof)(x)$ ؟

الف) $f(x)=\sqrt[۵]{x}\ ;\ g(x)=۳x^{۲}-۴x+۱$

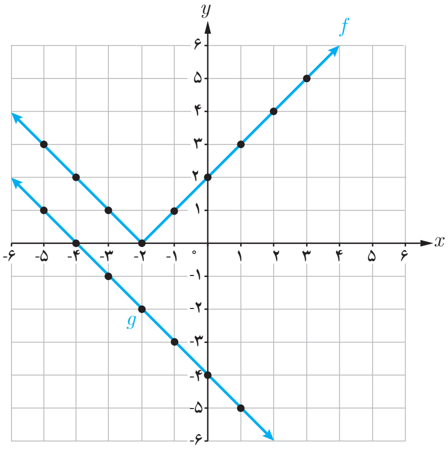
ب) $f(x)=x^{۵}\ ;\ g(x)=۳x^{۲}-۴x+۱$

۶ توابع زیر را به‌صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

الف) $h(x)=\sqrt[۳]{x^{۲}+۱}$

ب) $l(x)=\sqrt{x^{۲}+۵}$

۷ با توجه به نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.



الف) $(fog)(-۱)$

ب) $(gof)(۰)$

پ) $(fog)(۱)$

ت) $(gof)(-۱)$

۸ با توجه به ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x)=۲x-۵ \ , \ g(x)=x^۲-۳x+۸ \quad : (fog)(x)=۷$

ب) $f(x)=۳x^۲+x-۱ \ , \ g(x)=۱-۲x \quad : (gof)(x)=-۵$

۹ با استفاده از نمودار $y=\cos x$، نمودار توابع زیر رسم شده است ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

الف) $y=\cos ۲x$

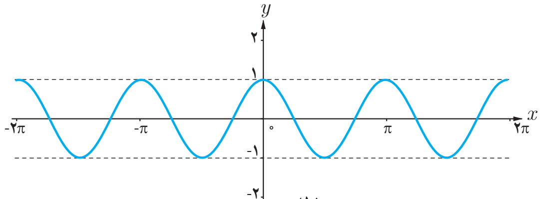
ب) $y=\cos(\frac{۱}{۲}x)$

پ) $y=۲\cos ۲x$

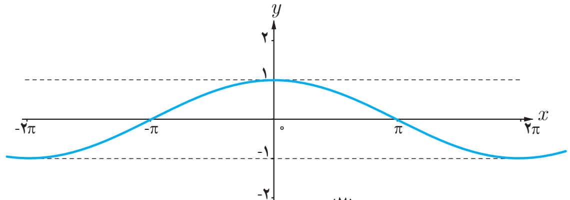
ت) $y=\cos(\frac{۱}{۳}x)$

ث) $y=-\cos ۲x$

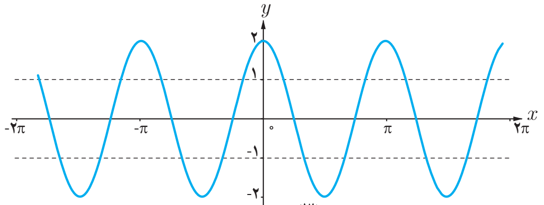
ج) $y=-\frac{۱}{۲}\cos(\frac{۱}{۲}x)$



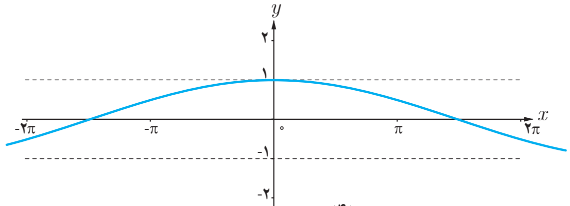
(۱)



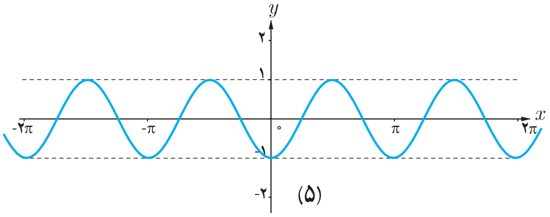
(۲)



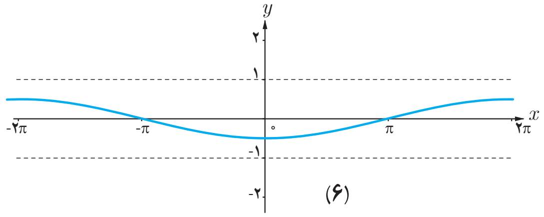
(۳)



(۴)



(۵)



(۶)

درس دوم

توابع چند جمله‌ای ــ توابع صعودی و نزولی

توابع چند جمله‌ای:

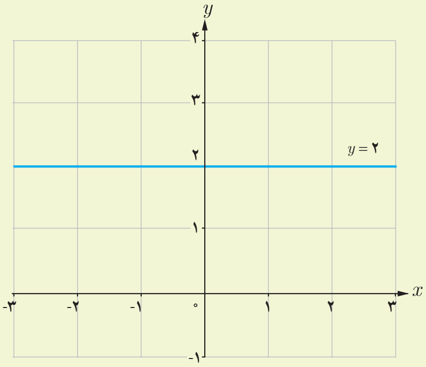
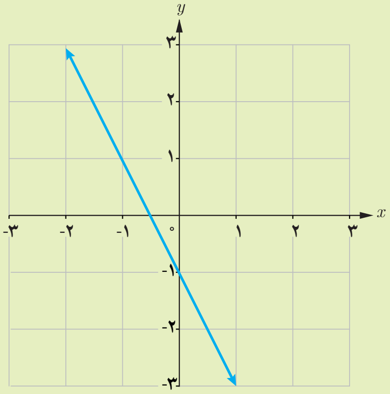
در سال‌های گذشته با توابع خطی آشنا شدید. هر تابع به‌صورت $f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a=۰$، تابع به‌صورت $f(x)=b$ در می‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامیم. تابع ثابت و تابع خطی حالت خاصی از توابعی هستند که توابع چند جمله‌ای نام دارند. توابع درجه دوم نیز حالت خاصی از توابع چند جمله‌ای هستند.

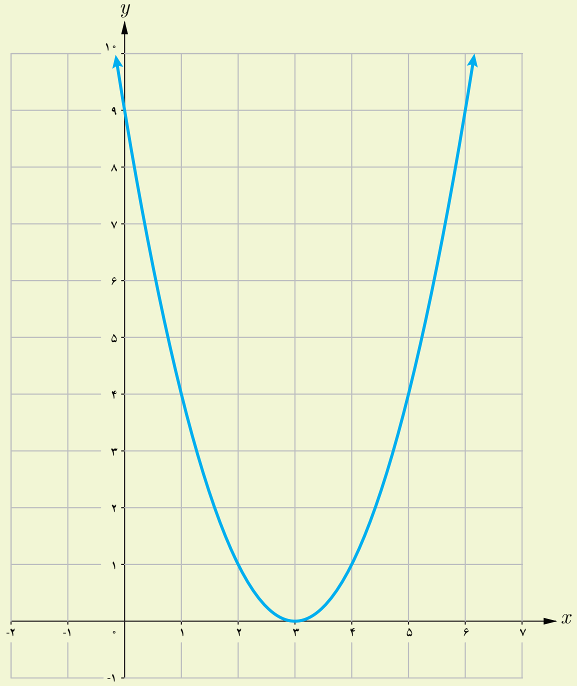
هر تابع به‌صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + a_۲x^۲ + a_۱x + a_۰$ را که در آن a_n و $a_{n-۱}$ و $\cdots$ و $a_۲$ و $a_۱$ و $a_۰$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq ۰$، یک تابع چند جمله‌ای از درجهٔ n می‌نامند. دامنهٔ توابع چند جمله‌ای مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

مثال: توابع زیر نمونه‌ای از توابع چند جمله‌ای هستند که به‌ترتیب از درجهٔ ۱، ۲، ۳ و ۵ هستند.

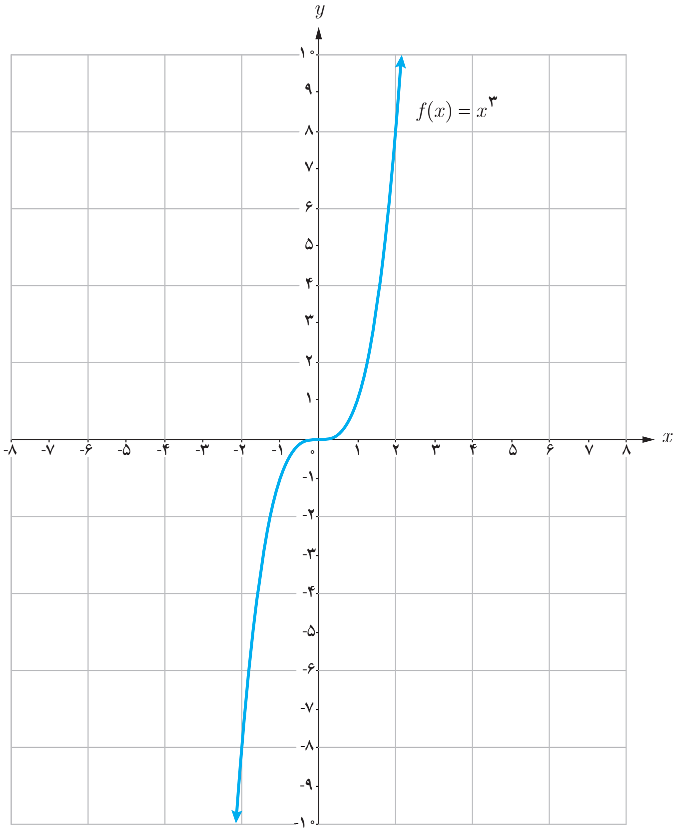
$$y = ۲x^۵ - ۴x^۳ + \sqrt{۷}x^۲ \quad , \quad y = \sqrt{۲}x^۳ - \frac{۳}{۴}x \quad , \quad y = -۸x^۲ + ۲x - \frac{۱}{۲} \quad , \quad y = ۳x + ۵$$

انواع توابع چند جمله‌ای که تا به حال با آنها آشنا شده‌اید به‌صورت زیر است:

درجهٔ تابع	نام تابع	ضابطهٔ کلی	مثال
۰	ثابت	$f(x)=a$	$f(x)=۲$ 
۱	خطی	$f(x)=ax+b$ $(a\neq ۰)$	$f(x)=-۲x-۱$ 

	$f(x)=x^۲-۶x+۹$	$f(x)=ax^۲+bx+c$ $(a\neq ۰)$	درجهٔ ۲	۲

تابع چند جمله‌ای با ضابطهٔ $f(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d\ (a\neq ۰)$ یک تابع درجهٔ ۳ است که در اینجا به‌طور خاص تابع $f(x)=x^۳$ را بررسی می‌کنیم. دامنه و برد این تابع $\mathbb{R}$ است. ابتدا به کمک نقطه‌یابی نمودار این تابع را رسم می‌کنیم :



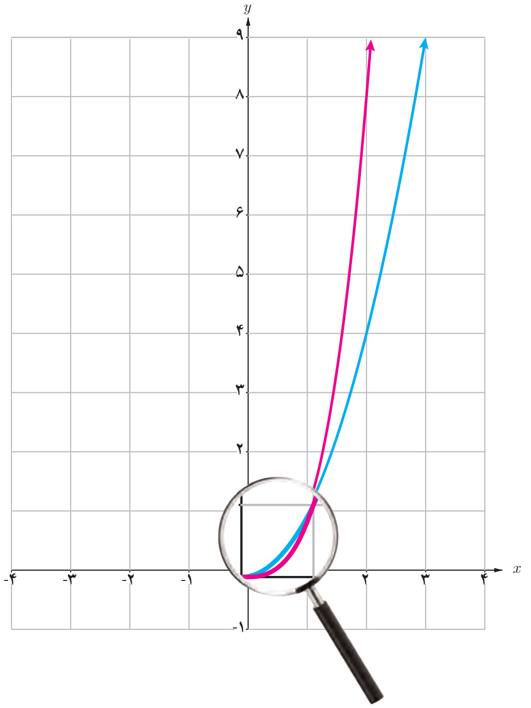
x	$f(x)=x^۳$
-۲	-۸
-۱	-۱
$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۸}$
۰	۰
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۸}$
۱	۱
۲	۸

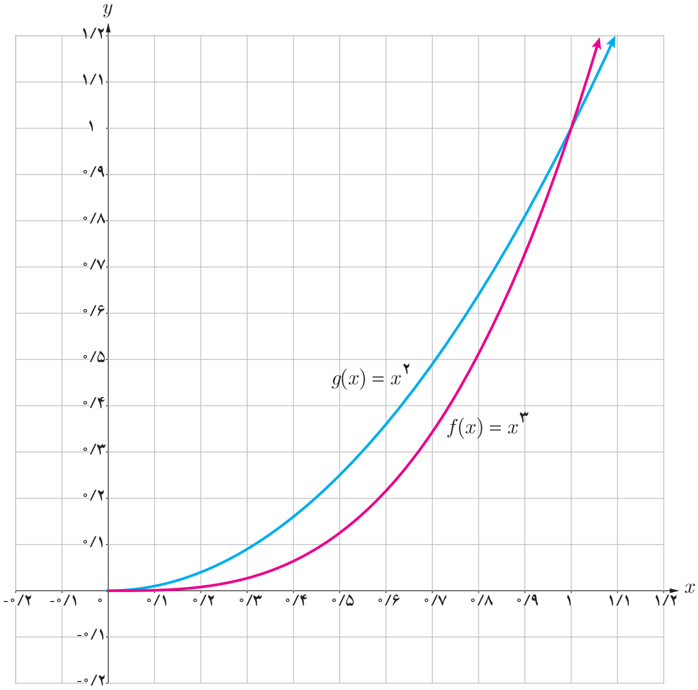
فعالیت

با توجه به نمودار توابع $f(x)=x^{۳}$ و $g(x)=x^{۲}$ که برای اعداد نامنفی رسم شده‌اند :

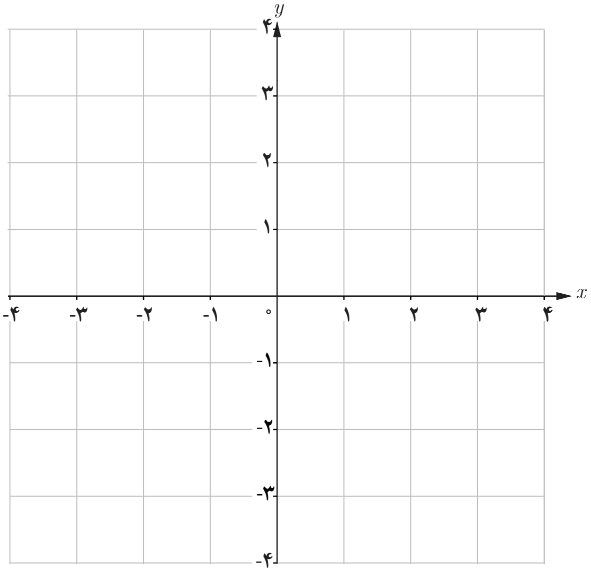
الف) آیا برای تمام xهای نامنفی، نمودار $x^{۳}$ بالای نمودار $x^{۲}$ قرار دارد؟

ب) نمودار را برای xهای منفی رسم کنید.





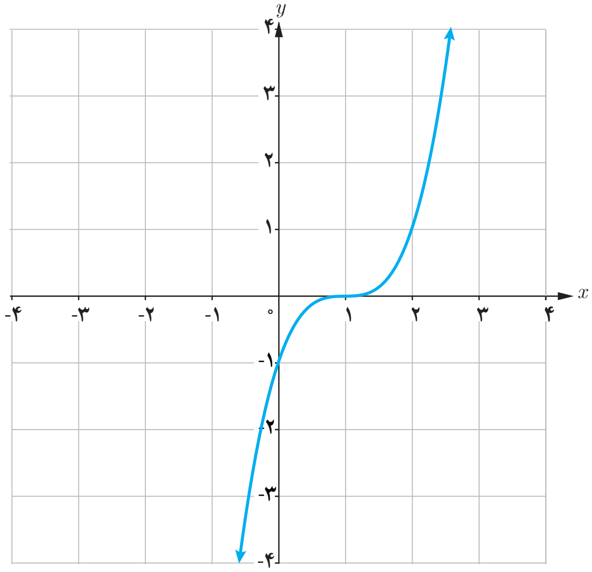
پ) آیا تابع $f(x)=x^{۳}$ یک به یک است؟ اگر جواب مثبت است در دستگاه مختصات زیر $f(x)=x^{۳}$ و وارون آن را رسم کنید. ضابطهٔ تابع وارون چیست؟



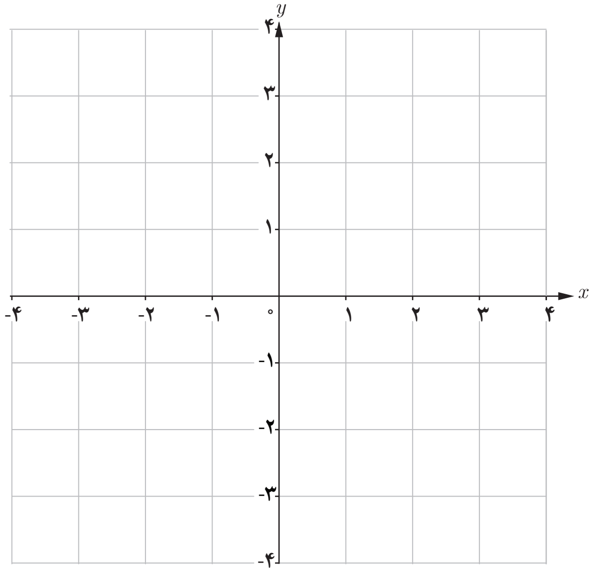
فعالیت

با استفاده از قوانین انتقال نمودار توابع و با کمک نمودار تابع $f(x)=x^{3}$، نمودار توابع ب و پ را رسم کنید. دامنه و برد توابع را مشخص کنید.

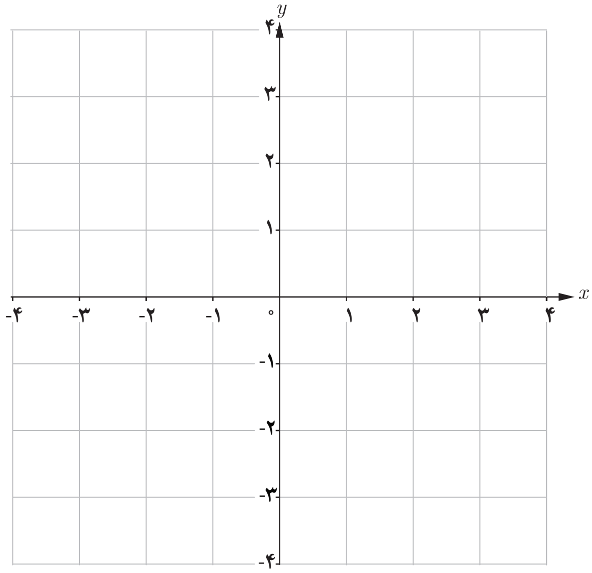
الف) $y=(x-1)^{3}$



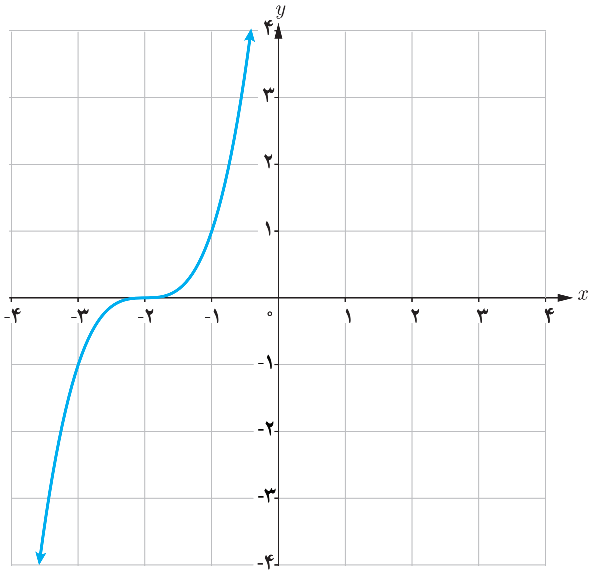
ب) $y=x^{3}-1$



پ) $y=-x^{3}+2$



ت) $y=(x+2)^{3}$



کار در کلاس

ضابطهٔ هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

الف) $y=(x+۱)^۳$

ب) $y=x^۳-۲$

پ) $y=-x^۳-۱$

ت) $y=x^۳+۱$

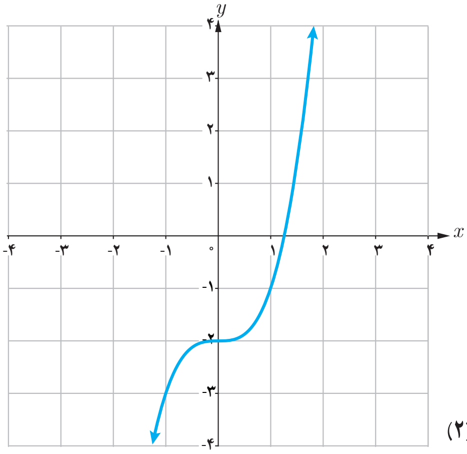
ث) $y=-x^۳$

ج) $y=(x-۱)^۳+۲$

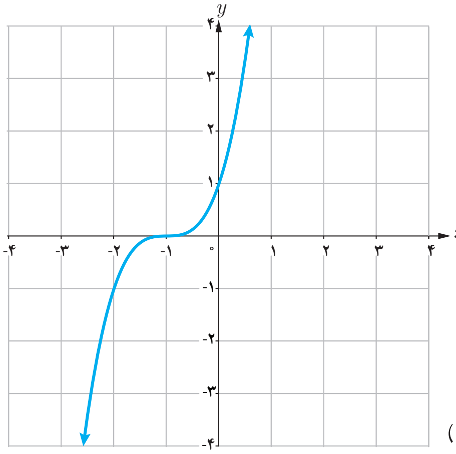
چ) $y=(x+۱)^۳-۱$

ح) $y=-x^۳+۱$

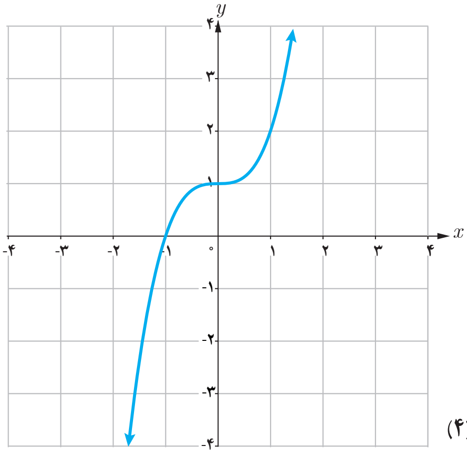
خ) $y=(x-۲)^۳$



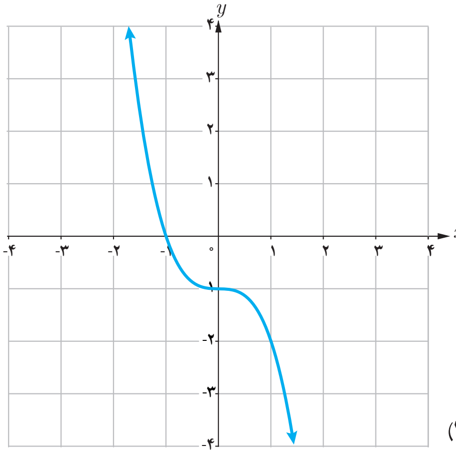
(۲)



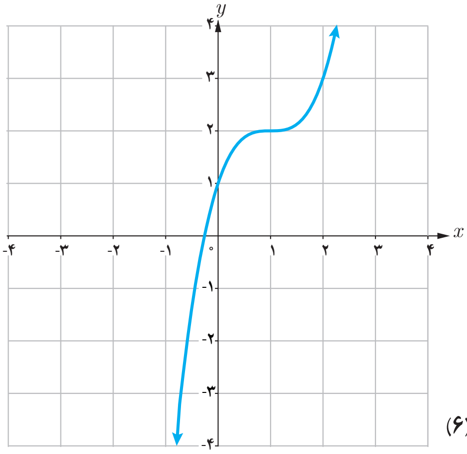
(۱)



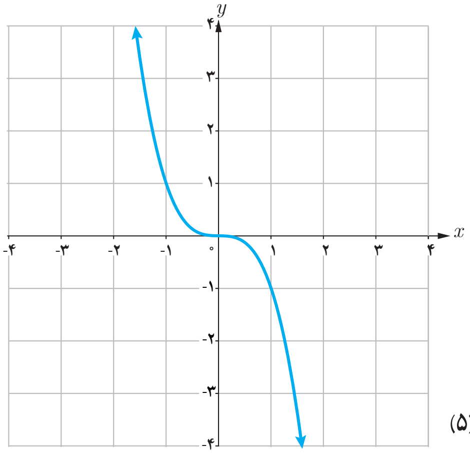
(۴)



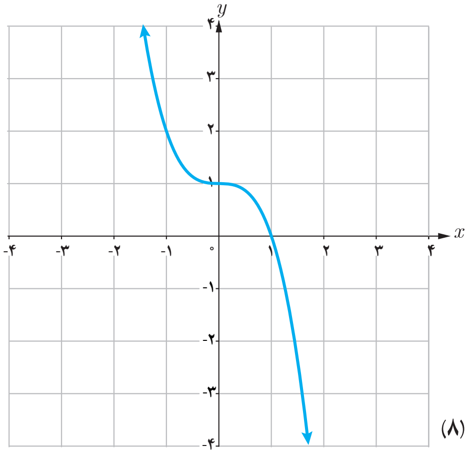
(۳)



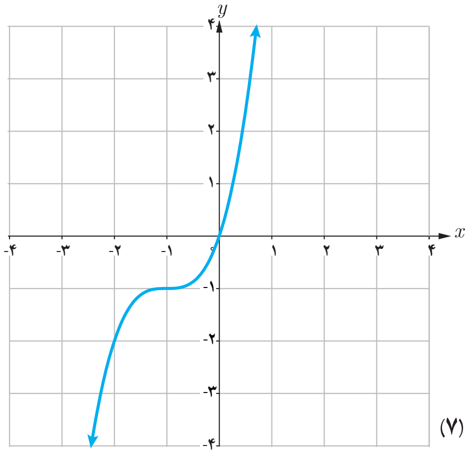
(۶)



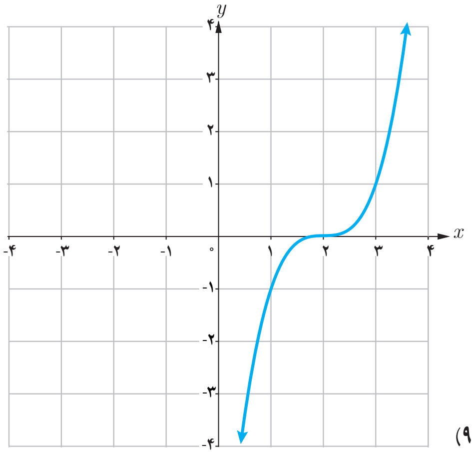
(۵)



(۸)



(۷)



(۹)

در سال‌های گذشته با اتحادهای جبری و تجزیهٔ آنها آشنا شدید. فرم کلی آنها چند جمله‌ای است :

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$$

$$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$$

فعالیت

آیا می‌توانید مشابه اتحادهای مثال قبل، عوامل چند جمله‌ای x^4-a^4 را نیز به‌دست آورید؟

$$x^4-a^4=(x-a)(\cdots+ax^2+\cdots+a^3)$$

برای پر کردن جاهای خالی می‌توانید از تقسیم چند جمله‌ای x^4-a^4 بر چند جمله‌ای $x-a$ استفاده کنید.

کار در کلاس

برای یک عدد حقیقی a و عدد طبیعی n، چند جمله‌ای زیر را درنظر بگیرید :

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1}$$

عبارت $as - s$ را حساب کنید و اتحاد زیر را نتیجه بگیرید :

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \cdots + a^2 + a + 1)$$

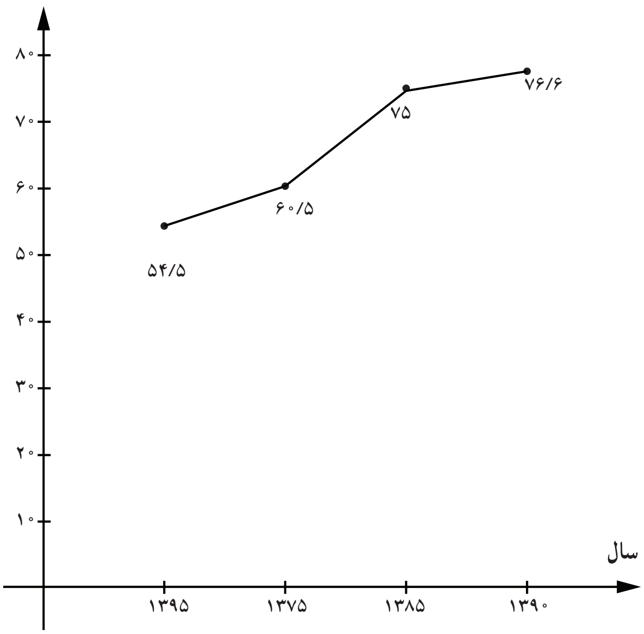
سپس به کمک اتحاد قبل، اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}.b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

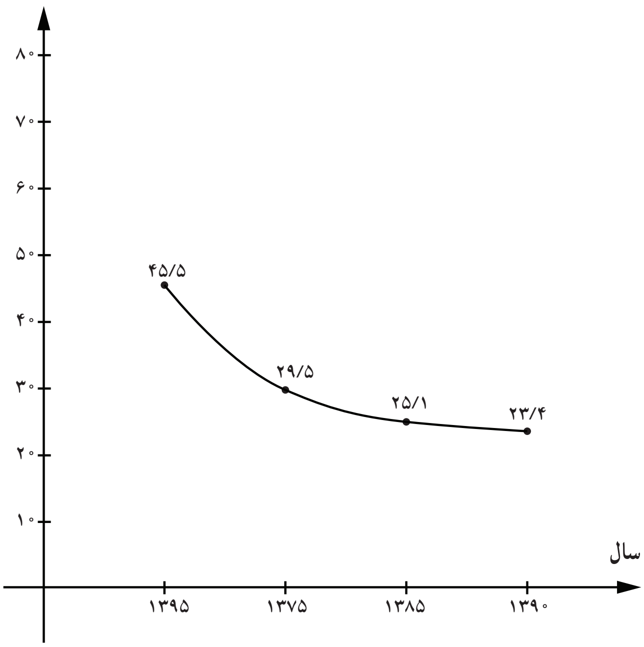
توابع صعودی و نزولی:

فعالیت

یکی از مسائلی که این روزها به‌عنوان یکی از دغدغه‌های مهم و اصلی مطرح می‌شود بحث کاهش قابل توجه رشد جمعیت کشور و پیری جمعیت جامعه ایران در آینده است. روند تغییرات دو گروه سنی در نمودارهای زیر نشان داده شده است.



نمودار جمعیت ۱۵ سال به بالا

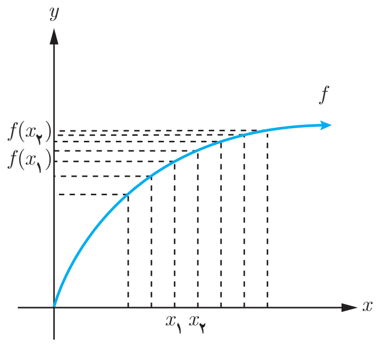


نمودار جمعیت ۱۴ــ۰ سال

همان‌طور که در نمودارهای بالا مشاهده می‌کنید جمعیت ۱۵ سال به بالای کشورمان از سال ۱۳۶۵ به بعد افزایش یافته است. می‌توان گفت جمعیت ۱۵ سال به بالای ایران از سال ۱۳۶۵ تا ۱۳۹۰ روندی صعودی داشته است.

الف) جمعیت ۰ تا ۱۴ سال در ایران از سال ۱۳۶۵ تا ۱۳۷۵ چه روندی داشته است؟ از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۰ چطور؟

ب) جمعیت بالای ۱۵ سال کشورمان از سال ۱۳۷۵ تا ۱۳۸۵ چه روندی داشته است؟ از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۰ چطور؟



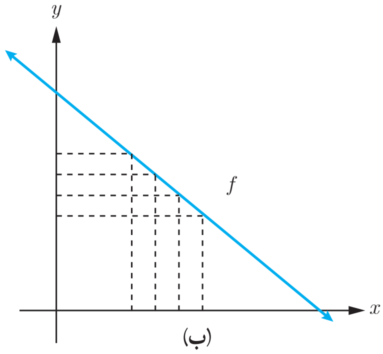
(الف)

به نمودار روبه‌رو دقت کنید:

در نمودار (الف) وقتی مقدار x در دامنهٔ تابع f افزایش می‌یابد، مقدار y نیز افزایش می‌یابد، به این توابع اکیداً صعودی می‌گوییم.

در این نمودار اگر $x_۱$ از $x_۲$ کوچک‌تر باشد، $f(x_۱)$ نیز از $f(x_۲)$ کوچک‌تر است.

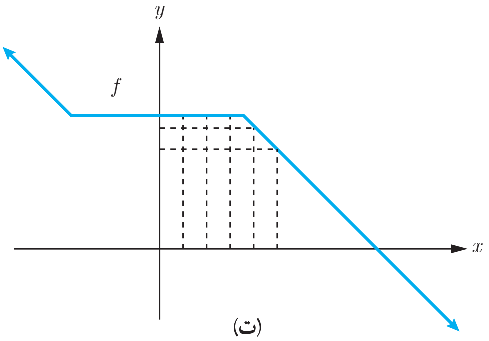
$$x_۱, x_۲ \in D_f \ , \ x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$$



(ب)

در نمودار (ب) با افزایش مقدار x در دامنهٔ تابع f، مقدار y کاهش می‌یابد. به این توابع اکیداً نزولی می‌گوییم. به بیان دیگر:

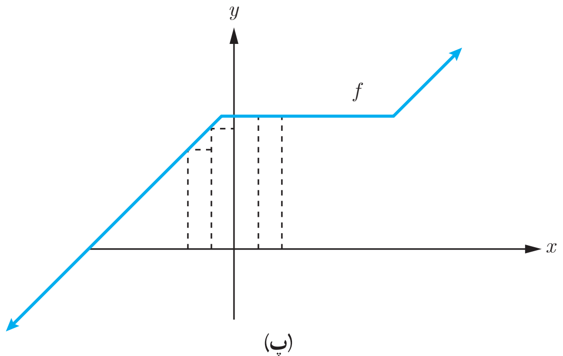
$$x_۱, x_۲ \in D_f \ , \ x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) > f(x_۲)$$



(ت)

در نمودار (ت) با افزایش مقدار x در دامنهٔ تابع، مقدار y یا کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند، به این توابع نزولی می‌گوییم.

$$x_۱, x_۲ \in D_f \ , \ x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \geq f(x_۲)$$



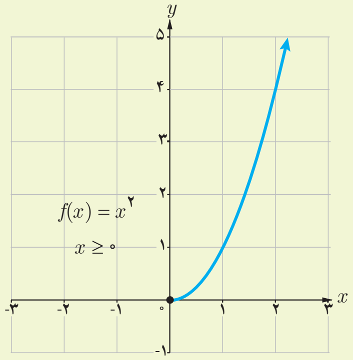
(پ)

در نمودار (پ) با افزایش مقدار x در دامنهٔ تابع، مقدار y یا افزایش می‌یابد یا ثابت می‌ماند، به این توابع صعودی می‌گوییم.

$$x_۱, x_۲ \in D_f \ , \ x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \leq f(x_۲)$$

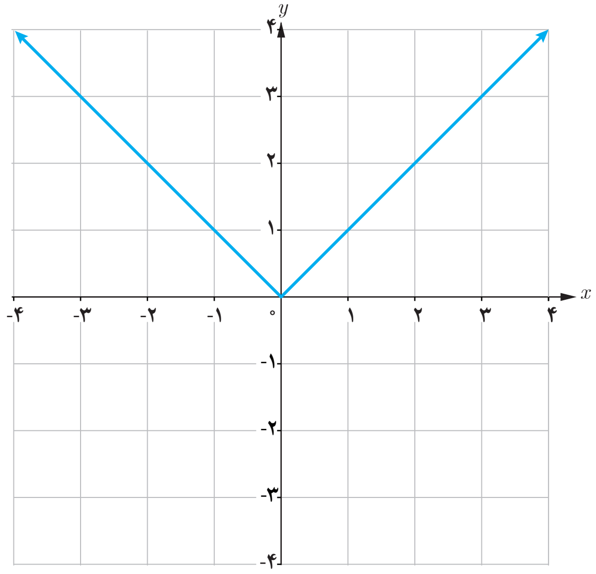
کار در کلاس

در حالت کلی جدول زیر را داریم، جاهای خالی را کامل کنید.

	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	توابع اکیداً صعودی
	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	توابع اکیداً نزولی
	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	توابع صعودی
	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	توابع نزولی

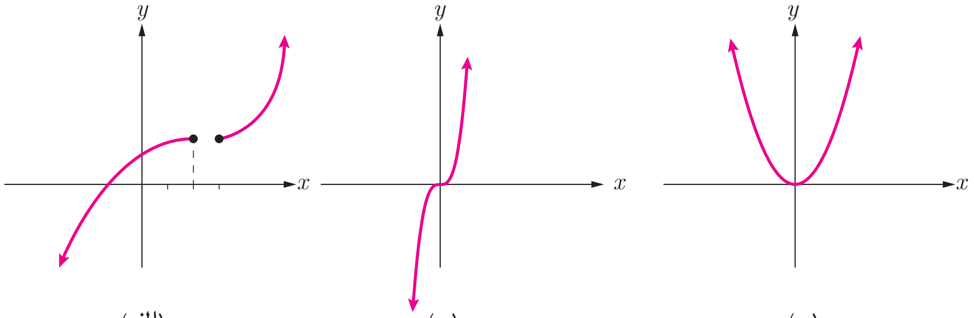
ممکن است تابعی در یک بازه صعودی (اکیداً) و در بازهٔ دیگر نزولی (اکیداً) باشد.

مثال : تابع $f(x)=|x|$ در بازهٔ $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است، اما در $\mathbb{R}$ نه صعودی است نه نزولی.

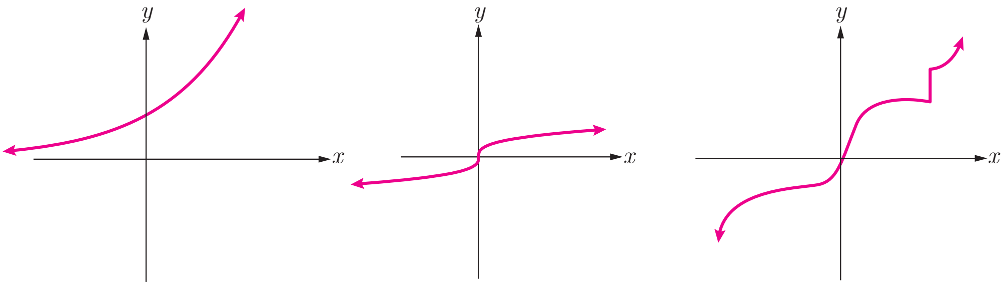


کار در کلاس

در هر کدام از توابع زیر مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی (اکیداً) و در چه بازه‌هایی نزولی (اکیداً) هستند؟



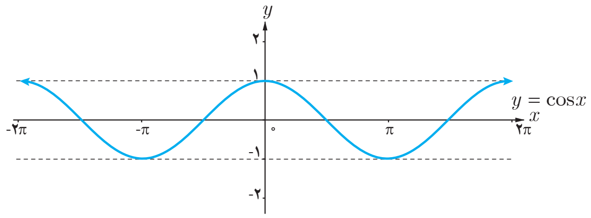
(الف) (ب) (پ)

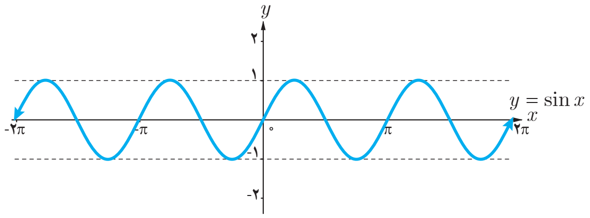


(ت) (ث) (ج)

کار در کلاس

نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در بازهٔ $[-2\pi,2\pi]$ رسم شده است. صعودی یا نزولی بودن آنها را در بازه‌های جدول‌ها مشخص نمایید.





x	$[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2},0]$	$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
$y=\sin x$					صعودی			

x	$[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2},0]$	$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
$y=\cos x$							صعودی	

کار در کلاس

نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

الف) $f(x)=x^2$

ب) $g(x)=x+|x|$

پ) $h(x)=\sqrt{x}$

ت) $l(x)=\frac{1}{x}$

ث) $k(x)=x^3$

ج) $t(x)=-x^3$

اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ اکیداً صعودی باشد می‌گوییم در این بازه اکیداً یکنواست.

اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ اکیداً نزولی باشد می‌گوییم در این بازه اکیداً یکنواست.

اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ صعودی باشد می‌گوییم در این بازه یکنواست.

اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ نزولی باشد می‌گوییم در این بازه یکنواست.

اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ نه صعودی باشد نه نزولی، به آن تابع غیر یکنوا گوییم.

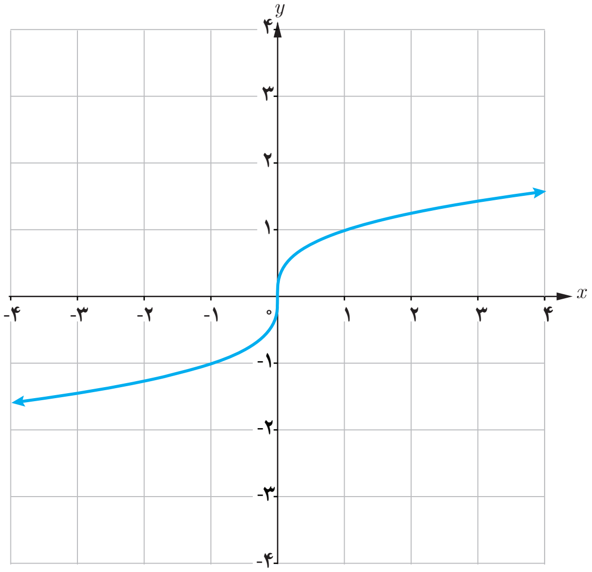
فعالیت

به نمودار تابع روبه‌رو دقت کنید.

الف) آیا این تابع اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟

ب) آیا این تابع یک به یک است؟

پ) آیا می‌توانید تابعی رسم کنید که اکیداً صعودی باشد ولی یک به یک نباشد؟



تمرین

۱ توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نمایید.

الف) $y=(x-۱)^۳-۱$

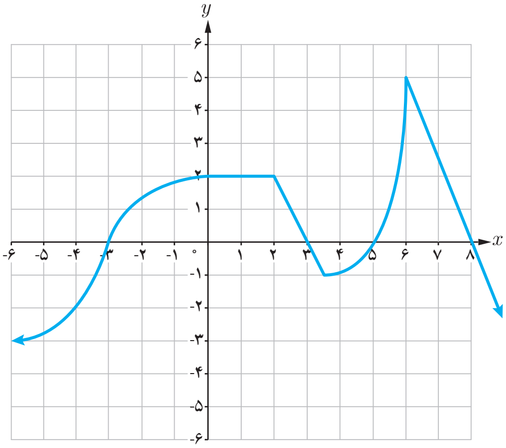
ب) $y=(x+۲)^۳-۲$

۲ عبارت $a^۵-b^۵$ را تجزیه کنید.

۳ تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-۲x-۳ & x<-۴\\ ۳ & -۴\leq x<۲\\ ۳x-۲ & x\geq ۲\end{cases}$$

۴ با استفاده از نمودار تابع روبه‌رو مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟



۵ تابع نمایی $y=۲^{x}-۲$ و تابع لگاریتمی $y=-\log_{۲}^{x}+۲$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی یا غیر یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

۶ تابع $y=x\,|x|$ در چه بازه‌ای صعودی است؟ در چه بازه‌ای نزولی است؟

۷ دو تابع مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً صعودی باشند و دو تابع مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً نزولی باشند.

۸ ضابطهٔ تابعی را بنویسید که در دامنهٔ خود غیر یکنوا باشد.

درس سوم

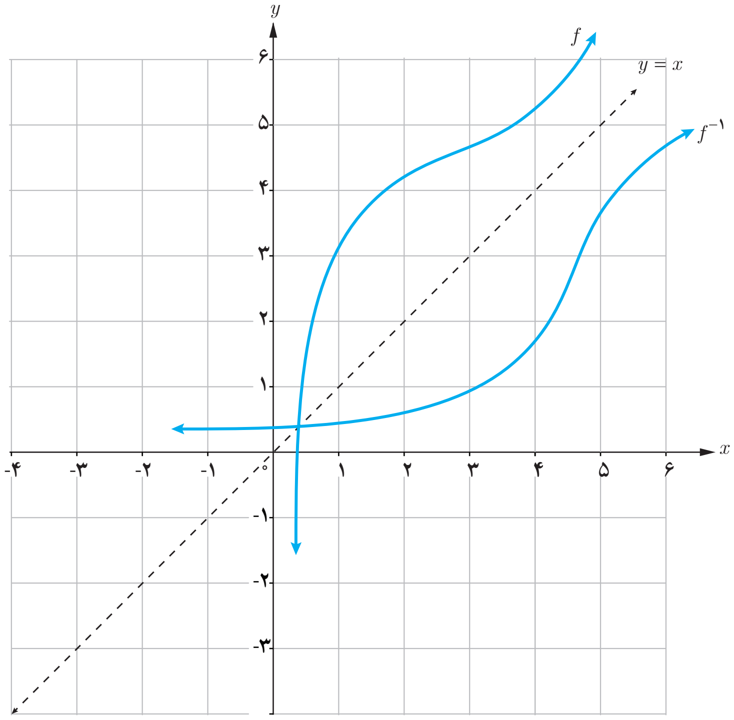
وارون تابع

یادآوری

همان‌طور که در فصل تابع کتاب ریاضی ۲ ملاحظه کردید با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج‌های مرتب تابع یک‌به‌یک f، تابعی جدید به‌دست می‌آید که وارون تابع f است که آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم. یعنی اگر نقطهٔ (a , b) روی نمودار تابع f قرار داشته باشد آن‌گاه نقطهٔ (b , a) روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد :

$$(a , b) \in f \Rightarrow (b , a) \in f^{-1}$$

بنابراین نمودار تابع f و تابع وارون آن نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اوّل و سوم) قرینه‌اند.



مثال :

اگر $f = \{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}$ آن‌گاه :

$$f^{-1} = \{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳)\}$$

خواهیم داشت :

$$\begin{cases} (fof^{-1})(۴) = f\left(f^{-1}(۴)\right) = f(۱) = ۴ \\ (fof^{-1})(۳) = f\left(f^{-1}(۳)\right) = f(۲) = ۳ \\ (fof^{-1})(۵) = f\left(f^{-1}(۵)\right) = f(۳) = ۵ \end{cases}$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنهٔ تابع f^{-1} داریم :

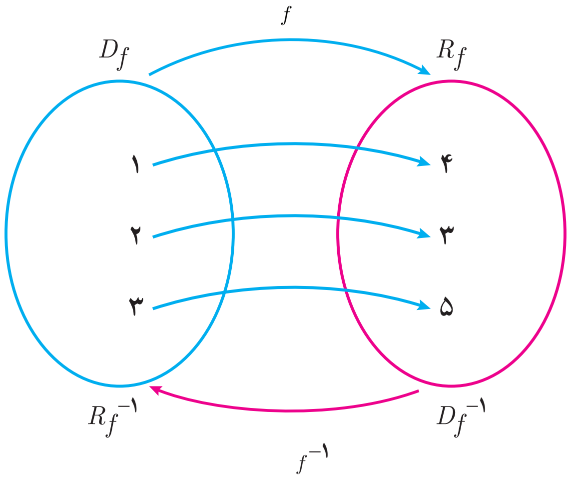
$$(fof^{-1})(x) = x$$

همچنین :

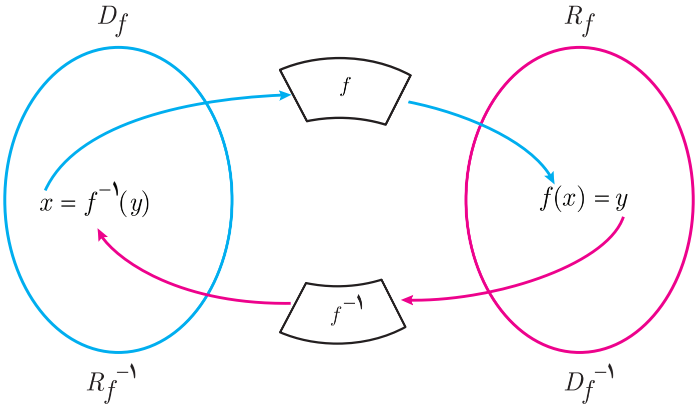
$$\begin{cases}(f^{-1}of)(۱)=f^{-1}\big(f(۱)\big)=f^{-1}(۴)=۱\\(f^{-1}of)(۲)=f^{-1}\big(f(۲)\big)=f^{-1}(۳)=۲\\(f^{-1}of)(۳)=f^{-1}\big(f(۳)\big)=f^{-1}(۵)=۳\end{cases}$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنهٔ تابع f داریم :

$$(f^{-1}of)(x)=x$$



به‌طور کلی اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و f^{-1} را نشان می‌دهد.



اگر f تابعی وارون‌پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، همواره داریم :

$$f\big(f^{-1}(x)\big)=x : x\in D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}\big(f(x)\big)=x : x\in D_f$$

برعکس اگر دو تابع در دو تساوی فوق صدق کنند، آنگاه یک‌به‌یک هستند و وارون یکدیگرند.

مثال : نشان دهید توابع f و g وارون یکدیگرند.

$$f(x) = ۳x - ۴$$

$$g(x) = \frac{x+۴}{۳}$$

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی است، یعنی :

$$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = ۳g(x) - ۴ = ۳\left(\frac{x+۴}{۳}\right) - ۴ = x$$

همچنین :

$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = \frac{f(x)+۴}{۳} = \frac{۳x-۴+۴}{۳} = x$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y = f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.[۱]

مثال : اگر $f(x) = \sqrt{x+۳}$ ، دامنه و برد توابع f و $f^{-۱}$ را به‌دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید، ضابطهٔ $f^{-۱}$ را نیز به‌دست آورید.

تابع f یک‌به‌یک است، بنابراین دارای وارون است.

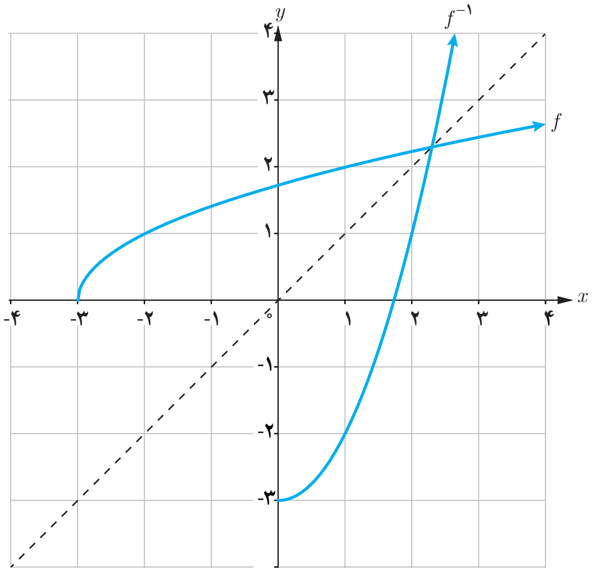
$$\begin{cases} D_f = [-۳, +\infty) \\ R_{f^{-۱}} = [-۳, +\infty) \end{cases} \qquad \begin{cases} R_f = [۰, +\infty) \\ D_{f^{-۱}} = [۰, +\infty) \end{cases}$$

$$y = \sqrt{x+۳}$$

$$y^۲ = x + ۳$$

$$x = y^۲ - ۳$$

$$f^{-۱}(x) = x^۲ - ۳$$



۱ــ توابع مورد نظر در این درس توابع خطی، درجهٔ ۲، $\sqrt{ax+b}$، $x^۳$، $\sqrt[۳]{x}$ است.

کار در کلاس

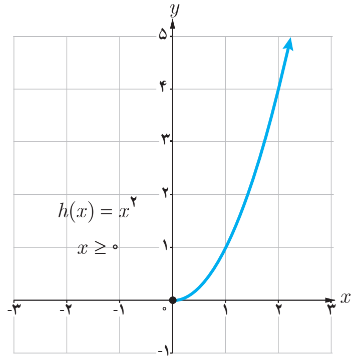
ضابطهٔ تابع وارون توابع زیر را به‌دست آورید. دامنه و برد هر تابع را نیز مشخص کنید.

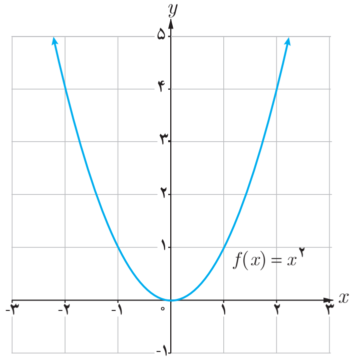
الف) $f(x) = -\frac{۱}{۲}x + ۳$

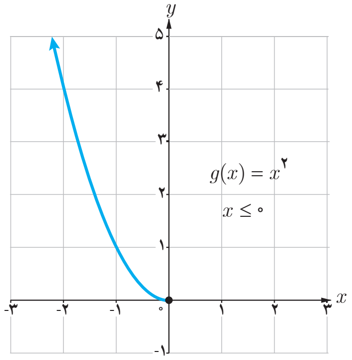
ب) $g(x) = ۱ + \sqrt{x - ۲}$

پ) $h(x) = x^۲ + ۱$

از سال قبل می‌دانید که اگر تابعی یک‌به‌یک نباشد وارون‌پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنهٔ یک تابع، می‌توان تابعی یک‌به‌یک به‌دست آورد. به‌طور مثال تابع $f(x) = x^۲$ یک‌به‌یک نیست ولی با محدود کردن دامنهٔ تابع به بازهٔ $[۰ , +\infty)$ و یا $(-\infty , ۰]$ تابعی یک‌به‌یک به‌دست می‌آید.







مثال: نمودار تابع $h(x) = x^۲ - ۲x + ۲$ نشان می‌دهد که این تابع یک‌به‌یک نیست. اما می‌توان با محدود کردن دامنهٔ این تابع آن را طوری محدود کرد که تابعی یک‌به‌یک به‌دست آید و سپس وارون آن را محاسبه کرد.

$$h(x) = x^۲ - ۲x + ۲ = (x - ۱)^۲ + ۱$$

مثلاً دامنهٔ تابع f را به بازهٔ $[۱ , +\infty)$ محدود می‌کنیم. ضابطهٔ تابع جدید که آن را $k(x)$ می‌نامیم با ضابطهٔ $h(x)$ برابر است اما دامنهٔ تابع h مجموعهٔ اعداد حقیقی و دامنهٔ تابع k بازهٔ $[۱ , +\infty)$ است.

در تابع k، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

$$k(x) = (x-۱)^۲ + ۱$$

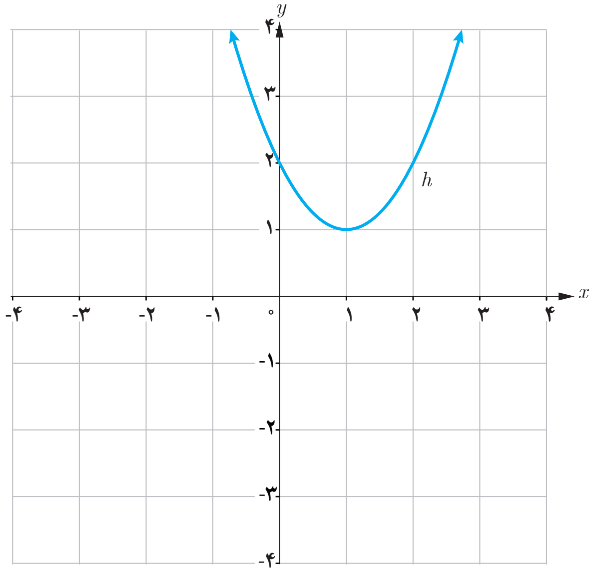
$$y = (x-۱)^۲ + ۱$$

$$(x-۱)^۲ = y - ۱$$

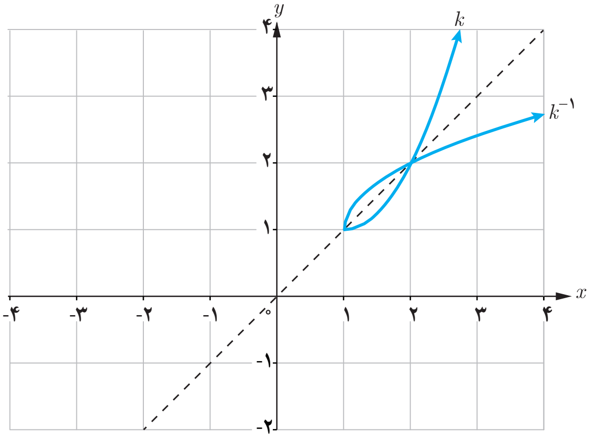
$$x - ۱ = \pm\sqrt{y-۱}$$ جواب منفی غیرقابل قبول است. (چرا؟)

$$x = \sqrt{y-۱} + ۱$$

$$k(x) = \sqrt{x-۱} + ۱$$



نمودار k و k^{-1} به‌صورت زیر است :



مثال : اگر $f=\left\{(۰,-۱),(۲,\frac{۱}{۲}),(-۳,\sqrt{۲}),(۱,۵)\right\}$ و $g=\left\{(-۱,-۳),(۵,۲),(\frac{۱}{۲},۰),(۴,۶)\right\}$ توابع زیر را به‌دست آورید :

الف) $f^{-۱}=\left\{(-۱,۰),(\frac{۱}{۲},۲),(\sqrt{۲},-۳),(۵,۱)\right\}$

ب) $g^{-۱}=\left\{(-۳,-۱),(۲,۵),(۰,\frac{۱}{۲}),(۶,۴)\right\}$

پ) $(fog)^{-۱}$

$$fog:\begin{cases}(fog)(-۱)=f\left(g(-۱)\right)=f(-۳)=\sqrt{۲}\\(fog)(۵)=f\left(g(۵)\right)=f(۲)=\frac{۱}{۲}\\(fog)(\frac{۱}{۲})=f\left(g(\frac{۱}{۲})\right)=f(۰)=-۱\\(fog)(۴)=f\left(g(۴)\right)=f(۶)\quad \text{تعریف نشده}\end{cases}$$

$$fog=\left\{\left(-۱,\sqrt{۲}\right),\left(۵,\frac{۱}{۲}\right),\left(\frac{۱}{۲},-۱\right)\right\}$$

$$(fog)^{-۱}=\left\{\left(\sqrt{۲},-۱\right),\left(\frac{۱}{۲},۵\right),\left(-۱,\frac{۱}{۲}\right)\right\}$$

ت) $$g^{-۱}of^{-۱}:\begin{cases}(g^{-۱}of^{-۱})(-۱)=g^{-۱}\left(f^{-۱}(-۱)\right)=g^{-۱}(۰)=\frac{۱}{۲}\\(g^{-۱}of^{-۱})(\frac{۱}{۲})=g^{-۱}\left(f^{-۱}(\frac{۱}{۲})\right)=g^{-۱}(۲)=۵\\(g^{-۱}of^{-۱})(\sqrt{۲})=g^{-۱}\left(f^{-۱}(\sqrt{۲})\right)=g^{-۱}(-۳)=-۱\\(g^{-۱}of^{-۱})(۵)=g^{-۱}\left(f^{-۱}(۵)\right)=g^{-۱}(۱)\quad \text{تعریف نشده}\end{cases}$$

$$g^{-۱}of^{-۱}=\left\{(-۱,\frac{۱}{۲}),\ (\frac{۱}{۲},۵),\ (\sqrt{۲},-۱)\right\}$$

همان‌طور که می‌بینید دو تابع $(fog)^{-۱}$ و $g^{-۱}of^{-۱}$ مساوی‌اند.

کار در کلاس

اگر $f(x) = x + ۴$ و $g(x) = ۲x - ۵$، ضابطه توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $g^{-۱} o f^{-۱}$

ب) $f^{-۱} o g^{-۱}$

پ) $(fog)^{-۱}$

ت) $(gof)^{-۱}$

کار در کلاس

درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید.

الف) اگر f یک‌به‌یک باشد آنگاه $f^{-۱}$ نیز یک‌به‌یک است.

ب) اگر f تابعی یک‌به‌یک و صعودی باشد، آنگاه $f^{-۱}$ نیز صعودی است.

پ) اگر g تابعی یک‌به‌یک و نزولی باشد، آنگاه $g^{-۱}$ نیز نزولی است.

تمرین

۱) ضابطهٔ تابع وارون توابع یک‌به‌یک زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(x) = \dfrac{-۸x + ۳}{۲}$

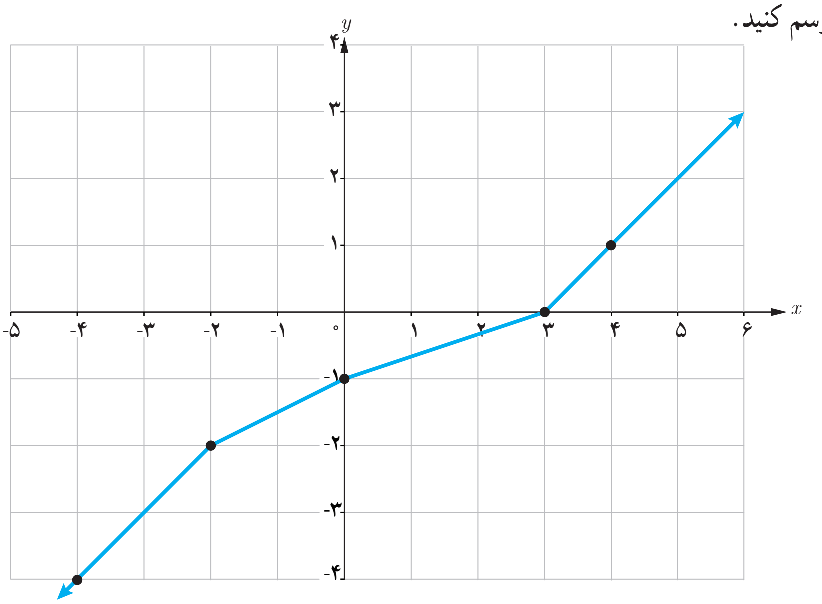
ب) $g(x) = -۵ - \sqrt{۳x + ۱}$

۲) در مورد هر کدام از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x) = \dfrac{-۷}{۲}x - ۳$, $g(x) = -\dfrac{۲x + ۶}{۷}$

ب) $f(x) = -\sqrt{x - ۸}$, $g(x) = ۸ + x^{۲} \quad x \leq ۰$

۳) وارون تابع زیر را رسم کنید.



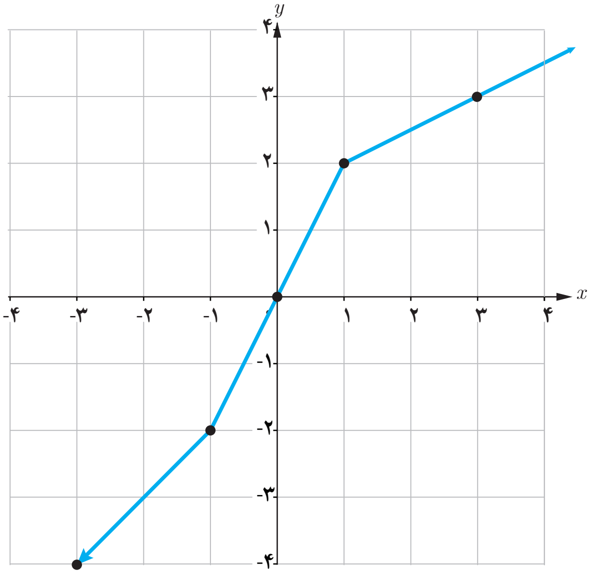
۴ توابع زیر یک‌به‌یک نیستند. حداقل به دو صورت از آنها تابعی یک‌به‌یک بسازید.

الف) $f(x) = |x|$

ب) $g(x) = -x^{۲}$

پ) $h(x) = x^{۲} + ۴x + ۳$

۵ از نمودار روبه‌رو برای تکمیل جدول استفاده کنید.



x	-۴	-۲	۲	۳
$f^{-۱}(x)$	...	...	...	...

آیا با توجه به این جدول می‌توانید نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید؟

۶ اگر $f(x) = \frac{۱}{۸}x - ۳$ و $g(x) = x^{۳}$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $(f^{-۱} o g^{-۱})(۱)$

ب) $(f^{-۱} o f^{-۱})(۶)$

پ) $(fog)^{-۱}(۵)$

ت) $(g^{-۱} o f^{-۱})(۵)$

فصل ۶ احتمال

درس اوّل قانون احتمال کل

درس دوم توزیع احتمال

www.kurdbsw.ir
ریاضی پایه دوازدهم

درس اوّل

قانون احتمال کل

یادآوری

در پایه‌های قبل با مفاهیمی از احتمال آشنا شده‌اید. در زیر خلاصه‌ای از این مطالب آورده شده است.

۱ــ پدیده تصادفی : پدیده یا آزمایشی است که نتیجهٔ آن را نتوان قبل از انجام به‌طور قطعی پیش‌بینی کرد.

۲ــ فضای نمونه‌ای : مجموعهٔ تمام نتایج ممکنِ یک پدیدهٔ تصادفی را فضای نمونه‌ای آن پدیده می‌نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهیم.

۳ــ پیشامد تصادفی : هر زیر مجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

۴ــ پیشامدها و اعمال روی آنها : فرض کنیم A و B پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند.

الف) اجتماع دو پیشامد : پیشامد $A\cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

ب) اشتراک دو پیشامد : پیشامد $A\cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

پ) تفاضل دو پیشامد : پیشامد $A-B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ ندهد.

ت) متمم یک پیشامد : پیشامد A' (یا A^c) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.

۵ــ رابطهٔ محاسبهٔ احتمال وقوع یک پیشامد :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

۶ــ رابطهٔ محاسبهٔ احتمال اجتماع یا اشتراک دو پیشامد A و B :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

۷ــ پیشامدهای ناسازگار : دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه A و B با هم رخ ندهند؛ $A\cap B=\varnothing$ در این صورت داریم :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

۸ــ تعمیم پیشامدهای ناسازگار : پیشامدهای A_1 و A_2 و $\cdots$ و A_n را دو به دو ناسازگار گوییم، هرگاه هیچ دوتایی از آنها نتوانند با هم رخ دهند. در این صورت داریم :

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

۹ــ احتمال شرطی : منظور از «احتمال A به شرط B» که آن‌را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است و داریم :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\qquad (P(B)\neq 0)$$

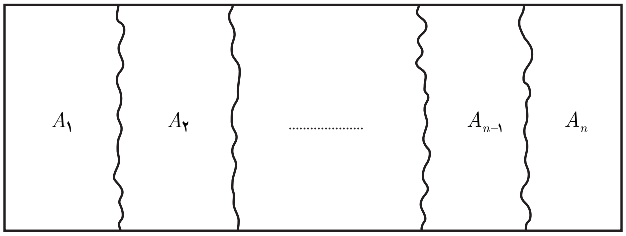
۱۰ــ دو پیشامد A و B از هم مستقل‌اند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. مستقل بودن دو پیشامد A و B معادل است با اینکه $P(A\cap B)=P(A).P(B)$.

قانون احتمال کل

فرض کنیم A_1 و A_2 و … و A_n زیر مجموعه‌هایی ناتهی از مجموعهٔ S باشند، به‌گونه‌ای که اجتماع همهٔ آنها برابر S، و اشتراک هر دوتای آنها برابر $\varnothing$ باشد، در این‌صورت می‌گوییم این مجموعه‌ها یک افراز روی S درست کرده‌اند. به عبارتی داریم :

$$۱)\ A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S \quad \left(\bigcup_{i=1}^{n} Ai = S\right)$$

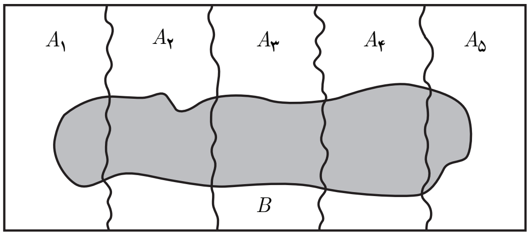
$$۲)\ A_1 \cap A_2 = \varnothing\ ,\ A_1 \cap A_3 = \varnothing\ ,\ \cdots\ ,\ A_{n-1} \cap A_n = \varnothing \ (Ai \cap Aj = \varnothing\ ,\ \underset{i\neq j}{1 \leq i, j \leq n})$$



مثال : اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی اول و B مجموعهٔ اعداد طبیعی مرکب و $C=\{1\}$ باشند، در این صورت A , B و C یک افراز روی مجموعهٔ اعداد طبیعی هستند.

مثال : مجموعهٔ اعداد گویا و مجموعهٔ اعداد اصم یک افراز روی مجموعهٔ اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.

سؤال : اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی باشد و A_1 , A_2 , … و A_n مانند آنچه گفته شد یک افراز روی S درست کنند. آیا پیشامدهای A_1 , A_2 , … و A_n دو به دو ناسازگارند؟ چرا؟ آیا امکان دارد هیچ‌کدام از پیشامدهای A_1 , A_2 , … و A_n اتفاق نیفتند؟



فرض کنید پیشامدهای A_1 , A_2 , A_3 , A_4 و A_5 مانند شکل مقابل یک افراز روی فضای نمونه‌ای S درست کرده باشند و B یک پشامد دلخواه باشد. در این صورت داریم :

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup (B \cap A_4) \cup (B \cap A_5)$$

که در آن $B \cap A_i$ و $B \cap A_j$ برای هر $i \neq j$ ناسازگارند. چرا؟

بنابراین داریم :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_5) = \sum_{i=1}^{5} P(B \cap A_i)$$

اما از آنچه در احتمال شرطی مشاهده کردیم داریم :

$$P(B \mid A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \Rightarrow P(B \cap A_i) = P(A_i)P(B \mid A_i)$$

و بنابراین رابطهٔ پرکاربرد زیر حاصل خواهد شد :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{5} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

حال اگر فرض کنیم در حالت کلی A_1 , A_2 , ... و A_n پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، داریم :

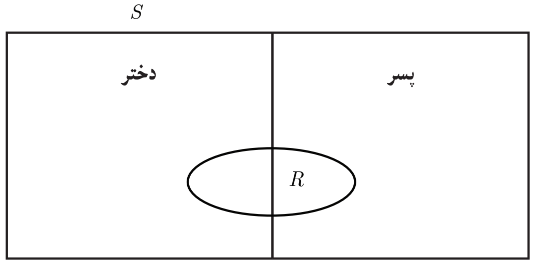
$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

مثال : اگر احتمال به‌دنیا آمدن یک نوزاد پسرِ مبتلا به نوعی بیماری خاص ۰/۰۸ و همین احتمال برای یک نوزاد دختر ۰/۰۳ باشد و خانواده‌ای که قصد بچه‌دار شدن داشته باشد، به چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟

قبل از اینکه مسئلهٔ فوق را حل کنیم فرض کنید که بدانید یکی از اعداد زیر جواب مسئلهٔ فوق است. حدس بزنید کدام عدد می‌تواند جواب باشد؟ برای رد کردن گزینه‌هایی که فکر می‌کنید غلط‌اند دلیل بیاورید.

۱   ۰/۰۹   ۰/۰۸   ۰/۰۵۵   ۰/۰۳   ۰/۰۱   ۰

حل :



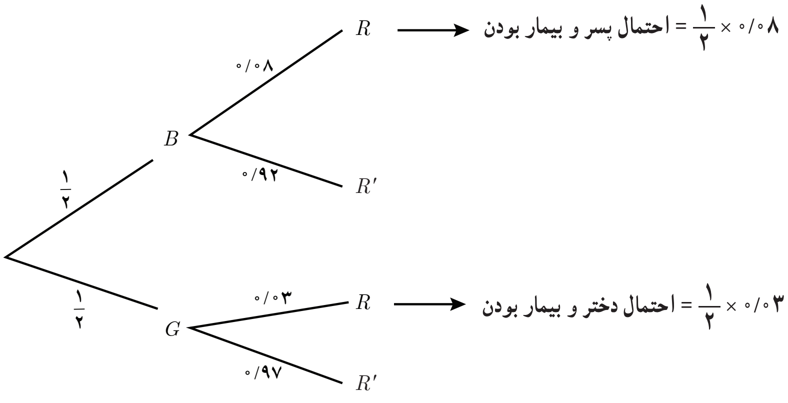
از آنجا که در ابتدا نسبت نوزادان بیمار به کل نوزادان را نداریم، لذا نمی‌توانیم به‌طور مستقیم احتمال مورد نظر را محاسبه نماییم. اما می‌دانیم نسبت نوزادان پسر بیمار به کل نوزادان پسر برابر $\frac{8}{100}$ و همین نسبت برای نوزادان دختر $\frac{3}{100}$ است و احتمال پسر یا دختر بودن نوزاد نیز $\frac{1}{2}$ است. بنابراین با توجه به قانون احتمال کل خواهیم داشت :

P(بیمار بودن) = P(پسر بودن) P(بیمار بودن|پسر بودن) + P(دختر بودن) P(بیمار بودن|دختر بودن)

و اگر پیشامد پسر بودن را با B و دختر بودن را با G و بیمار بودن را با R نمایش دهیم داریم :

$$P(R)=P(B)P(R|B)+P(G)P(R|G)=\frac{1}{2}\times\frac{8}{100}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{100}=\frac{11}{200}$$

برای حل مثال قبل می‌توان از نمودار درختی نیز استفاده کرد. به نمودار درختی زیر که حل مثال قبل را نشان می‌دهد دقت کنید و علت نوشتن هر عدد و راه‌حل ارائه شده را با توجه به راه‌حل ارائه شده در مثال شرح دهید.



$\Rightarrow$ احتمال بیمار بودن = $\frac{1}{2}\times$ ۰/۰۸ + $\frac{1}{2}\times$ ۰/۰۳

مثال : ۴ ظرف داریم. در اولین ظرف ۱۴ مهره قرار دارد که ۴ تای آنها قرمز است. در ظرف دوم همه مهره‌ها قرمزند. در ظرف سوم ۸ مهره قرار دارد و ۶ تای آنها قرمزند و در ظرف چهارم هیچ مهرهٔ قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه مهرهٔ موردنظر قرمز باشد چقدر است؟

حل : پیشامد انتخاب ظرف‌ها را به‌ترتیب با $A_۱$, $A_۲$, $A_۳$ و $A_۴$ و پیشامد خارج شدن مهرهٔ قرمز را با B نمایش می‌دهیم. بنابراین به دنبال یافتن $P(B)$ هستیم و داریم :

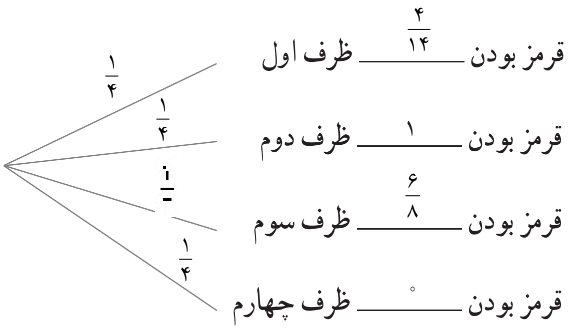
$$P(A_۱)=P(A_۲)=P(A_۳)=P(A_۴)=\frac{۱}{۴}$$

$$P(B|A_۱)=\frac{۴}{۱۴} \qquad P(B|A_۲)=۱ \qquad P(B|A_۳)=\frac{۶}{۸} \qquad P(B|A_۴)=۰$$

$$P(B)=P(A_۱)P(B|A_۱)+P(A_۲)P(B|A_۲)+P(A_۳)P(B|A_۳)+P(A_۴)P(B|A_۴)=$$

$$=\frac{۱}{۴}\times\frac{۴}{۱۴}+\frac{۱}{۴}\times۱+\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}\times۰=\frac{۶۵}{۱۱۲}$$

با نمودار درختی به صورت زیر می‌توان مسئله را حل کرد :

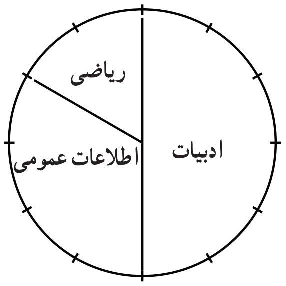


احتمال اینکه مهرهٔ قرمزی خارج شود و از ظرف اول باشد $\frac{۱}{۴}\times\frac{۴}{۱۴}$

احتمال اینکه مهرهٔ قرمزی خارج شود و از ظرف دوم باشد $\frac{۱}{۴}\times۱$

احتمال اینکه مهرهٔ قرمزی خارج شود و از ظرف سوم باشد $\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۴}$

احتمال اینکه مهرهٔ قرمزی خارج شود و از ظرف چهارم باشد $\frac{۱}{۴}\times۰$



مثال : سامان در یک مسابقه شرکت کرده است. سه بسته سؤال که یکی شامل سؤال‌های ادبیات، یکی ریاضی و یکی اطلاعات عمومی است، وجود دارد. اگر سؤال‌های ادبیات را به او بدهند، به احتمال ۹۰ درصد برنده خواهد شد. اگر سؤال‌های ریاضی را به او بدهند، به احتمال ۶۰ درصد و اگر سؤال‌های اطلاعات عمومی را به او بدهند، به احتمال ۸۵ درصد برنده خواهد شد. در صورتی که با چرخاندن عقربهٔ چرخان در شکل مقابل نوع سؤال‌هایی که به او داده می‌شود مشخص شود تعیین کنید او به چه احتمالی برنده خواهد شد؟

حل : اگر انتخاب ادبیات، ریاضی و اطلاعات عمومی را به‌ترتیب با $A_۱$, $A_۲$ و $A_۳$ و برنده شدن سامان را با B نمایش دهیم، خواهیم داشت :

$$P(B)=P(A_۱)P(B|A_۱)+P(A_۲)P(B|A_۲)+P(A_۳)P(B|A_۳)$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۹۰}{۱۰۰}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۶۰}{۱۰۰}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۸۵}{۱۰۰}=\frac{۵}{۶}$$

مثال : دو ظرف داریم. ظرف اول شامل ۶ مهرهٔ سبز و ۴ مهرهٔ آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهرهٔ سبز و ۷ مهرهٔ آبی است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟

حل : مهرهٔ انتخاب شده از ظرف اول یا سبز است و یا آبی. اگر این پیشامدها را به‌ترتیب با G و B و پیشامد انتخاب مهرهٔ سبز از ظرف دوم را با A نمایش دهیم خواهیم داشت : $P(B)=\frac{۴}{۱۰}$ و $P(G)=\frac{۶}{۱۰}$ و $P(A|G)=\frac{۶}{۱۳}$ (چرا؟) و $P(A|B)=\frac{۸}{۱۳}$ (چرا؟). در این صورت داریم :

$$P(A)=P(G)P(A|G)+P(B)P(A|B)=\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۶}{۱۳}+\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۸}{۱۳}=\frac{۶۸}{۱۳۰}$$

تمرین‌ها

۱) دو جعبه داریم. درون یکی از آنها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آنها معیوب است و درون جعبهٔ دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب‌اند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟

۲) فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد بزرگسال و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به‌ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟

۳) در یک جامعه ۵ درصد مردان و ۴ درصد زن‌ها به نوعی بیماری خاص مبتلا هستند. از طرفی مردان مبتلا به این بیماری به احتمال ۰/۷ و زنان مبتلا به این بیماری به احتمال ۰/۶ بهبود می‌یابند. اگر بخواهیم فردی از این جامعه انتخاب کنیم، با چه احتمالی فرد مورد نظر به بیماری مذکور مبتلا گشته و بهبود یافته است؟

۴) در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A، ۲ تا از نوع B و ۱۵ تا از نوع C وجود دارد و احتمال اینکه عمر آنها از ۱۰ سال بیشتر باشد برای نوع A، $\frac{۴}{۵}$، برای نوع B، $\frac{۹}{۱۰}$ و برای نوع C، $\frac{۱}{۲}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟

۵) مینا در انتخاب رشتهٔ خود برای تحصیل در دبیرستان بین سه رشتهٔ ریاضی، تجربی و انسانی مردد است. اگر او رشتهٔ ریاضی را انتخاب کند، به احتمال ۰/۴۵، اگر تجربی را انتخاب کند به احتمال ۰/۱ و اگر انسانی را انتخاب کند به احتمال ۰/۳ در آزمون ورودی دانشگاه پذیرفته خواهد شد. اگر احتمال اینکه او رشتهٔ ریاضی را انتخاب کند ۰/۱، احتمال اینکه رشتهٔ تجربی را انتخاب کند ۰/۶ و احتمال اینکه رشتهٔ انسانی را انتخاب کند ۰/۳ باشد، با چه احتمالی در دانشگاه پذیرفته خواهد شد؟

فصل ۵

هندسه

www.kurdbsw.ir
ریاضی
پایه
دوازدهم

شهر گور اولین شهر دایره‌ای در ایران و یکی از نخستین شهرهای دایره‌ای در جهان، در نزدیکی فیروزآباد فارس واقع شده است. قدمت این شهر باستانی به دورهٔ هخامنشیان می‌رسد. طرح و الگوی این شهر دایره‌ای به قطر دو کیلومتر و دارای چهار دروازهٔ اصلی بوده و بناهای حکومتی و محل اقامت درباریان در آن قرار داشته است. پس از اسلام، اعراب این شهر را جور تلفظ می‌کردند و مورخان قدیم این واژه را دشت یا گودال معنی کرده‌اند. به نقل از تاریخ طبری، اردشیر بنای این شهر را در حدود ۲۲۴ میلادی و به نشانهٔ قدرت‌نمایی در برابر آخرین شاه اشکانی آغاز کرده است.

درس اوّل — **تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی**

درس دوم — **دایره**

درس اوّل

تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

چهرهٔ پدربزرگ یا مادربزرگ خود را در ذهن تصور کنید. چه ویژگی‌هایی دارد؟ اگر بیست سال جوان‌تر بود به چه شکل بود؟

برای دوستتان توصیف کنید که خانه‌تان چه شکلی است؟ تصور کنید یک اتاق کمتر یا آشپزخانهٔ بزرگ‌تری داشتید. در این صورت خانهٔ جدید، چه شکلی بود؟

به مسیری که هر روز از خانه تا مدرسه طی می‌کنید، فکر کنید. آیا می‌توانید این مسیر را با رسم یک تصویر مناسب توضیح دهید؟

چشمانتان را ببندید و خود را در مکانی آرام و شاد که دلخواه شماست، تجسم کنید. آیندهٔ خود را با تمام جزئیات آن، مثل محل زندگی، شغلی که دوست دارید و مسئولیت‌هایی که تمایل دارید بر عهده داشته باشید، در ذهن مجسم کنید. این آینده را با چه جملاتی توصیف می‌کنید؟

در تمام حالت‌های بالا شما به موضوعی فکر کردید، اما از عبارات، جملات و شیوه‌های زبانی برای تفکر استفاده نکردید. در واقع به جای کلمات، تصاویری در ذهن شما نقش بستند و این تصویرسازی ذهنی، به شما کمک کرد که به آن موضوع یا موقعیت فکر کنید. این شیوه از تفکر را **تفکر تجسمی** می‌نامیم.

فرایند تفکر تجسمی، مستلزم تشکیل و دست‌ورزی تصاویر با قلم و کاغذ، فناوری و یا به صورت ذهنی است که به بررسی، کشف و درک مفاهیم منجر می‌شود. این نوع از تفکر، نقش مهمی در حل مسئله‌های ریاضی و همین‌طور مسائل زندگی روزمره دارد. تجسم ذهنی یک جسم پس از چرخاندن آن در فضا، ترسیم سطح گستردهٔ اجسام هندسی و ترسیم یک جسم سه بعدی روی سطح، ترسیم نماهای مختلف اجسام، دوران شکل حول یک نقطه یا حول یک محور در صفحه و فضا، تجسم اجسام هندسی بعد از برش و موقعیت‌های مختلف دیگر

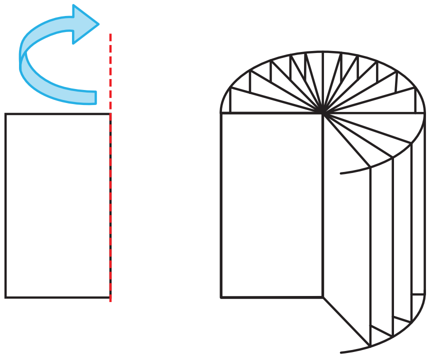
می‌تواند به تقویت تفکر تجسمی منجر شود. از آنجا که هدف کلی این درس آشنایی با مقاطع مخروطی است، از بین این موقعیت‌ها، **دوران** اشکال هندسی حول یک محور و **برش** اجسام را بررسی می‌کنیم.

دوران حول محور

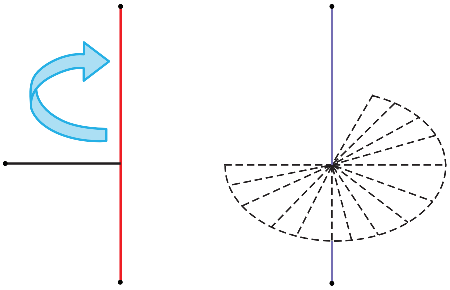
وقتی یک شکل هندسی حول یک محور دوران داده می‌شود، جسم‌های مختلف هندسی ساخته می‌شود. در فعالیت زیر نمونه‌هایی از این مفهوم ارائه شده است. در هر مورد، شکل حاصل از دوران حول محور را مشخص کنید.

فعالیت

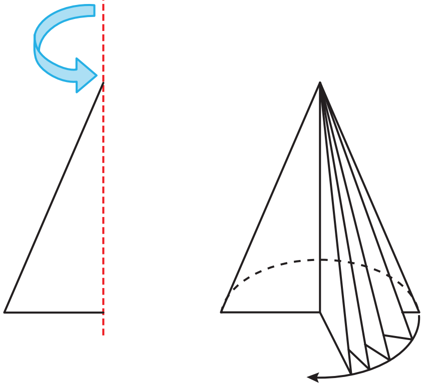
الف) شکل حاصل از دوران یک مستطیل، حول طول یا عرض آن : ....



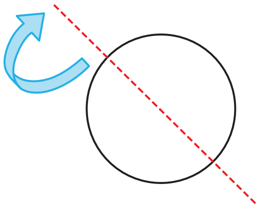
ب) شکل حاصل از دوران یک پاره خط، حول پاره خط دیگری که بر آن عمود است : ....



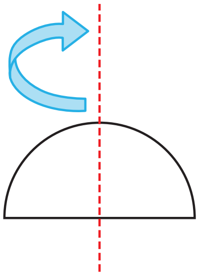
پ) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمه : ....



ت) شکل حاصل از دوران یک دایره، حول یکی از قطرهای آن : ....



ث) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن : ....



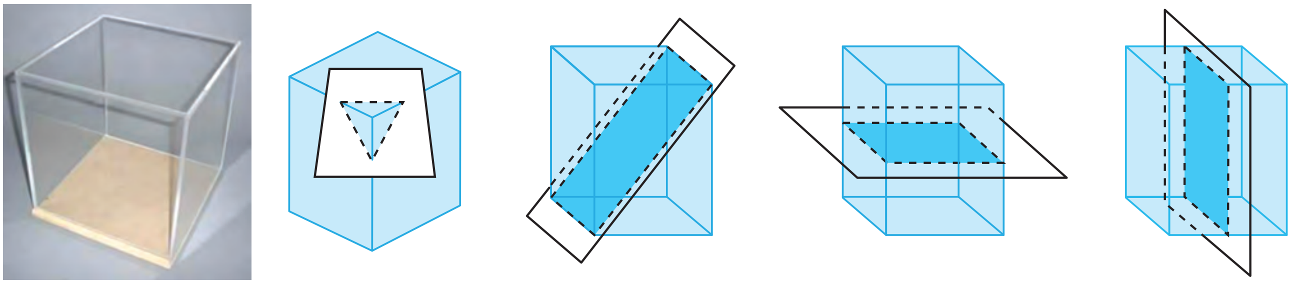
برش

در فعالیت بالا از دوران شکل، حول یک محور، یک جسم دو بعدی یا سه بعدی تشکیل شد. حال فرض کنید می‌خواهیم اجسام سه‌بعدی را برش بزنیم و تغییرات آن را بعد از برش تجسم کنیم. در زندگی روزمره بارها با برش اجسام مختلف هندسی مواجه بوده‌اید. این اجسام می‌توانند توپر یا توخالی باشند.

شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، **سطح مقطع** آن نامیده می‌شود.

فعالیت

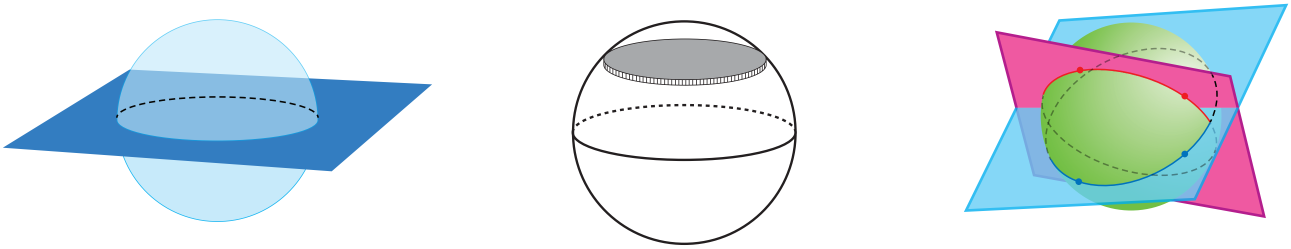
الف) سطح مقطع یک جعبهٔ توخالی به شکل مکعب مستطیل، در برخورد با صفحات قائم، افقی و مایل به چه شکل است؟



ب) سطح مقطع استوانه با صفحه‌های افقی، عمودی و صفحهٔ مایلی که با قاعده‌های استوانه متقاطع نباشد، به چه شکل است؟

.... بیضی ....

پ) سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟
در چه حالتی این سطح مقطع، بیشترین مساحت ممکن را دارد؟



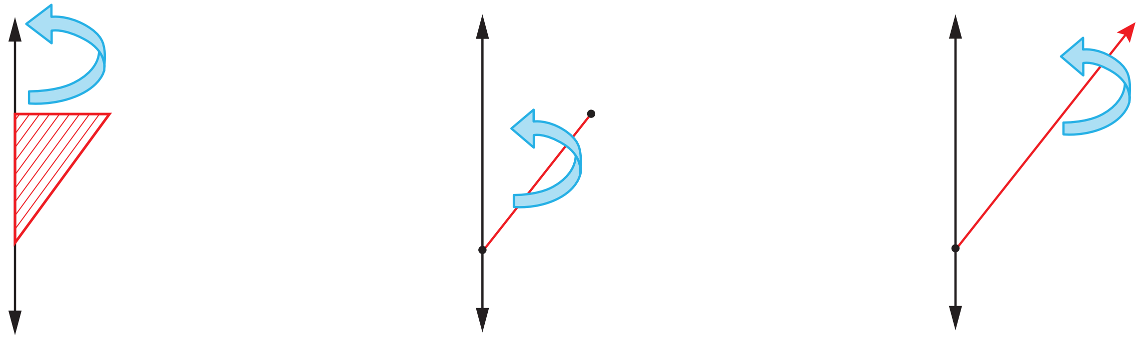
کار در کلاس

۱ در هر حالت، شکل حاصل از دوران حول محور را مشخص کنید و آنها را با هم مقایسه کنید :

الف) شکل حاصل از دوران نیم‌خط حول محور

ب) شکل حاصل از دوران پاره‌خط حول محور

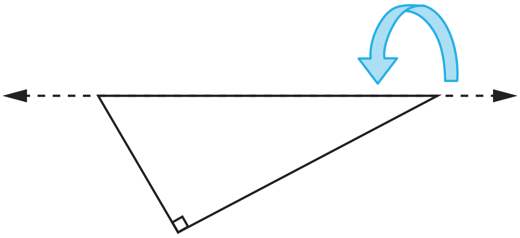
پ) شکل حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول محور



مخازن نفتی در زنجان

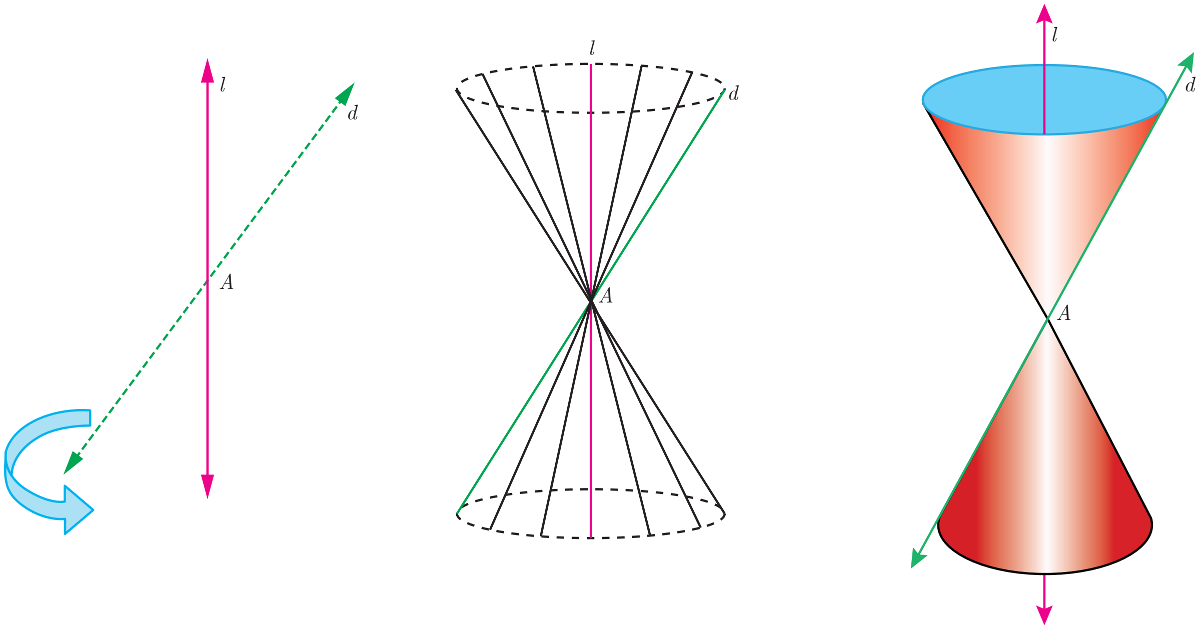
۲ مستطیلی را حول عرض آن دوران داده‌ایم.
الف) شکل حاصل را رسم کنید.
ب) اگر ابعاد مستطیل، ۳و۴ باشد، مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحهٔ افقی با این استوانه چقدر است؟
پ) در حالت ب، اگر صفحه‌ای عمود بر استوانه آن را قطع کند، بیشترین مساحت ممکن برای سطح مقطع حاصل چقدر است؟
ت) در چه حالتی سطح مقطع حاصل از برخورد یک استوانه، با صفحه‌ای که بر قاعدهٔ آن عمود است، یک مربع است؟
ث) اگر مستطیلی را حول طول آن دوران دهیم، در حالت کلی آیا حجم شکل با حالتی که مستطیل را حول عرض آن دوران بدهیم، یکی است؟

۳ شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن چیست؟



آشنایی با مقاطع مخروطی

دو خط d و l در نقطه‌ای مثل A متقاطع‌اند. اگر خط d را حول خط l دوران دهیم، شکل حاصل یک **سطح مخروطی** نامیده می‌شود. در این حالت خط l **محور**، نقطهٔ A، **رأس** و خط d، **مولد** این سطح مخروطی است.

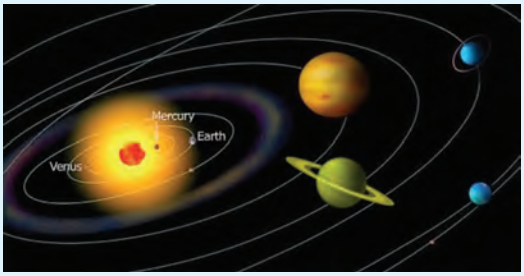


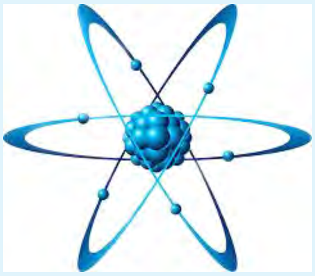
حال می‌خواهیم این سطح مخروطی را با صفحات مختلف برش بزنیم و در هر حالت سطح مقطع پدید آمده را بررسی کنیم. وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه برش داده می‌شود، در هر حالت سطح مقطع، یک منحنی است. از آنجا که این منحنی‌ها، حاصل تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی هستند، **مقاطع مخروطی** نامیده می‌شوند. در ادامه با انواع مقاطع مخروطی آشنا خواهیم شد.

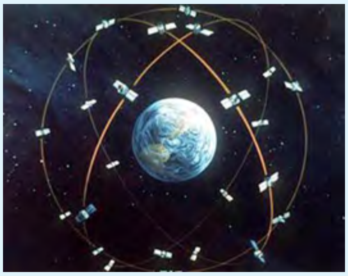
خواندنی

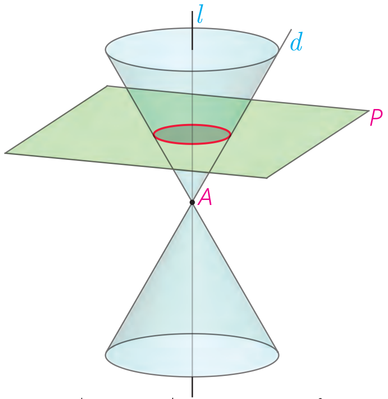
مقاطع مخروطی ابتدا توسط یونانیان باستان مورد مطالعه قرار گرفتند و به مرور زمان در مطالعهٔ مدار سیاره‌ها، ستاره‌های دنباله‌دار و قمرهای مصنوعی کاربردهای زیادی پیدا کردند.

این منحنی‌ها همچنین در مطالعهٔ ساختار اتم‌ها، سیستم‌های راهنمای هواپیماها، ساخت عدسی‌ها، نقشه‌برداری، وسایل نوری، وسایل پیش‌بینی هوا، ارتباطات قمرهای مصنوعی، ساختن پل و علاوه بر آن در جنگ، پزشکی و اقتصاد به‌کار می‌روند.

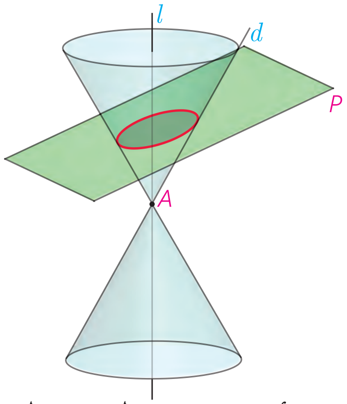




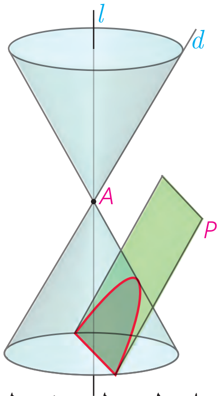




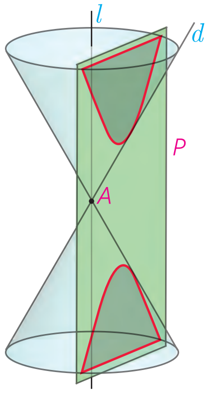
الف) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل **دایره** است.



ب) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود، سطح مقطع به شکل **بیضی** خواهد بود.

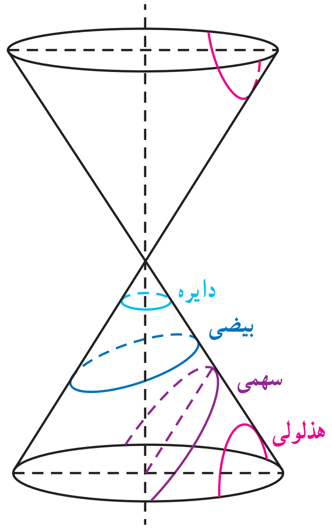


پ) اگر صفحهٔ P با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک **سهمی** است.



ت) اگر صفحهٔ P سطح مخروطی را، هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور نکند، سطح مقطع حاصل را **هذلولی**[1] می‌نامیم.

۱ــ تعریف دقیق هذلولی و بررسی ویژگی‌های آن، جزء اهداف این کتاب نیست.



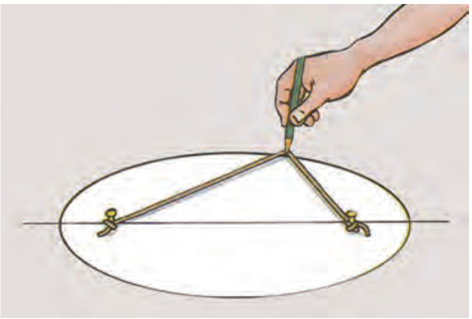
بدین ترتیب مقاطع مخروطی عبارت‌اند از دایره، بیضی، سهمی و هذلولی.

در ادامهٔ این درس قصد داریم بیضی و ویژگی‌های آن را بدون معرفی معادلهٔ آن، مورد بررسی قرار دهیم.

بیضی

حتماً می‌دانید که به کمک یک قطعه نخ چگونه می‌توان یک دایره رسم کرد. در این فعالیت می‌خواهیم ببینیم طریقهٔ رسم بیضی به کمک یک قطعه نخ چگونه است و حین انجام این فعالیت، ویژگی‌های بیضی را بهتر بشناسیم.

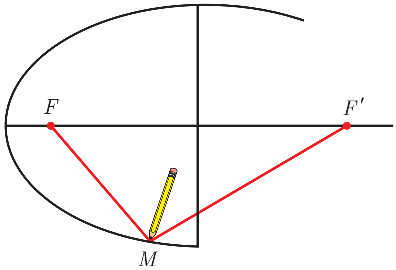
فعالیت



روی یک تخته چوبی، دو میخ به فاصله دلخواه بکوبید و یک قطعه نخ به طول l را به میخ‌ها گره بزنید. دقت داشته باشید که برای رسم بیضی لازم است که طول نخ از فاصلهٔ بین دو میخ، بیشتر باشد. حالا مطابق شکل، مدادتان را در حالتی که قطعه نخ از دو طرف کاملاً کشیده شده است، روی صفحه حرکت دهید.

شکل حاصل منحنی بسته‌ای است که به آن **بیضی** می‌گوییم.

همان‌طور که دیدید دو میخ در واقع نشان‌دهندهٔ دو نقطهٔ ثابت در بیضی هستند. این دو نقطه را **کانون‌های**[1] **بیضی** می‌نامند.



اگر کانون‌های بیضی را با F و F' نمایش دهیم و نقطه‌ای مثل M یک نقطهٔ دلخواه از بیضی باشد، مجموع فواصل این نقطه از نقاط F و F' یعنی $MF + MF'$ برابر با چیست؟

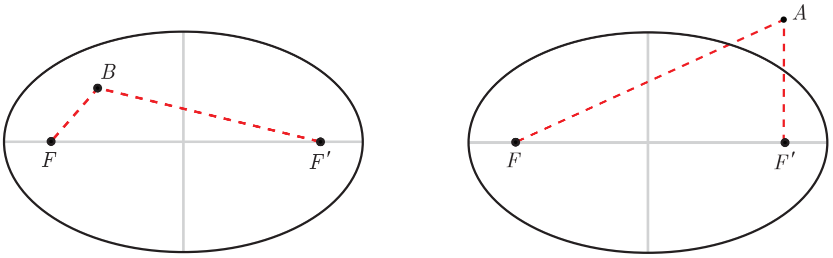
....

بدین ترتیب بیضی، مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطهٔ ثابت واقع در صفحه، برابر با مقداری ثابت است.[2]

۱ــ Foci

۲ــ اثبات اینکه سطح مقطع مخروطی معرفی شده به عنوان بیضی، با این تعریف همخوانی دارد، خارج از اهداف این کتاب است.

می‌توان نشان داد که اگر نقطهٔ دلخواه A بیرون بیضی باشد، مجموع فواصل آن از نقاط F' و F بیشتر از l و اگر نقطهٔ دلخواه B، داخل بیضی باشد، فاصلهٔ آن از دو نقطهٔ F' و F کمتر از l خواهد بود.



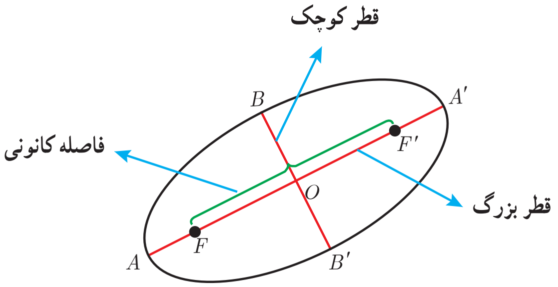
بیضی مقابل را در نظر بگیرید.

در این بیضی کانونها را F و F' نامیده‌ایم.

در هر بیضی اندازهٔ FF'، **فاصلهٔ کانونی** بیضی نامیده می‌شود.

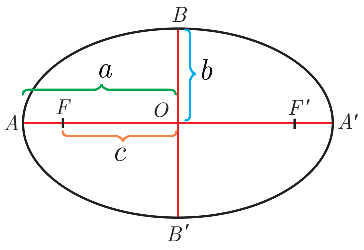
نقطهٔ میانی پاره‌خط FF'، **مرکز بیضی** است که آن را نقطهٔ O نامیده‌ایم.

قطری که از کانون‌های بیضی می‌گذرد یعنی AA'، **قطر بزرگ** یا **قطر کانونی** بیضی است. قطری که بر قطر کانونی بیضی عمود است، یعنی قطر BB'، **قطر کوچک** بیضی نامیده می‌شود.



فعالیت

بیضی مقابل را در نظر بگیرید. اندازهٔ پاره‌خط‌های OA، OB و OF را به‌ترتیب با a، b و c نمایش داده‌ایم. می‌دانیم که مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون بیضی مقداری ثابت است.



۱ می‌خواهیم نشان دهیم قطر کانونی بیضی طولی برابر با همین مقدار ثابت دارد.

در رسم بیضی، حالتی را در نظر بگیرید که نوک مداد روی نقطهٔ A قرار دارد. در این‌صورت :

$$AF+AF'=AF+(AF+FF')=۲AF+FF' \quad (۱)$$

به همین ترتیب فرض کنید نوک مداد روی نقطهٔ A' قرار دارد. در این صورت داریم :

$$A'F'+A'F= \text{.........................} \quad (۲)$$

از مقایسهٔ رابطهٔ (۱) و (۲) و برابری سمت چپ دو رابطه داریم : $AF=\cdots\cdots$

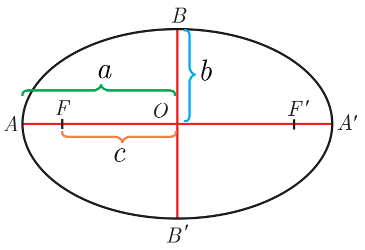
بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $OA=\cdots\cdots$ پس مرکز بیضی، قطر بزرگ را نصف می‌کند و داریم : $AA'=\cdots\cdots=۲a$.

به عبارتی :

$$AF+AF'=AF+(AF+FO+\cdots)=۲AF+۲\cdots\cdots=۲(AF+\cdots)=۲a$$

بنابراین

مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با ....



۲ حال قصد داریم رابطهٔ بین a، b و c را پیدا کنیم. در رسم بیضی حالتی را در نظر بگیرید که نوک مداد روی نقطهٔ B است. می‌دانیم این نقطه روی عمود منصف پاره‌خط FF' است. (چرا؟)

بنابراین به کمک قسمت قبلی فعالیت، اندازهٔ BF چقدر است؟ چرا؟

بدین ترتیب رابطهٔ بین a، b و c چیست؟

سؤال : آیا مرکز بیضی قطر کوچک را هم نصف می‌کند؟ چرا؟

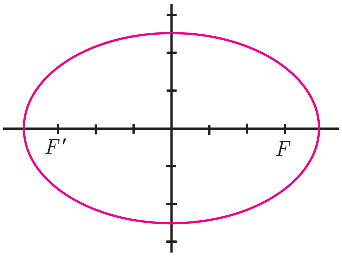
بنابراین :

اگر در یک بیضی، نیم قطر بزرگ را a، نیم قطر کوچک را b و نصف فاصلهٔ کانونی بیضی را c بنامیم، آنگاه ....

مثال :

اگر در یک بیضی $c=3$ و $a=4$ اندازه قطر کوچک بیضی چقدر است؟

حل :

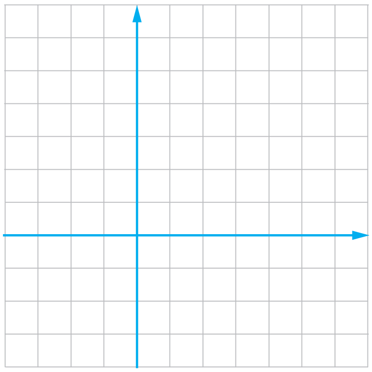


$$b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow b = \sqrt{7}$$

و بنابراین اندازهٔ قطر کوچک برابر است با $2\sqrt{7}$.

کار در کلاس

۱ اگر در یک بیضی داشته باشیم $a=5$ و $b=3$، در این‌صورت اندازهٔ فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید.



۲ در یک بیضی طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است.

اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات (۴،۵) باشد :

الف) فاصلهٔ کانونی بیضی را پیدا کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و همچنین کانون‌های بیضی را بنویسید.

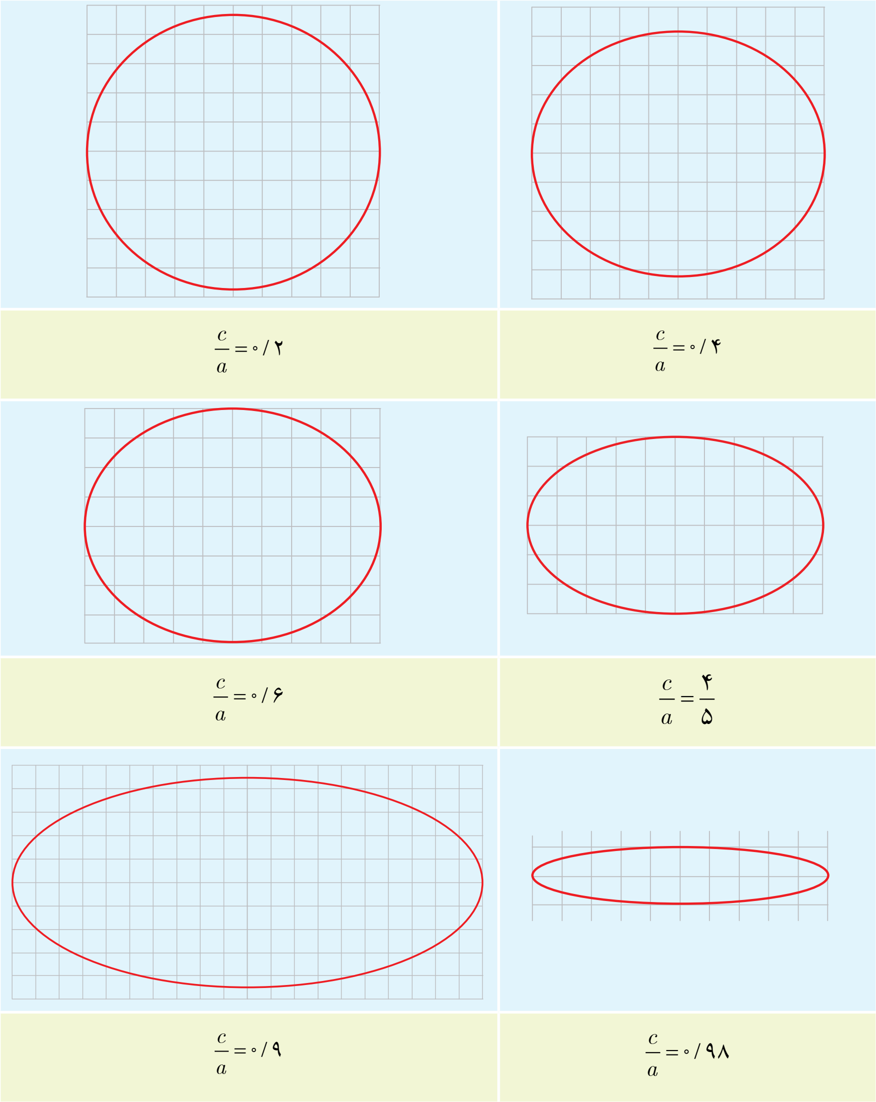
خروج از مرکز

همان‌طور که دیدید اندازهٔ قطر بزرگ، قطر کوچک و فاصلهٔ کانونی یک بیضی مقادیری به هم وابسته‌اند. بدیهی است که همیشه مقدار a از مقدار b و c بیشتر است (چرا؟).

اندازه‌های a، b و c بر شکل بیضی تأثیرگذار است و همواره ۱ $\geq \frac{c}{a} \geq$ ۰ (چرا؟). هر چه نسبت $\frac{c}{a}$، بزرگ‌تر و به ۱ نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی کشیده‌تر می‌شود و هر چه مقدار $\frac{c}{a}$ کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی به شکل دایره نزدیک‌تر خواهد شد.

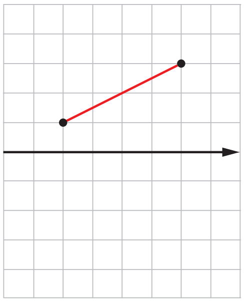
> مقدار $\frac{c}{a}$ را **خروج از مرکز بیضی** می‌نامند و معمولاً آن را با حرف e نمایش می‌دهند.

در ادامه چند بیضی با مقادیر مختلف e رسم شده است. تأثیر اندازهٔ خروج از مرکز را بر شکل بیضی بررسی کنید.



اگر مقدار خروج از مرکز بیضی برابر ۱ شود، شکل بیضی چگونه خواهد بود؟ اگر برابر صفر باشد، چطور؟

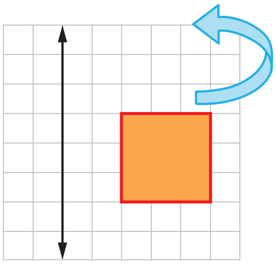
تمرین



۱ در شکل زیر پاره‌خط داده شده را حول محور دوران داده‌ایم.

الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟



۲ مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل در فاصلهٔ ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد.

الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل را در برخورد با صفحه‌ای موازی با قاعدهٔ آن توصیف کنید.

۳ اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟

۴ کانون‌های یک بیضی نقاط (۳ ,۱) و (۵- ,۱) است.

الف) فاصلهٔ کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادلهٔ قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

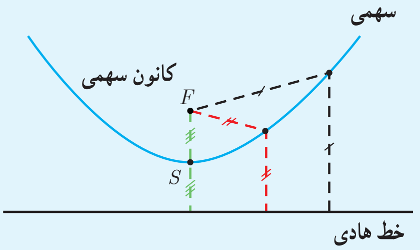
ب) اگر $a=۶$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

۵ خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$، مرکز آن (۱- ، ۴-) و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون‌های بیضی را پیدا کنید.

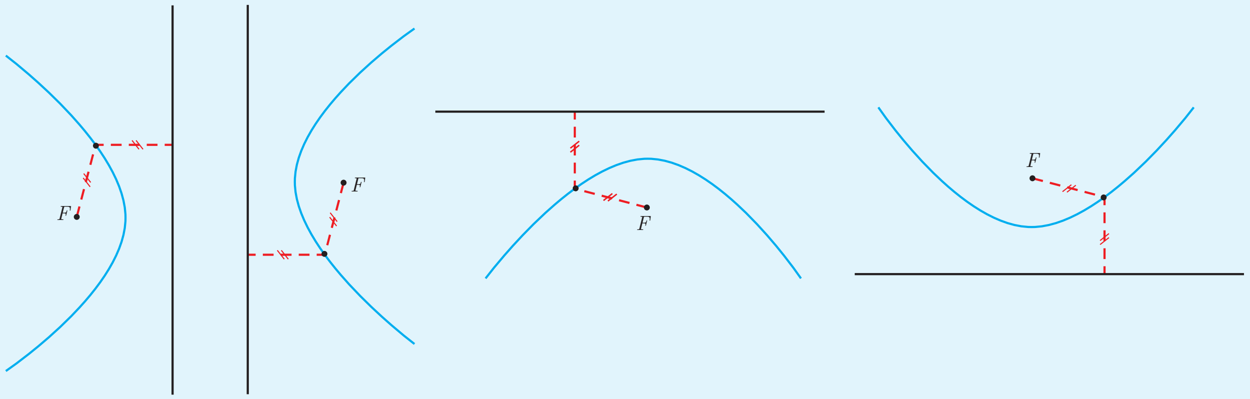
خواندنی

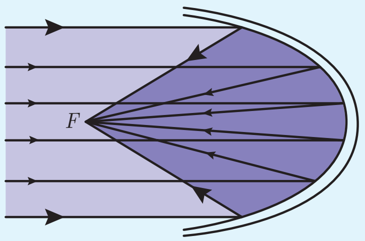


در سال‌های گذشته با معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ آشنا شدید و نمودار آن را سهمی نامیدید. سهمی به بیان دقیق‌تر، مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک خط ثابت داده شده در آن صفحه و یک نقطهٔ ثابت غیر واقع بر آن خط و در همان صفحه، به یک فاصله است. این نقطهٔ ثابت را **کانون سهمی** و خط ثابت را **خط هادی سهمی** می‌نامند.

شکل مقابل یک سهمی را نمایش می‌دهد. همان‌طور که می‌بینید تمام نقاط روی سهمی از نقطهٔ ثابت F و خط هادی فاصله‌ای برابر دارند. اگر از نقطهٔ F به خط هادی عمود کنیم، محل تقاطع خط عمود و سهمی، نقطه‌ای است که به آن **رأس سهمی** می‌گویند و در این شکل آن را S نامیده‌ایم.

نمودارهای زیر، حالت‌های مختلف سهمی را نمایش می‌دهد.





سهمی‌ها ویژگی جالبی دارند که در ساخت آینه‌های سهموی، تلسکوپ‌ها، چراغ‌های جلو اتومبیل، آنتن‌های سهموی رادار، میکرو ویو و گیرنده‌های بشقابی تلویزیون کاربرد دارد. پرتوهایی که از کانون سهمی به سهمی برخورد می‌کنند، موازی با محور سهمی (عمود بر خط هادی) خارج می‌شوند و بالعکس، پرتوهایی که موازی با محور سهمی به آن می‌تابند، دقیقاً در کانون سهمی جمع می‌شوند.

به عنوان مثال معمولاً جدارهٔ پشت لامپ خودروها، آینه‌ای به شکل سهمی است. چراغ خودرو دقیقاً در کانون این سهمی قرار داده می‌شود و بدین ترتیب شعاع‌های نور بعد از برخورد با جدارهٔ آینه‌ای به‌صورت پرتوهای موازی با محور سهمی به جلو بازتاب می‌یابند و روشنایی بیشتری را موجب می‌شوند.

جابه‌جایی اندک لامپ در راستای عمودی، باعث خروج پرتوهای نور رو به بالا یا رو به پایین می‌شود که اصطلاحاً به آن نور بالا یا نور پایین گفته می‌شود.

درس دوم

دایره

بنای دایره‌ای شکل مجموعه تئاتر شهر، تهران

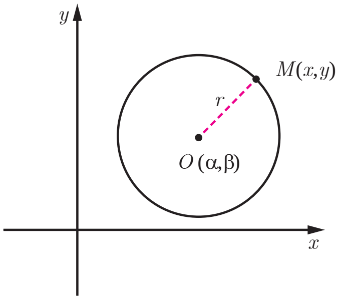
زیربنای برج میلاد با نقشهٔ دایره‌ای شکل به قطر ۶۶ متر

دایره یکی از شکل‌های مهم هندسی است که با تعریف آن و برخی ویژگی‌های آن آشنا شده‌اید. می‌دانیم دایره، مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ ثابتی در صفحه، مقداری ثابت است. این نقطهٔ ثابت را **مرکز دایره** و مقدار ثابت را **اندازهٔ شعاع دایره** می‌نامیم. دایرهٔ C را به مرکز O و شعاع r معمولاً با نماد $C(O,r)$ نمایش می‌دهیم.

فعالیت

در این درس به کمک دستگاه مختصات، به تحلیل برخی از ویژگی‌های دایره خواهیم پرداخت.

دایرهٔ $C(O,r)$ را در دستگاه مختصات به گونه‌ای در نظر بگیرید که مرکز آن نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$ و نقطهٔ $M(x,y)$ نقطهٔ دلخواهی روی آن باشد. می‌دانیم که فاصلهٔ مرکز دایره از تمام نقاط روی آن برابر با مقدار ثابت r است.



بنابراین به کمک رابطهٔ فاصلهٔ دو نقطه که در سال‌های گذشته با آن آشنا شدیم، داریم :

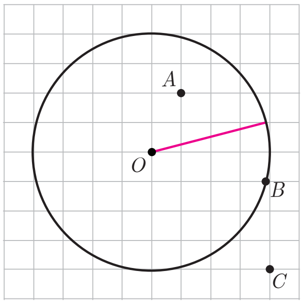
$$OM=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$$

با جایگزینی مقدار r به جای OM و حذف رادیکال خواهیم داشت :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

رابطهٔ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r در صفحهٔ مختصات است که به آن **معادلهٔ استاندارد دایره** می‌گوییم.

به سادگی می‌توان دید که :



الف) اگر نقطه‌ای مثل B **روی دایره** باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است و $OB = r$

ب) اگر نقطه‌ای مثل A **درون دایره** باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره .... شعاع دایره است

و $OA \square r$

پ) اگر نقطه‌ای مثل C **بیرون دایره** باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره .... شعاع دایره است

و $OC \square r$

بدین‌ترتیب اگر معادلهٔ دایرهٔ $C(O,r)$ به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r در دستگاه مختصات داده شده باشد، می‌توان وضعیت نقاط مختلف صفحه را نسبت به دایره بررسی کرد :

نقاطی که در معادلهٔ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ صدق کنند، نقاطی هستند که روی دایره قرار دارند.

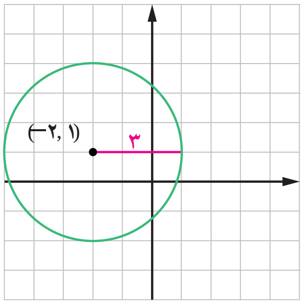
مجموعه جواب نامعادلهٔ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2<r^2$ نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که ....

مجموعه جواب نامعادلهٔ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2>r^2$ نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که ....

مثال

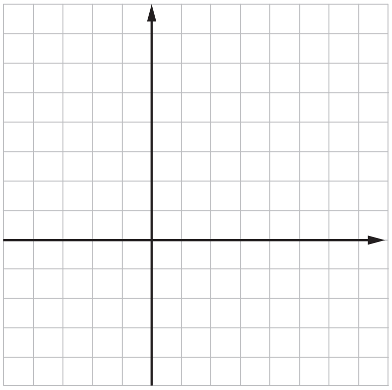
الف) اگر مرکز دایره‌ای نقطهٔ $(-2,1)$ و شعاع آن ۳ باشد، معادلهٔ استاندارد دایره به شکل زیر خواهد بود :

$$(x+2)^2+(y-1)^2=9$$



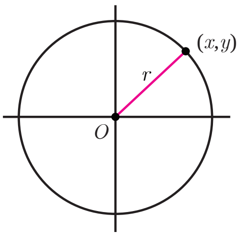
ب) اگر معادلهٔ دایره‌ای به شکل $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ باشد، مختصات مرکز آن .... و اندازهٔ شعاع برابر با .... است.

این دایره را در دستگاه مختصات رسم کنید.



کار در کلاس

۱ در هر حالت معادلهٔ دایره را بنویسید :



الف) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲.

ب) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r.

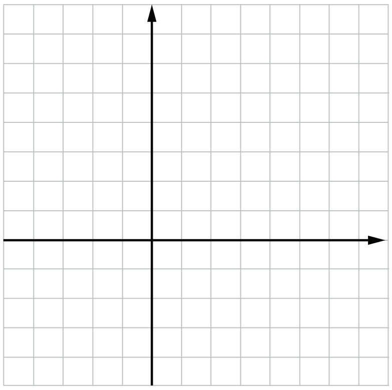
پ) دایره‌ای که از نقطهٔ (۳-,۱) بگذرد و مرکز آن (۱-,۲) باشد.

۲ در هر حالت، وضعیت هر نقطه را نسبت به دایره مشخص کنید :

نقاط			شعاع و مختصات مرکز دایره	معادلهٔ دایره
C(۲- , ۴)	B(۰ , ۳)	A(۱ , ۱)		
....	....	....	....	$(x+2)^2+(y-3)^2=4$
....	بیرون دایره	....	دایره به مرکز (۲- ,۱) و شعاع ۳	....

۳ اگر معادلهٔ دایره‌ای به شکل $(x+1)^2+y^2=4$ باشد :

الف) مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع دایره را بنویسید.

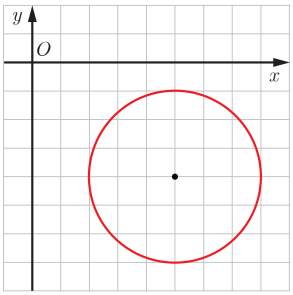


ب) مختصات نقاط تقاطع این دایره را با محورهای مختصات پیدا کنید.

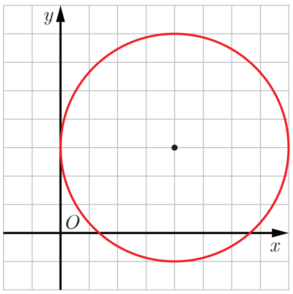
(**راهنمایی :** برای پیدا کردن نقاط تقاطع دایره با محور x، در معادلهٔ داده شده مقدار y را برابر صفر قرار دهید و برای پیدا کردن نقاط برخورد با محور y، مقدار x را صفر در نظر بگیرید.)

پ) شکل این دایره را رسم کنید.

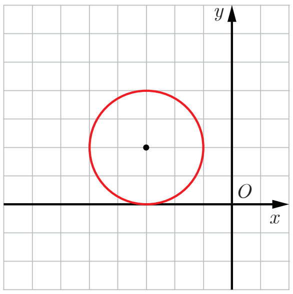
۴ معادلهٔ هر دایره را بنویسید :



....



....



....

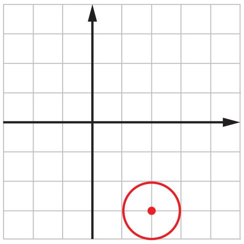
معادلهٔ گستردهٔ یک دایره

معادلهٔ هر دایره را علاوه بر شکل استاندارد، به کمک اتحادها به‌شکل دیگری نیز می‌توان نمایش داد که به آن معادلهٔ گسترده یا معادلهٔ ضمنی دایره می‌گوییم. در ادامه با نحوهٔ نوشتن این معادله آشنا خواهیم شد.

برای سادگی از یک مثال کمک می‌گیریم.

معادلهٔ دایرهٔ $(x-۲)^۲+(y+۳)^۲=۱$ را در نظر بگیرید.

این معادله را می‌توان به شکل زیر ساده کرد :



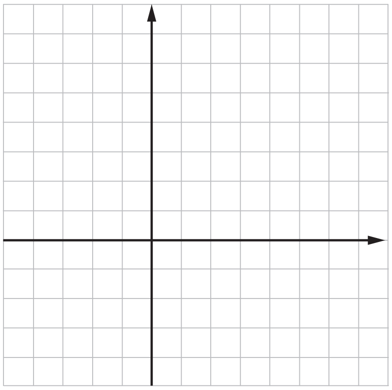
$$x^۲-۴x+۴+y^۲+۶y+۹=۱$$
$$\to x^۲+y^۲-۴x+۶y+۱۲=۰$$

این رابطه را **معادلهٔ گستردهٔ دایره** می‌نامیم.

بدیهی است که معادلهٔ استاندارد دایره و معادلهٔ گستردهٔ آن به یکدیگر قابل تبدیل‌اند.

برای مثال فرض کنید معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به شکل $x^۲+y^۲-۶x+۲y+۶=۰$ باشد.

عبارت داده شده را به شکل مجموع دو مربع کامل می‌نویسیم. داریم :



$$x^۲+y^۲-۶x+۲y+۶=۰$$
$$\to (x^۲-۶x)+(y^۲+۲y)+۶=۰$$
$$\to (x-۳)^۲-۹+(y+۱)^۲-۱+۶=۰$$
$$\to (x-۳)^۲+(y+۱)^۲=۴$$

مختصات مرکز و شعاع این دایره را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

اگر در حالت کلی معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به شکل $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ داده شده باشد، با تبدیل $x^۲+ax$ و $y^۲+by$ به دو مربع کامل داریم :

$$(x^۲+ax)+(y^۲+by)+c=۰$$

$$\to (x+\frac{a}{۲})^۲-\frac{a^۲}{۴}+(y+\frac{b}{۲})^۲-\frac{b^۲}{۴}+c=۰$$

$$\to (x+\frac{a}{۲})^۲+(y+\frac{b}{۲})^۲=\frac{a^۲}{۴}+\frac{b^۲}{۴}-c=\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}$$

بدین ترتیب :

> اگر $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ **معادلهٔ گستردهٔ** یک دایره باشد، مختصات مرکز این دایره $O(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})$ است.
>
> شعاع این دایره برابر است با : $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$

بدیهی است که با توجه به عبارت زیر رادیکال در این رابطه، معادلهٔ $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادلهٔ یک دایره است اگر و تنها اگر رابطهٔ $a^۲+b^۲>۴c$ برقرار باشد.

کار در کلاس

۱ معادلهٔ گستردهٔ دایره‌ای به شکل $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ است. مختصات مرکز این دایره و شعاع آن‌را پیدا کنید و معادلهٔ دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

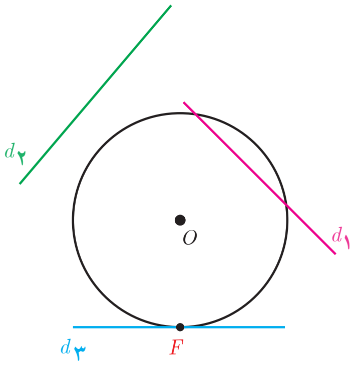
۲ چه نقاطی در نامعادلهٔ زیر صدق می‌کنند. پاسخ خود را با رسم شکل مشخص کنید.

$$x^2+4x+y^2-12\leq 0$$

اوضاع نسبی خط و دایره

در سال‌های گذشته به طور شهودی با اوضاع نسبی خط و دایره آشنا شده‌اید. در این فعالیت قصد داریم به کمک معادلهٔ دایره و خط، این مفاهیم را مرور کنیم.

دایره $C(O,r)$ را در صفحه در نظر بگیرید. با توجه به شکل به سادگی می‌توان دید که خط و دایره می‌توانند **یک**، یا **دو** نقطهٔ اشتراک داشته، یا **هیچ** نقطهٔ اشتراکی نداشته باشند.



الف) در حالتی که خط و دایره تنها یک نقطهٔ اشتراک داشته باشند، خط بر دایره **مماس** است.

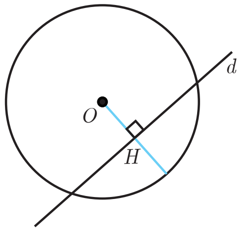
ب) در حالتی که خط و دایره دو نقطهٔ مشترک داشته باشند، خط و دایره را **متقاطع** می‌نامیم. در این حالت خط را نسبت به دایره، **قاطع** می‌نامند.

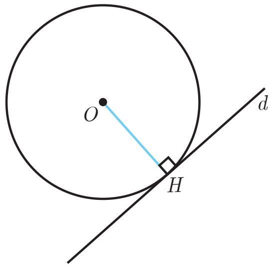
می‌توان دید که :

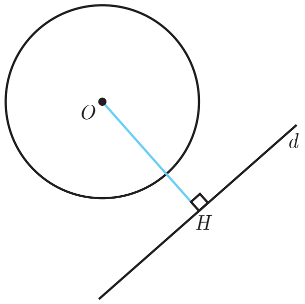
اگر خط d با دایره متقاطع باشد، $OH<r$ است.

اگر خط d بر دایره مماس باشد، $OH=r$ است.

اگر خط d، دایره را قطع نکند، $OH>r$ است.







یادآوری

۱ــ خط مماس در نقطهٔ تماس با دایره، بر شعاع آن دایره عمود است.

۲ــ فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=0$ برابر است با :

$$d=\frac{|ax_0+bx_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

اگر معادلهٔ دایرهٔ $C(O,r)$ به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r در دستگاه مختصات داده شده باشد، می‌توان وضعیت خطوط مختلف صفحه را نسبت به دایره بررسی کرد :

مثال

وضعیت خط $x+y=۳$ را نسبت به دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۳=۰$ مشخص کنید.

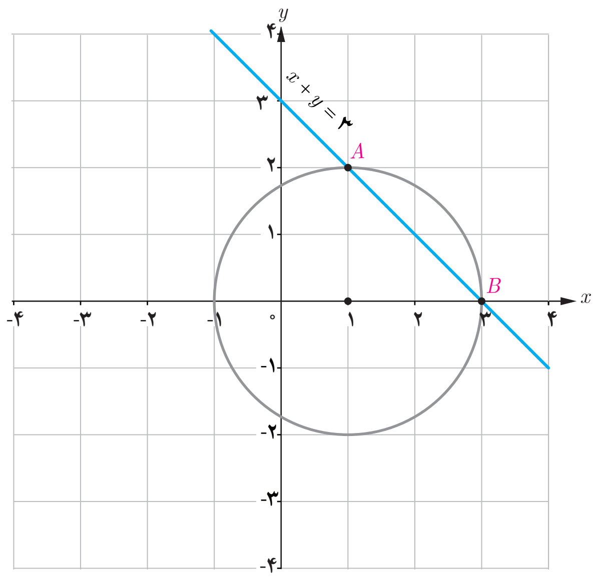
حل

کافی است فاصلهٔ مرکز دایره را از خط داده شده حساب کرده و اندازهٔ آن را با اندازهٔ شعاع دایره مقایسه کنیم.

به کمک آنچه در معادلهٔ گستردهٔ دایره گفته شد مرکز دایره از رابطهٔ $O(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})$، نقطهٔ $(۱,۰)$ و شعاع دایره از رابطهٔ $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$ برابر است با ۲.

به کمک رابطهٔ فاصلهٔ نقطه از خط، فاصلهٔ مرکز دایره از خط داده شده برابر است با $d=\frac{|۱(۱)+۱(۰)-۳|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$ و از آنجا که این مقدار از شعاع دایره کمتر است، پس می‌توان چنین نتیجه گرفت که خط داده شده با دایره متقاطع است.

وضعیت نسبی خط و دایره در این مثال مشخص شد، اما برای آنکه فهم بهتری از این مسئله پیدا کنیم، ابتدا نمودار دایره و خط داده شده را رسم می‌کنیم.



همان‌طور که شکل نشان می‌دهد، دایره و خط داده شده در دو نقطهٔ A و B متقاطع‌اند. اگر مختصات نقطهٔ برخورد خط و دایره را در حالت کلی، (x,y) در نظر بگیریم، بدیهی است که مختصات این نقطه، هم در خط داده شده و هم در معادلهٔ دایره صدق می‌کند.

بنابراین برای پیدا کردن مختصات آن کافی است به‌همان شیوه‌ای که در پایه‌های قبل دیدیم، مقدار $y=۳-x$ را در معادلهٔ دایره جایگزین کنیم. داریم :

$x^۲+(۳-x)^۲-۲x-۳=۰$

$\rightarrow x^۲+۹-۶x+x^۲-۲x-۳=۰$

$\rightarrow ۲x^۲-۸x+۶=۰$

$\rightarrow x^۲-۴x+۳=۰ \qquad (۱)$

$\rightarrow (x-۱)(x-۳)=۰ \rightarrow x=۱$ یا $x=۳$

با جایگزین کردن مقدار x در یکی از معادله‌های خط یا دایره، به این نتیجه می‌رسیم که خط فوق در دو نقطهٔ $(۳,۰)$ و $(۱,۲)$ با دایره متقاطع است.

بدیهی است که اگر معادلهٔ (۱) جواب نداشته باشد، خط دایره را قطع نمی‌کند و اگر فقط یک جواب داشته باشد، خط بر دایره مماس است.

در واقع این روش هم می‌تواند وضعیت خط و دایره را نسبت به هم مشخص کند.

در مورد این دو روش و مزیت‌های هر کدام، با دوستان خود گفت‌وگو کنید.

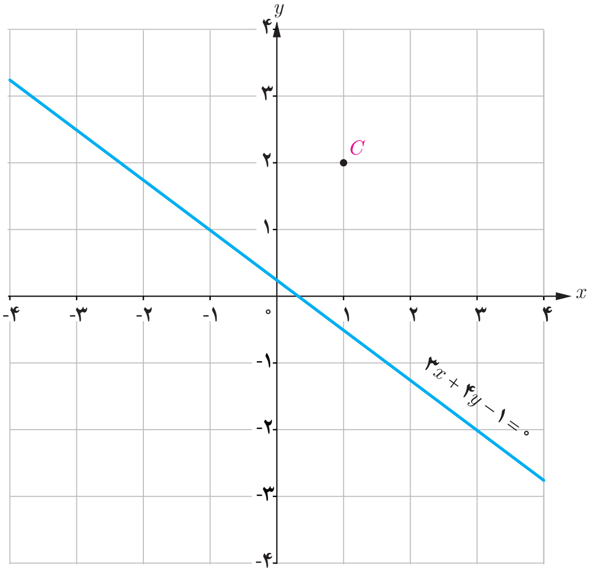
کار در کلاس

۱ در هر مورد وضعیت خط و دایره را نسبت به هم مشخص کنید. مختصات نقاط مشترک را در صورت وجود، بنویسید.

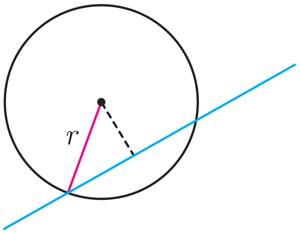
الف) دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x+۲y-۱=۰$ و خط $x+y=۱$

ب) دایرهٔ $(x-۲)^۲+(y+۳)^۲=۴$ و خط $y=-۱$

۲ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر خط $۳x+۴y-۱=۰$ مماس بوده و مرکز آن $C(۱,۲)$ باشد.



۳ مرکز دایره‌ای نقطهٔ $O(۲,-۳)$ است. این دایره روی خط $۳x-۴y+۲=۰$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادلهٔ این دایره را بنویسید.

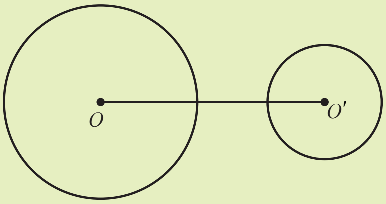
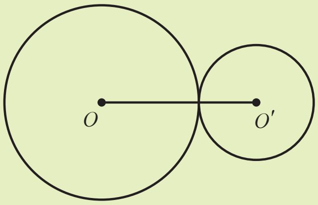
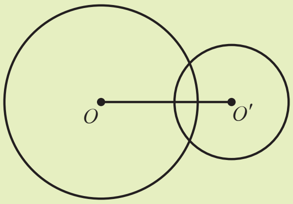
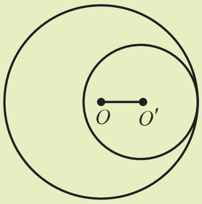
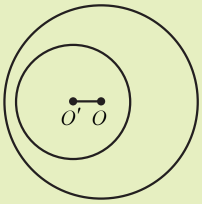
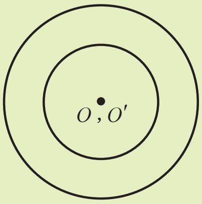


اوضاع نسبی دو دایره

نظیر آنچه برای اوضاع نسبی نقطه و دایره و همین طور خط و دایره دیدید، قصد داریم ابتدا به طور شهودی وضعیت‌های مختلفی را که دو دایرهٔ دلخواه می‌توانند نسبت به هم داشته باشند، مشخص کنیم و سپس وضعیت دو دایره را نسبت به یکدیگر، در صفحه مختصات و با داشتن معادلهٔ دو دایره بررسی کنیم.

دو دایرهٔ دلخواه $C(O,r)$ و $C(O',r')$ را با فرض $r>r'$ در نظر بگیرید. در جدول زیر حالت‌های مختلف دو دایره نسبت به هم داده شده و در هر حالت رابطهٔ بین اندازهٔ شعاع‌های دو دایره با اندازهٔ فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره بیان شده است.

پاره‌خطی که مرکزهای دو دایره را به‌هم وصل می‌کند، **خط‌المرکزین** نامیده می‌شود که در اینجا اندازهٔ آن‌را با d نمایش داده‌ایم.

دو دایره برون هم (متخارج)	$d > r + r'$	
دو دایره مماس برون	$d = r + r'$	
دو دایرهٔ متقاطع	$r - r' < d < r + r'$	
دو دایرهٔ مماس درون	$d = r - r'$	
دو دایرهٔ متداخل	$d < r - r'$	
دو دایرهٔ هم‌مرکز	$d = 0$	

اگر معادلهٔ دو دایره را در دستگاه مختصات داشته باشیم، بدون رسم دو دایره چطور می‌توانیم وضعیت آنها را نسبت به هم مشخص کنیم؟ در این مورد به کمک شکل‌های بالا با دوستان خود گفت‌وگو کنید.

به‌نظر می‌رسد با داشتن اندازهٔ شعاع‌های دو دایره و طول خط‌المرکزین بتوان وضعیت دو دایره را نسبت به‌هم مشخص کرد.

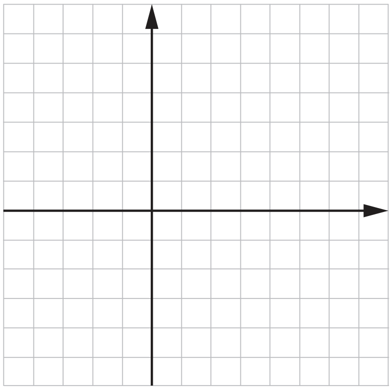
مثال

الف) وضعیت دو دایرهٔ $x^2+y^2+6x+8y=0$ و $x^2+y^2-4x+6y+12=0$ را نسبت به هم مشخص کنید و سپس نمودار دو دایره را رسم کنید.

حل

به کمک آنچه دیدیم، ابتدا مختصات مرکز و طول شعاع هر دایره را پیدا می‌کنیم و سپس با مقایسه مقادیر شعاع با طول خط‌المرکزین وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص می‌کنیم.

در دایرهٔ $x^۲+y^۲+۶x+۸y=۰$، مرکز دایره از رابطهٔ $O(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})$، نقطهٔ $O(-۳,-۴)$ و اندازهٔ شعاع از رابطهٔ $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$ برابر ۵ است.



در دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x+۶y+۱۲=۰$، به شیوهٔ مشابه مرکز دایره نقطهٔ $O'(۲,-۳)$ و اندازهٔ شعاع $r'=۱$ است.

از طرفی طول خط‌المرکزین (فاصله بین دو مرکز) برابر است با:

$$OO'=\sqrt{(-۳-۲)^۲+(-۴+۳)^۲}=\sqrt{۲۶}$$

بنابراین از آنجا که داریم: $۵-۱<\sqrt{۲۶}<۵+۱$ یعنی $r-r'<d<r+r'$ پس دایره‌های فوق، متقاطع هستند.

نمودار دو دایره را رسم کنید.

کار در کلاس

۱) با انجام مراحل زیر، معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x-۴y-۴=۰$ مماس برون و مرکز آن نقطهٔ $O(۲,-۲)$ باشد:

ـ مختصات نقطهٔ O'، مرکز دایرهٔ داده شده عبارت است از: ....

ـ اندازهٔ r' یعنی شعاع دایره دادهٔ شده برابر است با: ....

ـ فاصلهٔ OO' برابر است با: ....

ـ شرط اینکه دو دایره مماس بیرونی باشند این است که: .... پس شعاع r باید برابر .... باشد.

ـ معادلهٔ دایرهٔ مطلوب را با معلوم بودن اندازهٔ شعاع و مختصات مرکز آن بنویسید: ....

۲) در هر حالت معادلهٔ دو دایره را بنویسید و در مورد تعداد پاسخ‌های درست با دوستان خود گفت‌وگو کنید.

الف) دو دایره هم‌مرکز باشند.

ب) دو دایره برون هم باشند.

۳) در هر مورد وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص کنید:

الف) $x^۲+y^۲-۲x+۴y=۰$ و $x^۲+y^۲+۲x-۴y=۰$

ب) $(x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۱$ و $x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰$

تمرین

۱ مختصات مرکز هر دایره و اندازهٔ شعاع آن را پیدا کنید و آن دایره را در صفحه مختصات رسم کنید :

الف) $x^۲+y^۲-۶x+۲y+۱=۰$

ب) $x^۲+(y+۳)^۲-۴=۰$

پ) محل تقاطع هر دایره را با محورهای مختصات، در صورت وجود مشخص کنید.

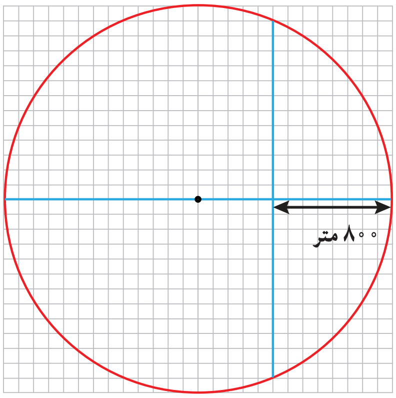
۲ در هر حالت معادلهٔ دایره را بنویسید :

الف) دایره‌ای که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $C(۲,-۱)$ باشد.

ب) دایره‌ای که مرکز آن $(۲,۳)$ و نقطهٔ $(-۳,-۹)$ نقطه‌ای روی آن باشد.

پ) دایره‌ای که نقاط $(۳,۰)$ و $(-۴,-۱)$ دو سر یکی از قطرهای آن باشند.

۳ وضعیت نقاط $(۱,۰)$، $(۲,۳)$، $(-۲,-۱)$، $(۰,۰)$ را نسبت به دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰$ مشخص کنید.



۴ شهرداری قصد دارد در یک فضای سبز دایره‌ای شکل به شعاع ۱۳۰۰ متر، دو مسیر پیاده‌روی مطابق شکل بسازد. اگر مختصات مرکز دایره $(۱۳,۱۳)$ و هر واحد برابر ۱۰۰ متر باشد :

الف) معادلهٔ این دایره چیست؟

ب) مختصات نقاط برخورد دو مسیر را با دایره پیدا کنید.

پ) دو مسیر در چه نقطه‌ای با یکدیگر متقاطع‌اند؟

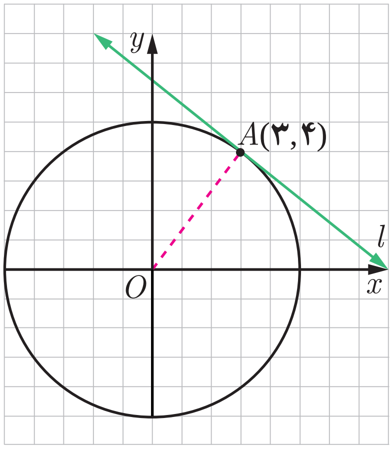
ت) طول مسیر عمودی چقدر است؟

۵ معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به شکل $x^۲+y^۲+۲x+۲y-۸=۰$ است. مختصات مرکز دایره و شعاع آن را پیدا کنید و آن را به شکل استاندارد بنویسید.

۶ وضع هر خط را نسبت به دایره مشخص کنید و مختصات نقاط اشتراک را در صورت وجود بنویسید.

الف) $x^۲+y^۲-۴x-۴y+۷=۰$ و $۶x+۴y=۰$

ب) $x^۲+y^۲=۲$ و $y=-x-۲$



۷ اگر بدانیم خطی در نقطه $(۳,۴)$ بر دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات مماس است، معادله خط مماس چیست؟

۸ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش نقطهٔ $(۰,۳)$ است و بر خط $۳x-۴y=۳$ مماس است.

۹ مشخص کنید در هر حالت دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

الف) $x^۲+y^۲-۲x+۴y=۴$ و $x^۲+y^۲+۲x-۴y=۹$

ب) $(x-۲)^۲+(y+۳)^۲=۷$ و $x^۲+(y-۵)^۲=۵$

۱۰ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-۱,-۱)$ باشد و با دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x-۶y=۳$ مماس درون باشد.

۱۱ دایره‌ای به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۴x+۶y+۴=۰$ داده شده است. دو نقطهٔ A و B به طول ۲ روی این دایره در نظر می‌گیریم. مختصات نقطهٔ C را روی این دایره چنان بیابید که مثلث ABC در رأس C متساوی‌الساقین شود.

نمای بالایی ترمینال جنوب، تهران

فصل

۲ مثلثات

درس اوّل: تناوب و تابع تانژانت

درس دوم: معادلات مثلثاتی

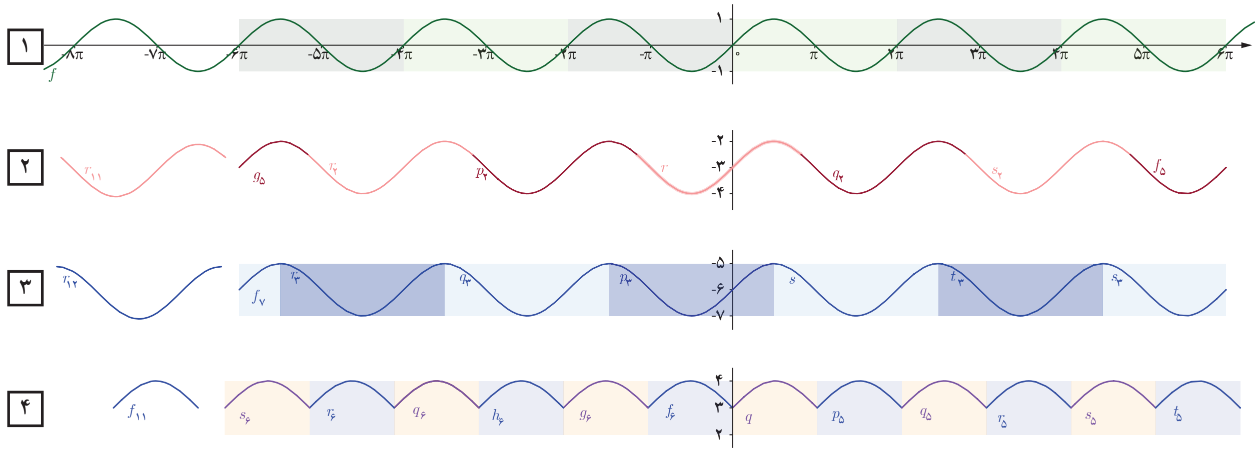
درس اوّل

تناوب و تابع تانژانت

درستی رابطه $\sin(x \pm k\pi) = \sin x$ را در سال گذشته دیدیم (یادآور می‌شویم که رابطه مشابهی برای $\cos x$ نیز برقرار است). همچنین مشاهده شد که این رابطه باعث تکرار شدن تابع $y = \sin x$ بر بازه‌های به طول ۲π باشد. اکنون این خاصیت را برای توابع مثلثاتی $y = \sin ax$ و $y = \cos ax$ بررسی می‌کنیم. ابتدا تابع $y = \sin x$ را دقیق‌تر بررسی می‌کنیم.

فعالیت

۱ در شکل زیر نمودار تابع $y = \sin x$ رسم شده است. همچنین قطعاتی از این نمودار به طول‌های مختلف و در بازه‌های مختلف جدا کرده‌ایم. مثلاً در ردیف ۱ قطعه‌ای به طول ۲π در بازه $[۰, ۲\pi]$ و در ردیف ۲ قطعه‌ای به طول ۲π اما در بازه $[\frac{-۷\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}]$ در نظر گرفته‌ایم. سپس در هر ردیف تعدادی کپی از قطعه مربوطه گرفته و در کنار هم به‌طور متوالی قرار داده‌ایم تا نمودار سمت راست آن ردیف ساخته شود. مشاهده می‌شود که مثلاً در ردیف ۱ نمودار $y = \sin x$ بازسازی شده است. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.



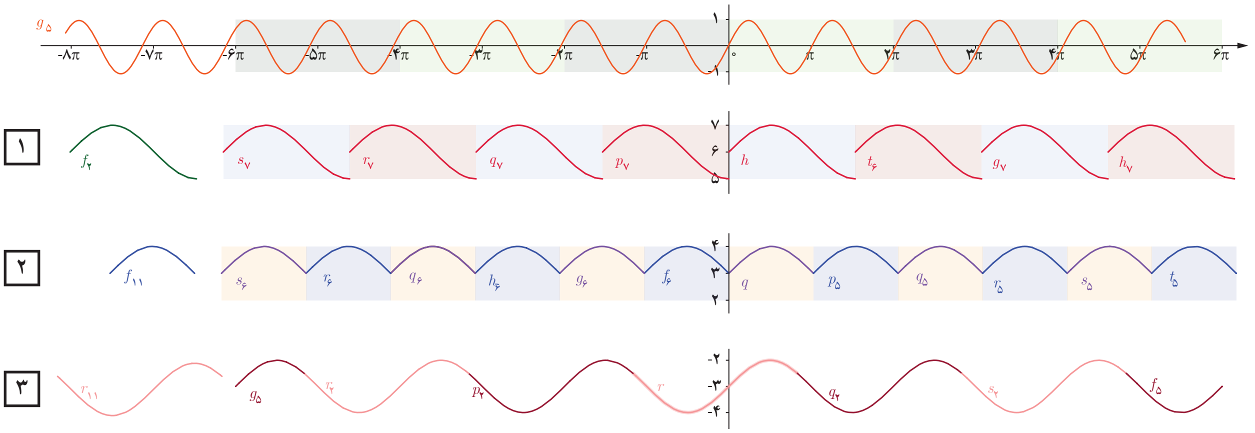
الف) به نظر شما در کدام ردیف‌ها نمودار تابع $y = \sin x$ بازسازی شده است؟ در این ردیف‌ها طول قطعه مربوطه چقدر است؟ آیا مکان بازه‌های مختلف در بازسازی نمودار تأثیر دارد؟

ب) آیا با قطعه‌ای به طول $\frac{\pi}{۲}$ می‌توان نمودار تابع $y = \sin x$ را بازسازی کرد؟

پ) آیا با قطعه‌های به طول $۲k\pi$ (k عددی صحیح مثبت) می‌توان نمودار تابع $y = \sin x$ را بازسازی کرد؟

ت) در مورد طول کوچک‌ترین قطعه‌ای از نمودار که با آن می‌توان نمودار را بازسازی کرد چه حدسی می‌زنید؟

۲ نمودار تابع $y=\sin ۲x$ همراه با بازسازی‌های به‌دست آمده از چند قطعه مختلف آن در زیر آمده است.



الف) با کدام قطعات داده شده نمودار $y=\sin ۲x$ بازسازی شده است؟ طول آنها چقدر است؟

ب) طول کوچک‌ترین بازه که با آن می‌توان نمودار تابع $y=\sin ۲x$ را بازسازی کرد؟ چقدر است؟

پ) با توجه به الف و ب در رابطه زیر به جای c چه مقادیری می‌توان قرار داد تا تساوی برقرار شود؟ در مورد کوچک‌ترین مقدار c چه حدسی می‌زنید؟ (راهنمایی : با رابطه $\sin(x\pm ۲\pi)=\sin x$ مقایسه کنید).

$$\sin ۲(x\pm c)=\sin ۲x$$

در فعالیت قبل مشاهده شد که توابع $y=\sin x$ و $y=\sin ۲x$ به ترتیب در بازه‌های به طول $۲k\pi$ $(k\in z)$ تکرار می‌شوند. به این‌گونه توابع «متناوب» گفته می‌شود. کوچک‌ترین عدد مثبتی که طول بازه تکرار است برای تابع $y=\sin x$ برابر ۲π می‌باشد. واضح است که تابع $y=\sin x$ بر بازه‌هایی که طول آنها مضرب صحیحی از ۲π است نیز تکرار می‌شوند. به این مقدار دوره تناوب تابع $y=\sin x$ گفته می‌شود و با نماد T نمایش می‌دهند. بنابراین تابع $y=\sin x$ یک تابع متناوب با دوره تناوب $T=۲\pi$ می‌باشد. همچنین تابع $y=\sin ۲x$ نیز یک تابع متناوب با دوره تناوب $T=\pi$ است.

با توجه به تعریف فوق در ادامه نشان می‌دهیم که به‌طور کلی توابع $y=\sin ax$ و $y=\cos ax$، $(a\neq ۰)$ متناوب هستند و دوره تناوب آنها $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ می‌باشد زیرا :

$$\sin a(x\pm c)=\sin(ax\pm ac)$$

از طرفی با توجه به رابطه مثلثاتی $\sin(x\pm ۲\pi)=\sin x$ اگر داشته باشیم :

$$ac=۲\pi \rightarrow c=\frac{۲\pi}{a}$$

آن‌گاه به‌دست می‌آید :

$$\sin a(x\pm c)=\sin(ax\pm ac)=\sin ax$$

پس بنا به تعریف تابع فوق تابع $y=\sin ax$ یک تابع متناوب با دوره تناوب $T=\frac{۲\pi}{|a|}$ می‌باشد.
مشابه اثبات فوق را می‌توان برای $y=\cos ax$ نیز انجام داد.

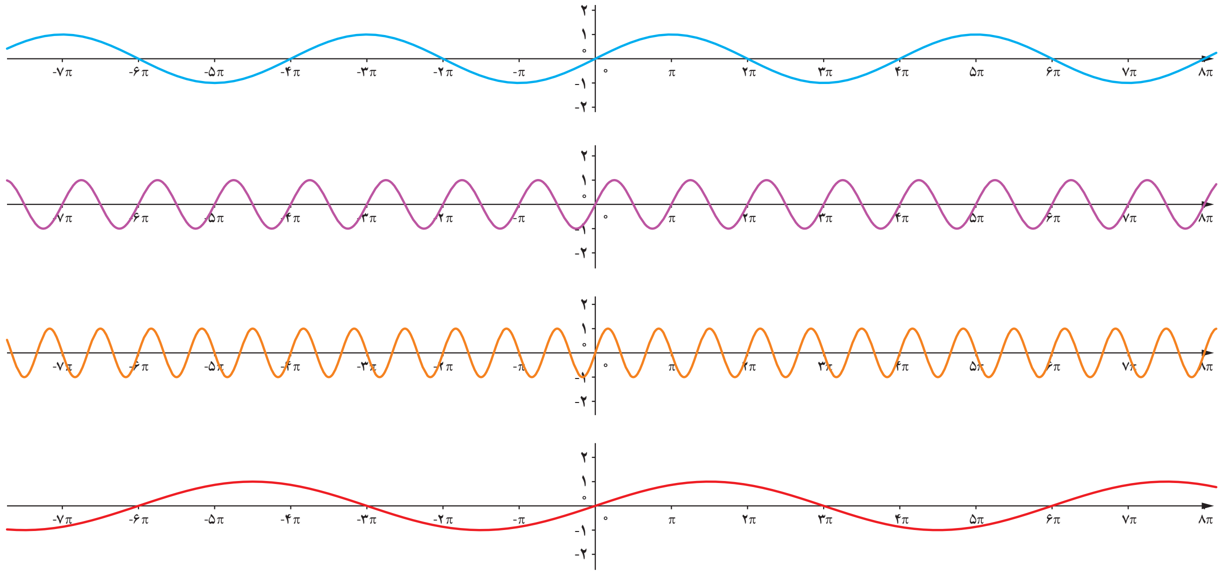
۳ تابع $y=\cos ۲x$ را مانند فوق بررسی کنید.

کار در کلاس

۱ دوره تناوب هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

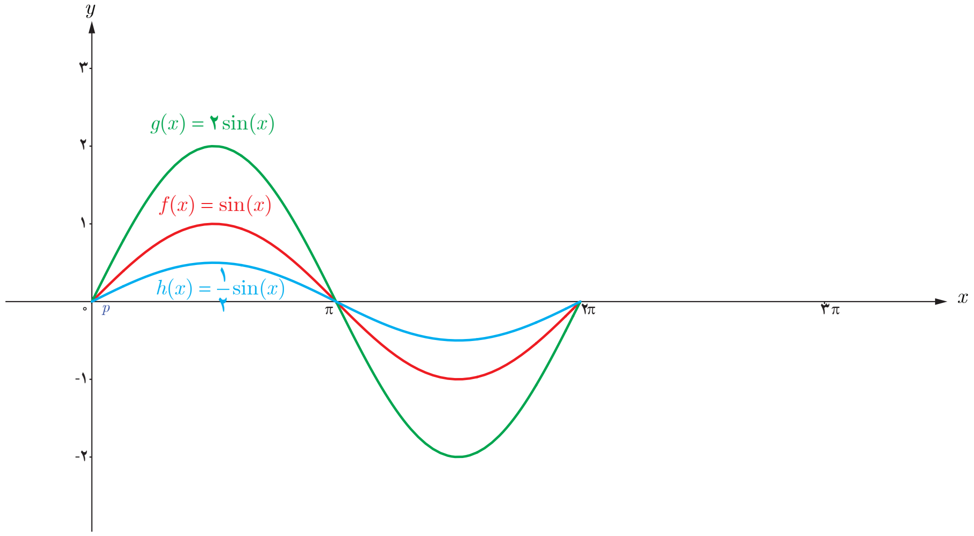
الف) $f(x)=\sin ۳x$ ب) $g(x)=\cos\sqrt{۲}x$ پ) $h(x)=\sin\frac{x}{۲}$ ت) $s(x)=\sin\pi x$

۲ می‌دانیم ریشه‌های تابع $y=\sin x$ به صورت $x=k\pi$ که $k\in\mathbb{Z}$ می‌باشند. نمودار توابع $f(x)=\sin\frac{x}{۲}$، $g(x)=\sin ۲x$، $m(x)=\sin ۳x$ و $n(x)=-\sin\frac{x}{۳}$ در زیر آمده است. با توجه به ریشه‌های این توابع، در مورد ریشه‌های $y=\sin ax$ چه حدسی می‌زنید؟



۳ با توجه به دوره تناوب تابع $y=\sin ax$ در مورد مکان نقاط ماکزیمم این تابع چه حدسی می‌زنید؟ (از نمودارهای سؤال ۲ کمک بگیرید).

۴ توابع $f(x)=\sin x$، $g(x)=۲\sin x$ و $h(x)=\frac{۱}{۲}\sin x$ در شکل زیر رسم شده‌اند. آیا دوره تناوب این توابع متفاوت هستند؟ با انتقال این توابع بر روی محورهای افقی و عمودی آیا دوره تناوب آنها تغییر می‌کند؟



از کار در کلاس صفحه قبل می‌توان دریافت که ضرب یک تابع متناوب در یک عدد و نیز انتقال آن در دوره تناوب تأثیری ندارد اما در برد آن مؤثر است.

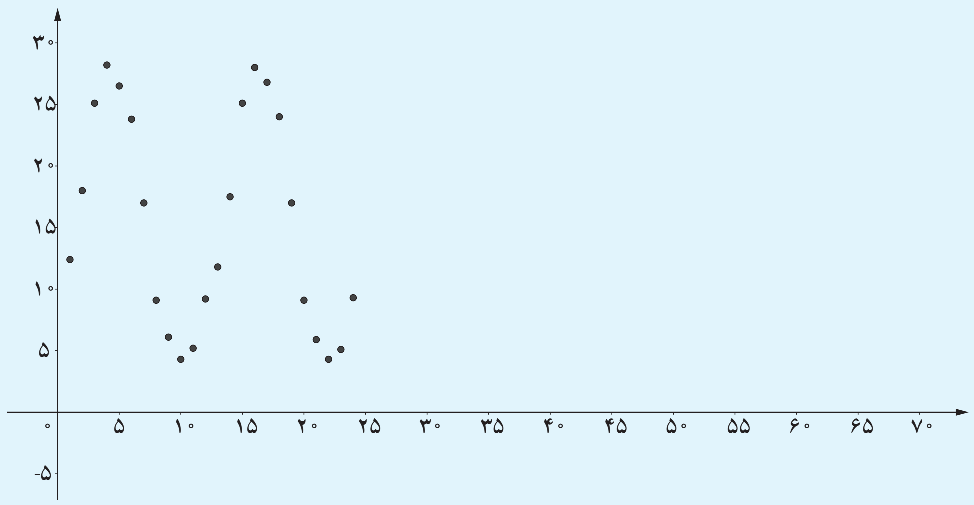
> به‌طور کلی توابع مثلثاتی به‌صورت $y=a\sin(bx+c)+d$ و $y=a\cos(bx+c)+d$ که در آنها d، c، b، a اعداد حقیقی $(a,b\neq 0)$ می‌باشند، توابعی متناوب با دوره تناوب $T=\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

توابع متناوب[1] برای مدل سازی پدیده‌هایی که تکرار می‌شوند به‌کار می‌روند. برای مدل‌سازی چنین پدیده‌هایی کافی است داده‌های یک دوره تناوب آن را داشت و آن‌گاه می‌توان آن پدیده را برای زمان‌های آتی پیش‌بینی کرد. معمولاً برای اطمینان از درستی یک مدل مثلثاتی داده‌های دو یا چند دوره تناوب یک پدیده را به‌دست می‌آورند. در ادامه چند مثال در این رابطه آمده است.

مثال ۱ : داده‌های دمای یک شهر در ماه‌های مختلف برای دو سال پیاپی (۲۴ ماه) به صورت زیر ثبت شده اند (فروردین را با شماره ۱، اردیبهشت را با شماره ۲ و ... نمایش داده‌ایم). نمودار این داده‌ها به‌صورت زوج مرتب نیز رسم شده است.

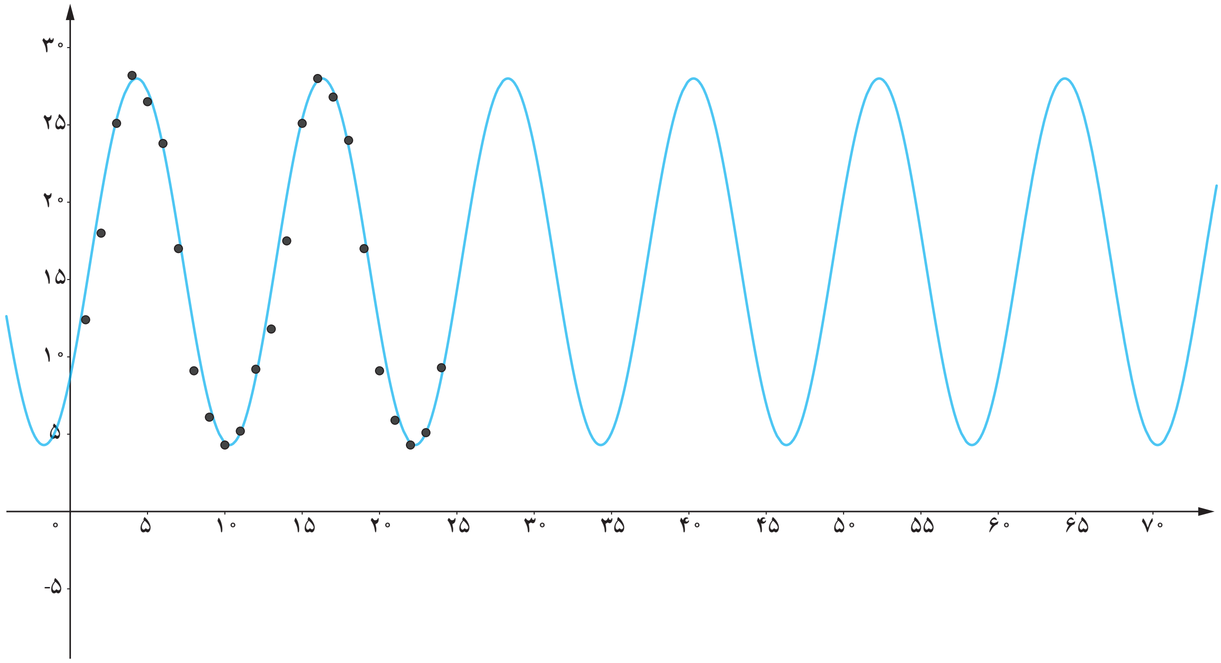
	داده‌های سال اول											
ماه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
دما	۱۲/۴	۱۸	۲۵/۱	۲۸	۲۶/۵	۲۳/۸	۱۷	۹/۱	۶/۱	۴/۳	۵/۲	۹/۲

	داده‌های سال دوم											
ماه	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
دما	۱۱/۸	۱۷/۵	۲۵/۱	۲۸	۲۶/۸	۲۴	۱۷	۹/۱	۵/۹	۴/۳	۵/۱	۹/۳



۱ـ در این کتاب تنها به تناوب توابع مثلثاتی که به‌صورت گفته شده در کادر فوق می‌باشند می‌پردازیم.

با کمی دقت متوجه می‌شویم که دوره تناوب داده‌های بالا $T=$ ۱۲ است زیرا که داده‌ها هر ۱۲ ماه یک بار تکرار شده‌اند. با اندکی محاسبات می‌توان تابعی مثلثاتی که تقریباً متناسب با داده‌های فوق است ارائه داد. تابع $T(t)=۱۱/۸۵\sin(\frac{\pi}{۶}t)+۱۶/۱۵$ را که در آن t شماره ماه می‌باشد داده‌ها را به خوبی تقریب می‌زند. این تابع در زیر رسم شده است. اکنون از این تابع می‌توان برای پیش بینی دمای ماه‌های آتی استفاده نمود.



برای به‌دست آوردن این تابع تقریبی ابتدا با توجه به اینکه داده شبیه به یک موج سینوسی هستند حالت کلی یک موج سینوسی به‌صورت $T(t)=a\sin(bt)+c$ در نظر می‌گیریم و با توجه به داده‌ها مقادیر مجهول a ، b ، c به‌صورت زیر می‌یابیم. با توجه به اینکه دور تناوب داده‌ها ۱۲ است پس داریم :

$$\frac{۲\pi}{b}=۱۲ \rightarrow b=\frac{\pi}{۶}$$

برای به‌دست آوردن a که معمولاً به آن دامنه موج گفته می‌شود از دامنه تغییرات داده‌ها استفاده می‌شود، یعنی کافی است تفاضل بیشترین و کمترین داده‌ها را بر ۲ تقسیم کنیم. پس خواهیم داشت :

$$a=\frac{۲۸-۴/۳}{۲}=۱۱/۸۵$$

برای به‌دست آوردن مقدار c کافی است میانگین بیشترین و کمترین مقدار را بیابیم، یعنی داریم :

$$c=\frac{۲۸+۴/۳}{۲}=۱۶/۱۵$$

مثال ۲ : مجموعه‌ای از داده‌های مربوط به دمای هوای یک شهر داده شده‌اند. اگر داده‌های این شهر هر ۱۲ ماه یک بار تکرار شده باشند و بیشترین و کمترین دما در داده‌ها به ترتیب ۲۸ و ۱۵ درجه سانتی‌گراد باشند، آنگاه با فرض اینکه تابعی کسینوسی به‌صورت $y=a\cos(bx)+c$ برای داده مناسب به‌نظر می‌رسد، این تابع را بیابید.

$$\frac{۲\pi}{b} = ۱۲ \rightarrow b = \frac{\pi}{۶}$$

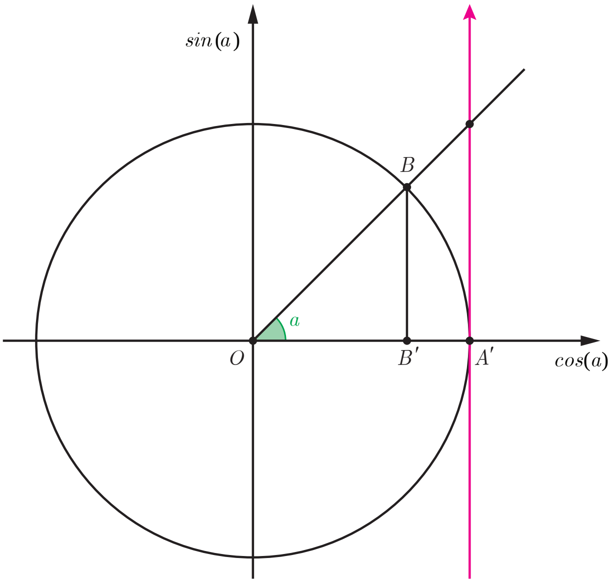
$$a = \frac{۲۸ - ۱۵}{۲} = ۶/۵$$

$$c = \frac{۲۸ + ۱۵}{۲} = ۲۱/۵$$

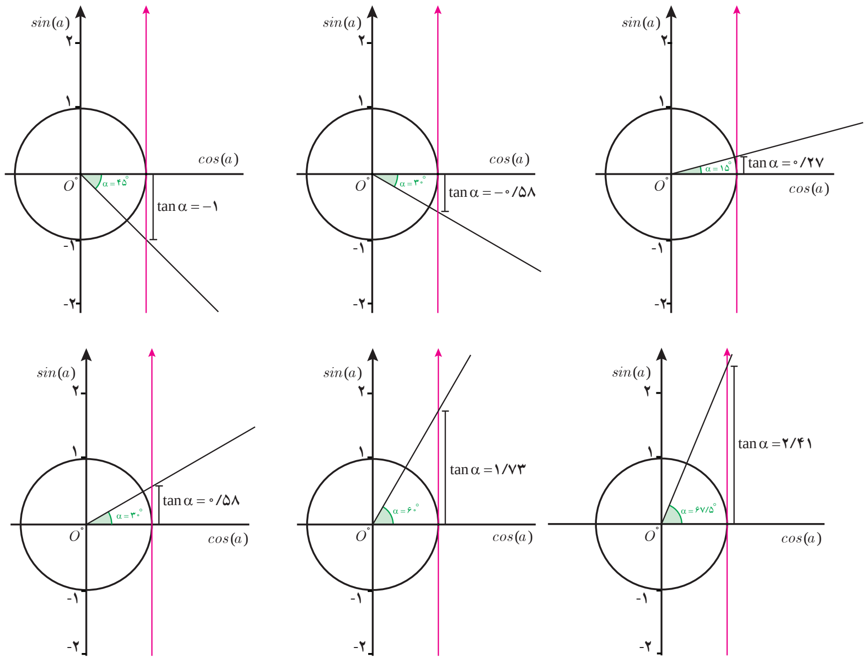
تابع تانژانت

در دایره مثلثاتی روبه‌رو زاویه a و نیز محورهای سینوس‌ها و کسینوس‌ها مشخص شده‌اند. اکنون اگر خط $x=۱$ را که بر دایره مثلثاتی مماس بوده را رسم کنیم تا امتداد OB را در نقطه A قطع کند آن‌گاه اندازه پاره خط AA' برابر تانژانت زاویه a می‌باشد زیرا که طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{OB'}{OA'} = \frac{BB'}{AA'} \rightarrow AA' = \frac{BB'}{OB'} = \tan\alpha.$$



از این رو محور عمودی مماس بر دایره را محور تانژانت می‌نامند. در دایره‌های مثلثاتی زیر از چپ به راست زاویه α در حال افزایش است و تانژانت آن نیز بر روی محور تانژانت مشخص شده است. به نظر شما وقتی که اندازه زاویه α به زاویه ۹۰° نزدیک می‌شود مقدار تانژانت آن چگونه تغییر می‌کند؟



در فعالیت زیر تغییرات تابع y=tanα را از x=۰ تا x=۲π به کمک محور تانژانت نیز جدول مقادیر تانژانت که از سال‌های قبل فراگرفته‌اید بررسی می‌کنیم و نمودار تابع تانژانت را به دست می‌آوریم.

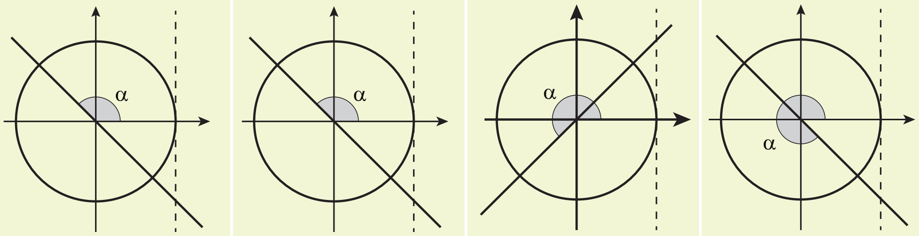
فعالیت

۱ در ردیف الف ازجدول زیر صعودی و نزولی بودن tanα را با توجه به محور تانژانت در هر بازه تعیین نمایید.

۲ در ردیف ب از جدول زیر مقدار tanα را به ازای مقادیر داده شده از α به دست آورید ($\sqrt{۳}=۱/۷$, $\frac{\sqrt{۳}}{۳}=۰/۵۸$).

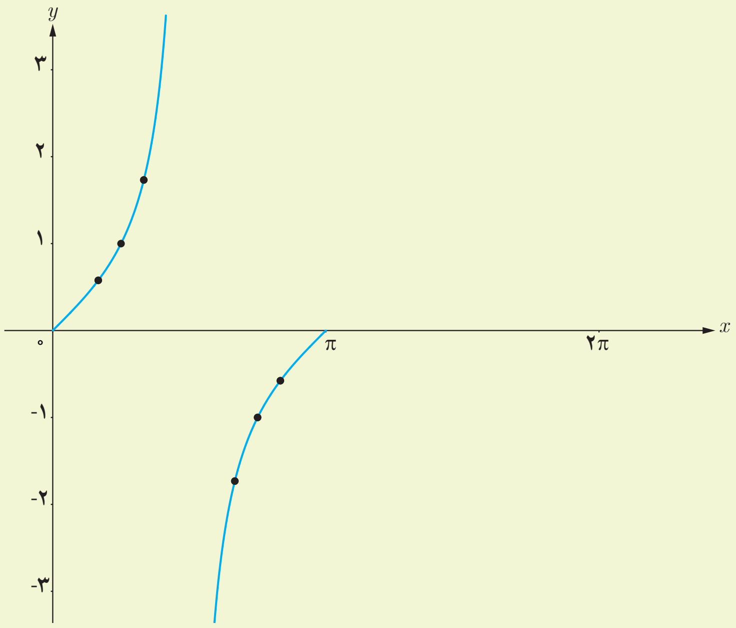
۳ در ردیف پ نمودار تابع y=tanα را با استفاده از نقاط کمکی ردیف ب و نیز تغییرات به‌دست آمده در ردیف الف تکمیل کنید.

α	$۰<α<\frac{π}{۲}$	$\frac{π}{۲}$	$\frac{π}{۲}<α<π$	π	$π<α<\frac{۳π}{۲}$	$\frac{۳π}{۲}$	$\frac{۳π}{۲}<α<۲π$
الف	صعودی		....		....		....

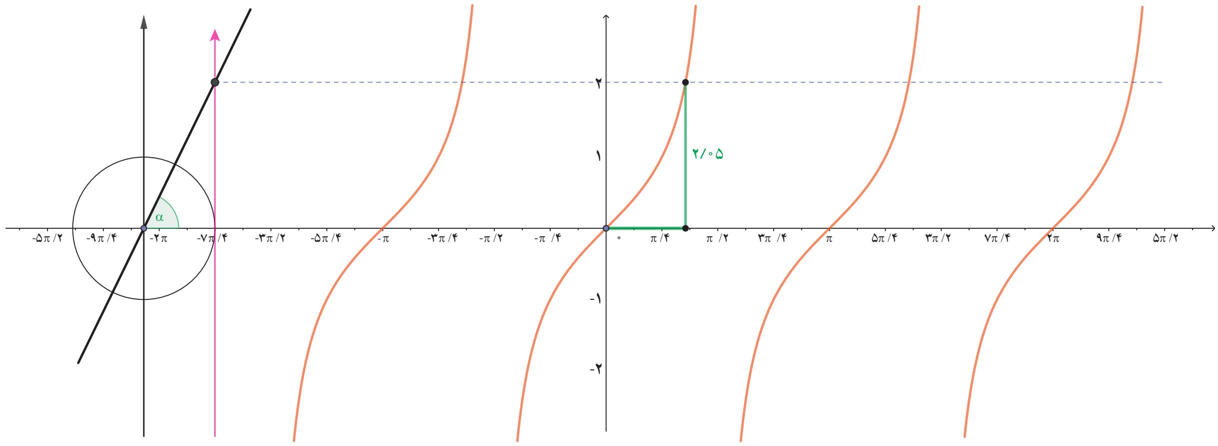


ب	۰	$\frac{π}{۶}$	$\frac{π}{۴}$	$\frac{π}{۳}$	$\frac{۲π}{۳}$	$\frac{۳π}{۴}$	$\frac{۵π}{۶}$	$\frac{۷π}{۶}$	$\frac{۵π}{۴}$	$\frac{۴π}{۳}$	$\frac{۵π}{۳}$	$\frac{۷π}{۴}$	$\frac{۱۱π}{۶}$	۲π
	۰	۰/۵۸												

پ



همان‌طور که در فعالیت قبل بررسی شد تابع مثلثاتی $y=\tan\alpha$ برای مقادیر $\alpha' = \frac{k\pi}{۲}$ تعریف می‌شود و نمودار آن در بازه $[-\frac{۳\pi}{۲}, \frac{۹\pi}{۴}]$ به صورت زیر است. همچنین محور مماس بر دایره مثلثاتی که به موازات محور yها (محور سینوس) است را محور تانژانت می‌نامند چرا که محل تقاطع ضلع پایانی زاویه α با آن محور بیانگر tanα است. در زیر ارتباط این محور با تابع تانژانت نیز مشخص شده است.



کار در کلاس

۱ آیا تابع $y=\tan x$ در بازه $[۰,۲\pi]$ یک‌نواست؟

۲ با توجه به روابط مثلثاتی سال گذشته نمودار تابع $y=\tan x$ را به بازه‌های بزرگ‌تر از π و کوچک‌تر از π− گسترش دهید. آیا تابع $y=\tan x$ متناوب است؟ اگر بلی دوره تناوب آن را به دست آورید.

۳ با توجه به نمودار تابع $y=\tan x$ دامنه و برد این تابع را بیابید.

تمرین

۱ دوره تناوب هر یک از توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=۱+۲\sin ۷x$

ب) $y=\sqrt{۳}-\cos\frac{\pi}{۲}x$

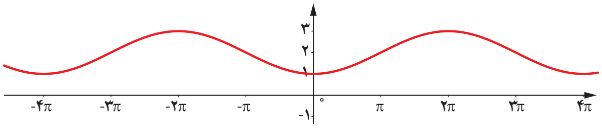
پ) $y=-\pi\sin\frac{۱}{۲}(x-۲)$

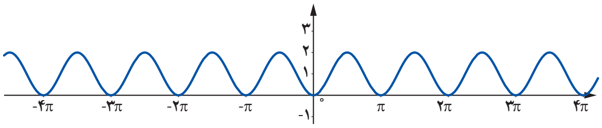
ت) $y=-\pi+\sqrt{۲}\tan ۳x$

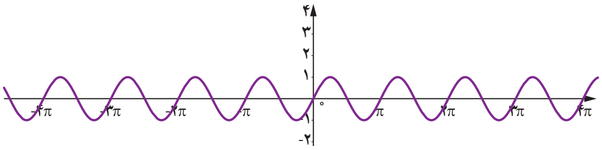
۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

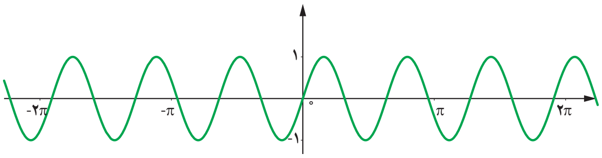
الف) $y=\sin \pi x$ ب) $y=۲-\cos \frac{۱}{۲}x$ پ) $y=۱-\cos ۲x$

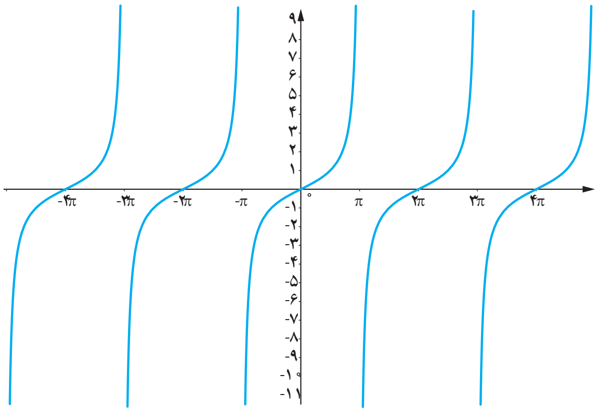
ت) $y=-\frac{۱}{۲}\tan ۲x$ ث) $y=\sin ۲x$ ج) $y=\tan \frac{۱}{۲}x$

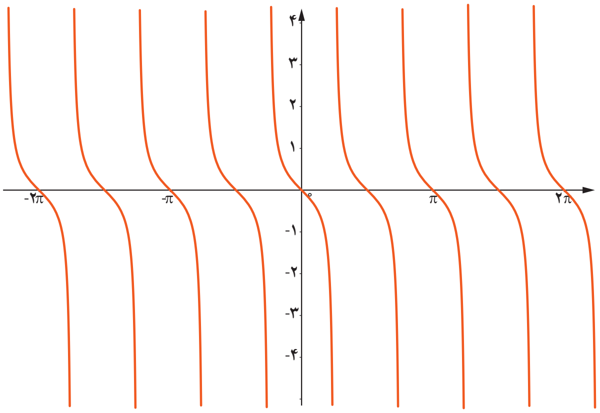










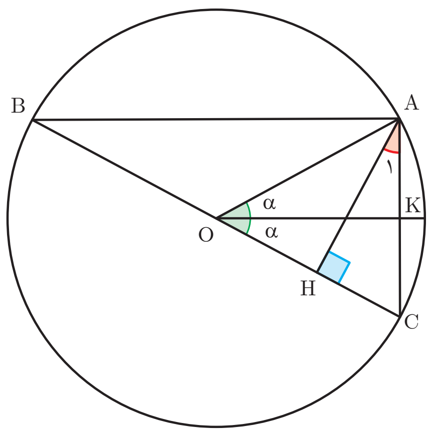


درس دوم

معادلات مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان

در محاسبات فنی گاهی نسبت مثلثاتی برای برخی زوایا مورد نیاز است که مقدار آن را می‌توان به کمک دیگر زوایا به‌دست آورد. مثلاً می‌دانیم که $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. حال اگر $\cos 15^\circ$ را نیاز داشته باشیم چگونه می‌توان آن را با استفاده از مقدار $\cos 30^\circ$ به دست آورد؟ به وضوح ۱۵ نصف ۳۰ است. آیا با نصف مقدار $\cos 30^\circ$ می‌توان $\cos 15^\circ$ را به دست آورد؟ در ادامه خواهیم دید که جواب منفی است ولی کماکان می‌شود مقدار $\cos 15^\circ$ را به کمک مقدار معلوم $\cos 30^\circ$ یافت اما نه با نصف کردن.



دایره روبه‌رو به شعاع واحد و مرکز O را در نظر بگیرید. مطابق شکل، زاویه مرکزی O برابر 2α داده شده که روبه‌رو به وتر AC می‌باشد. از این رو در مثلث OAK داریم:

$$AK = \sin\alpha \Rightarrow AC = 2AK = 2\sin\alpha \qquad (1)$$

همچنین $\overset{\frown}{AC} = 2\alpha$ و از آنجا که زاویه محاطی B روبه‌رو به $\overset{\frown}{AC}$ می‌باشد، لذا نصف آن است پس: $\hat{B} = \alpha$.

از طرفی $\hat{A}$ یک زاویه محاطی روبه‌رو به قطر BC است و لذا: $\hat{A} = 90^\circ$

همچنین از مجموع زوایای $A\overset{\triangle}{B}C$ به‌دست می‌آید:

$$O\overset{\triangle}{A}C : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \alpha + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \alpha$$

به‌طور مشابه در $A\overset{\triangle}{H}C$ داریم:

$$A\overset{\triangle}{H}C : \hat{H} + \hat{A}_1 + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{A}_1 + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = \alpha$$

اکنون ضلع AH را در $O\overset{\triangle}{A}C$ و $A\overset{\triangle}{H}C$ به‌دست آورده و برابر قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} O\overset{\triangle}{A}C : AH = \sin 2\alpha \\ A\overset{\triangle}{H}C : \cos\hat{A}_1 = \cos\alpha = \dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC\cos\alpha \xrightarrow{(1)} AH = 2\sin\alpha\cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

همچنین در $O\overset{\triangle}{A}H$ داریم: $OH = \cos 2\alpha$ و در $A\overset{\triangle}{H}C$ داریم:

$$\sin\hat{A}_1 = \sin\alpha = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = \sin\alpha \times AC = \sin\alpha(2\sin\alpha) = 2\sin^2\alpha$$

از طرفی با توجه به اینکه $OC = 1$ شعاع دایره است پس داریم:

$$OC = OH + HC = 1 \Rightarrow OH = 1 - HC \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

مثال. مقدار $\cos 15^\circ$ و $\sin 15^\circ$ را بیابید.

حل. می‌دانیم که $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

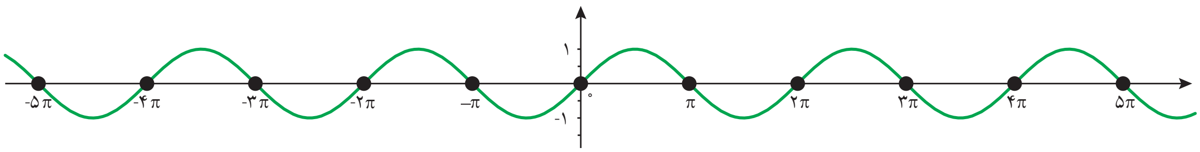
$$\cos 30^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15^\circ \Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

از طرفی داریم :

$$\sin 30^\circ = 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} = 2\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\cos 15^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{2-\sqrt{3}}\cos 15^\circ \Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2(2-\sqrt{3})}$$

معادلات مثلثاتی

تابع مثلثاتی $y=\sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است را در نظر بگیرید.

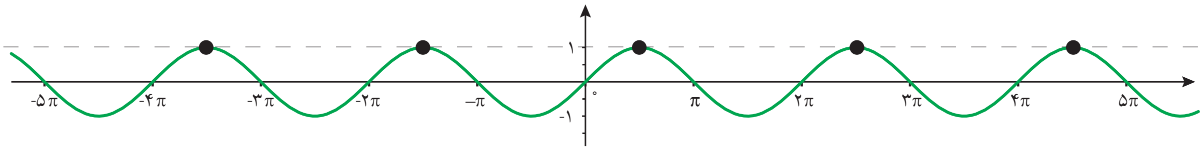


همان‌طور که در نمودار پیداست، ریشه‌های این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x=0$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به‌صورت :

$x=\ldots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$

می‌باشند محل تقاطع تابع ثابت $y=0$ (یعنی محورها) و تابع $y=\sin x$ است. این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x=k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.

به‌طور مشابه جواب های معادله $\sin x=1$ مقادیری از x هستند که سینوس آنها برابر ۱ می‌شود. این مقادیر محل تقاطع $y=1$ و $y=\sin x$ می‌باشند که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادله فوق به‌صورت

$$x = \cdots, \frac{\pi}{2} - 4\pi, \frac{\pi}{2} - 2\pi, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \ldots$$

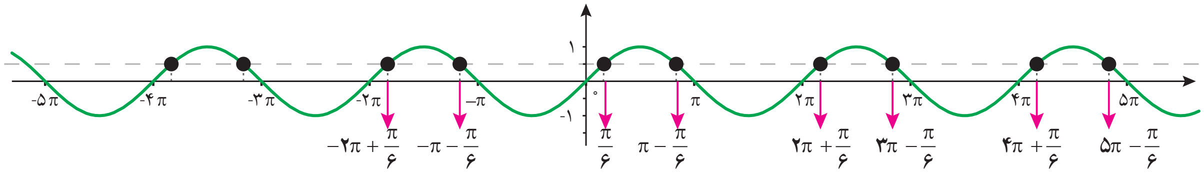
می‌باشند که به‌صورت کلی $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ که k یک عدد صحیح است قابل نمایش هستند.

اکنون معادله $\sin x = \frac{۱}{۲}$ را در نظر بگیرید. انجام مراحل زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

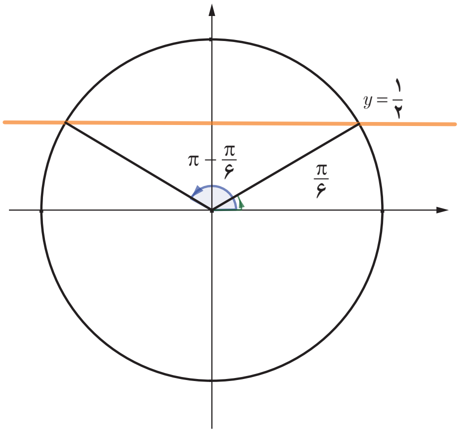
فعالیت

۱ با آزمون و خطا و یادآوری نسبت‌های مثلثاتی زوایایی که قبلاً فراگرفته‌اید چند زاویه که سینوس آنها برابر $\frac{۱}{۲}$ است را حدس بزنید و با جایگذاری در معادله $\sin x = \frac{۱}{۲}$ درستی حدس خود را بررسی کنید.

۲ خط $y = \frac{۱}{۲}$ و نمودار $y=\sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری که حدس زده‌اید را روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟



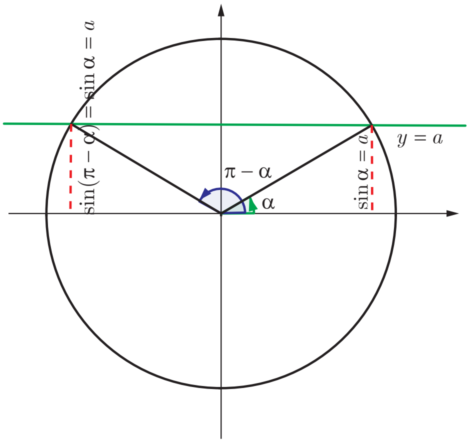
۳ طول نقاط تقاطع دو نمودار $y = \frac{۱}{۲}$ و $y=\sin x$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x = \frac{۱}{۲}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



۴ در دایره مثلثاتی روبه‌رو خط $y = \frac{۱}{۲}$ و زوایای $\frac{\pi}{۶}$ و $\pi - \frac{\pi}{۶}$ که سینوس آنها برابر $\frac{۱}{۲}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{۶}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi - \frac{\pi}{۶}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟

هم انتها با $\frac{\pi}{۶}$: $\ldots\ldots , \ldots\ldots , -۲\pi+\frac{\pi}{۶} , \frac{\pi}{۶} , \ldots\ldots , ۲\pi+\frac{\pi}{۶} , \ldots\ldots$

هم انتها با $\pi - \frac{\pi}{۶}$: $\ldots\ldots , \ldots\ldots , -\pi-\frac{\pi}{۶} , \ldots\ldots , ۳\pi-\frac{\pi}{۶} , \ldots\ldots$



همواره برای عدد حقیقی $-۱ \leq a \leq ۱$ که $\sin x = a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که برای آن داریم $\sin\alpha = a$. بنابراین معادله $\sin x = a$ به‌صورت $\sin x = \sin\alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x = \sin\alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را بیابیم.

با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به‌طوری که $\sin x = \sin\alpha$ در دوران‌های مختلف به‌صورت زیر است:

$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi + \alpha \qquad x = (۲k+۱)\pi - \alpha$$

جواب‌های کلی معادله $\sin x=\sin\alpha$ به‌صورت $x=2k\pi+\alpha$ و $x=(2k+1)\pi-\alpha$ می‌باشد که $k\in\mathbb{Z}$.

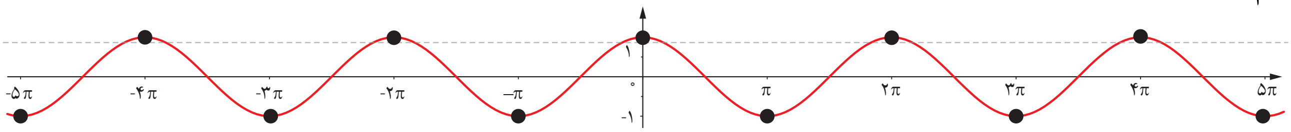
کار در کلاس

۱ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2\sin x-1=0$

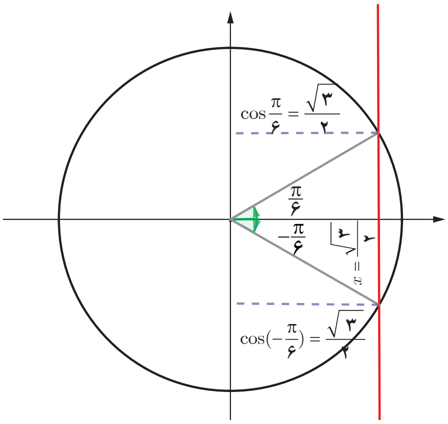
ب) $4\sin x+\sqrt{8}=0$

۲ نمودار تابع $y=\cos x$ و خط $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ را بیابید.



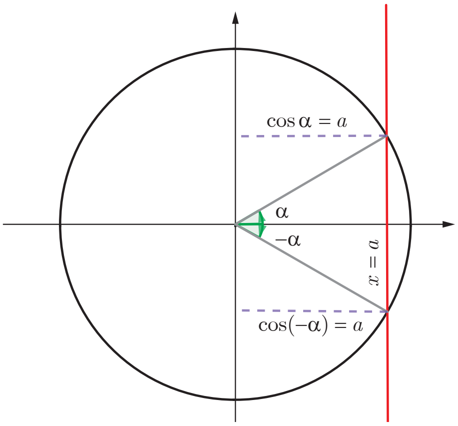
الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه‌رو و محل تقاطع خط $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ با دایره مثلثاتی جواب‌های معادله فوق را به‌دست آورید.



برای هر عدد حقیقی $-1\leq a\leq 1$ معادله $\cos x=a$ برقرار است زاویه‌ای چون α وجود دارد که $\cos\alpha=a$. بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به‌صورت $\cos x=\cos\alpha$ نوشته و سپس رابطه بین کمان‌های x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو به‌صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x=\cos\alpha \Rightarrow x=2k\pi+\alpha \quad , \quad x=2k\pi-\alpha$$



جواب‌های کلی معادله $\cos x=\cos\alpha$ به‌صورت $x=2k\pi\pm\alpha$ می‌باشند که $k\in\mathbb{Z}$.

مثال ۱ــ جواب‌های معادله $\cos x = -\frac{۱}{۲}$ را به‌دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-۳\pi, \pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos\frac{\pi}{۳} = -۱$ پس معادله به‌صورت $\cos x = \cos\frac{\pi}{۳}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند.

$$x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق داریم :

k	x	عضویت در بازه
$k = ۰$	$x = ۲\times ۰\times \pi + \frac{\pi}{۳} = \frac{\pi}{۳}$	$-\frac{\pi}{۳} \in [-۳\pi, \pi]$
	$x = ۲\times ۰\times \pi - \frac{\pi}{۳} = -\frac{\pi}{۳}$	$-\frac{\pi}{۳} \in [-۳\pi, \pi]$
$k = ۱$	$x = ۲\times ۱\times \pi + \frac{\pi}{۳} = ۲\pi + \frac{\pi}{۳}$	$۲\pi + \frac{\pi}{۳} \notin [-۳\pi, \pi]$
	$x = ۲\times ۱\times \pi - \frac{\pi}{۳} = ۲\pi - \frac{\pi}{۳}$	$۲\pi - \frac{\pi}{۳} \notin [-۳\pi, \pi]$
$k = -۱$	$x = ۲\times -۱\times \pi + \frac{\pi}{۳} = -۲\pi + \frac{\pi}{۳}$	$-۲\pi + \frac{\pi}{۳} \in [-۳\pi, \pi]$
	$x = ۲\times -۱\times \pi - \frac{\pi}{۳} = -۲\pi - \frac{\pi}{۳}$	$-۲\pi - \frac{\pi}{۳} \in [-۳\pi, \pi]$
$k = ۲$	$x = ۲\times ۲\times \pi + \frac{\pi}{۳} = ۴\pi + \frac{\pi}{۳}$	$۴\pi + \frac{\pi}{۳} \notin [-۳\pi, \pi]$
	$x = ۲\times ۲\times \pi - \frac{\pi}{۳} = ۴\pi - \frac{\pi}{۳}$	$۴\pi - \frac{\pi}{۳} \notin [-۳\pi, \pi]$
$k = -۲$	$x = ۲\times -۲\times \pi + \frac{\pi}{۳} = -۴\pi + \frac{\pi}{۳}$	$-۴\pi + \frac{\pi}{۳} \notin [-۳\pi, \pi]$
	$x = ۲\times -۲\times \pi + \frac{\pi}{۳} = -۴\pi - \frac{\pi}{۳}$	$-۴\pi - \frac{\pi}{۳} \notin [-۳\pi, \pi]$

می‌توان نشان داد که جواب‌هایی از معادله فوق که به ازای مقادیر دیگری از k تولید می‌شوند خارج بازه داده شده می‌باشند. بنابراین نتیجه می‌شود که جواب‌های $x = -۲\pi - \frac{\pi}{۳}, -۲\pi + \frac{\pi}{۳}, -\frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۳}$ از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

مثال ۲ــ معادله $\sin ۲x = \sin ۳x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند :

$$\begin{cases} ۲x = ۲k\pi + ۳x \Rightarrow x = ۲k \\ ۲x = (۲k\pi + ۱)\pi - ۳x \Rightarrow x = \dfrac{۲k+۱}{۵}\pi \end{cases}$$

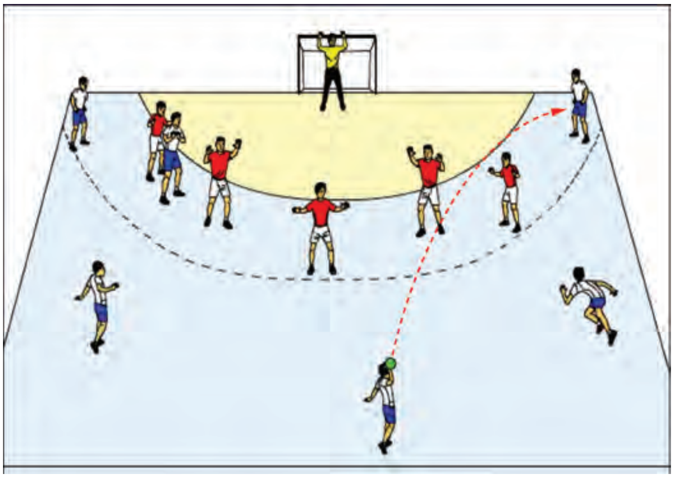
مثال ۳ــ معادله $۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$ را حل کنید.

$$۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$$

$$۲\sin ۳x = \sqrt{۲}$$

$$\sin ۳x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\sin ۳x = \sin \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \dfrac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \dfrac{۲k\pi}{۳} + \dfrac{\pi}{۱۲} \\ ۳x = (۲k+۱)\pi - \dfrac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \dfrac{(۲k+۱)}{۳}\pi - \dfrac{\pi}{۱۲} \end{cases}$$



مثال ۴ــ یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت $۱۲\ km/h$ برای هم‌تیمی خود که در ۲۰ متری او قرار گرفته پرتاب می‌کند (به‌شکل نگاه کنید). اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب کیلومتر بر ساعت)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به‌صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^۲}{۳۲}\sin ۲\theta$$

مثال ۵ــ جواب‌های معادله $\sin x \cos x = \dfrac{\sqrt{۳}}{۴}$ را به‌دست آورید.

$$۲\sin x \cos x = ۲\frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sin ۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sin ۲x = \sin \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \dfrac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{۶} \\ ۲x = (۲k+۱)\pi - \dfrac{\pi}{۳} \Rightarrow x = \dfrac{(۲k+۱)}{۲} - \dfrac{\pi}{۶} \end{cases}$$

مثال ۶ــ معادله $\cos(۲\cos x - ۹) = ۵$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به‌صورت $۲\cos^۲ x - ۹\cos x - ۵ = ۰$ می‌نویسیم. با تغییر متغیر $t = \cos x$ می‌توان معادله فوق را به معادله درجه دوم $۲t^۲ - ۹t - ۵ = ۰$ نوشت. جواب‌های این معادله به‌صورت $t = -\frac{۱}{۲}$ و $t = ۵$ به‌دست می‌آیند. بنابراین جواب‌های معادله مثلثاتی بالا از حل دو معادله ساده $\cos x = ۵$ و $\cos x = \frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آیند. از آنجا که $\cos x = ۵$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب‌های معادله $\cos x = -\frac{۱}{۲}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\cos x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x - ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$$

تمرین

۱ فرض کنید $\cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}$ و α زاویه‌ای تند باشد، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\cos ۲\alpha$ ب) $\sin ۲\alpha$

۲ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $۲۲/۵^\circ$ به‌دست آورید.

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{۲} = \sin ۳x$ ب) $\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$

پ) $\cos x = \cos ۲x$ ت) $\cos ۲x - \sin x + ۱ = ۱$

ث) $۲\sin^۲ x + \sin x - ۱ = ۰$ ج) $\sin x - \cos ۲x = ۰$

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

فصل

۴ کاربرد مشتق

درس اوّل
آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای

درس دوم
؟؟؟؟؟؟

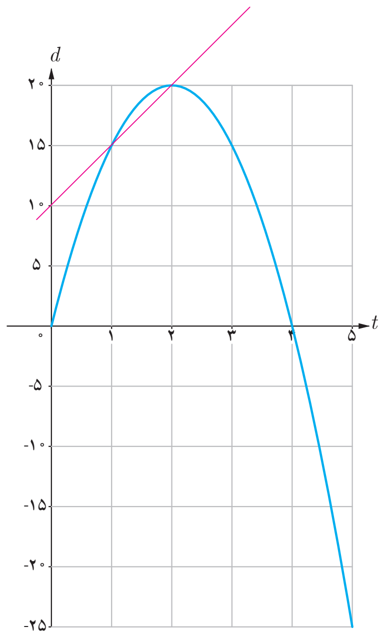
درس سوم
؟؟؟؟؟؟؟

درس اوّل

آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای

با مفهوم سرعت متوسط در فیزیک آشنا شده‌اید. اگر اتومبیلی در امتداد یک خط راست مسافت ۲۸۰ کیلومتر را در طی ۴ ساعت طی کند سرعت متوسط آن در طی این زمان $\frac{۲۸۰}{۴}=۷۰$ کیلومتر بر ساعت است. با این حال می‌دانید که ممکن است اتومبیل در لحظات مختلف سرعت‌های متفاوتی داشته باشد. همچنین می‌دانید که سرعت متوسط روی یک بازه زمانی خیلی کوچک به سرعت لحظه‌ای نزدیک است. اگر نمودار مکان ــ زمان در مورد حرکت یک اتومبیل را داشته باشیم، سرعت متوسط اتومبیل بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که نمودار مکان ــ زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند.

همچنین سرعت لحظه‌ای در هر لحظه دلخواه t، برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه تعریف شد. با آنچه که در درس‌های گذشته ملاحظه کردید، می‌توان گفت که سرعت در لحظه t همان مقدار مشتق تابع (مکان ــ زمان) در لحظه t است. مفهوم مشتق را در بسیاری از پدیده‌های دیگر نیز می‌توان مشاهده کرد. ابتدا در مورد سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای به ذکر مثالی خواهیم پرداخت.



مثال : خودرویی در امتداد یک خط راست طبق معادله $d(t)=-۵t^۲+۲۰t$ حرکت می‌کند. $۰\leq t\leq۵$ با در نظر گرفتن نمودار مکان ــ زمان :

الف) سرعت متوسط خودرو را در بازه‌های زمانی [۱,۲]، [۱,۱/۵] و [۱,۱/۴] به‌دست آورید.

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری مانند [۱,۱/۳] و [۱,۱/۲] و ... اختیار کنیم، سرعت متوسط در این بازه‌ها به چه چیزی نزدیک می‌شود؟

پ) سرعت لحظه‌ای را با استفاده از مشتق تابع d در $t=۱$ به‌دست آورید.

ت) سرعت لحظه‌ای در $t=۲$ و $t=۳$ چقدر است؟

حل :

الف)

$$\text{سرعت متوسط در بازه } [۱,۲] = \frac{d(۲)-d(۱)}{۲-۱}=\frac{۲۰-۱۵}{۱}=۵\ \frac{m}{s}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه } [۱,۱/۵] = \frac{d(۱/۵)-d(۱)}{۱/۵-۱}=\frac{۱۵}{۲}=۷/۵\ \frac{m}{s}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه } [۱,۱/۴] = \frac{d(۱/۴)-d(۱)}{۱/۴-۱}=\frac{۱۸/۲-۱۵}{۰/۴}=\frac{۳/۲}{۰/۴}=۸\ \frac{m}{s}$$

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری اختیار کنیم، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای نزدیک می‌شود.

پ) $d'(t)=-۱۰t+۲۰$, $d'(۱)=۱۰$

ت) $d'(۲)=۰$, $d'(۳)=-۱۰$

سرعت در لحظه $t=۲$، صفر است و مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور xهاست و خودرو ساکن است. مقدار سرعت در لحظه‌های $t=۱$ و $t=۳$ برابر است ولی علامت منفی در مورد $f'(۲)$ نشان می‌دهد که جهت حرکت در $t=۳$ برخلاف جهت حرکت در $t=۱$ است.

به‌جز مفهوم سرعت در مطالعه، پدیده‌های زیاد دیگری که در قالب یک تابع نمایش داده می‌شوند با موضوع نسبت تغییر متغیر وابسته به متغیر مستقل مواجه می‌شویم. نسبت تغییرات دما به تغییرات زمان و جمعیت نسبت به زمان نمونه‌های دیگری از تغییرات هستند. به‌طور کلی آهنگ تغییر متوسط یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a , a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$[a , a+h] \text{ آهنگ تغییر متوسط تابع } f \text{ در بازه } = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x=a \text{ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع } f \text{ در نقطه } = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

آهنگ تغییر متوسط با شیب خط قاطع و آهنگ تغییر لحظه‌ای با مفهوم مشتق در آن نقطه متناظراند.

کار در کلاس

۱ نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه t نمایش می‌دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

A سرعت متوسط بین $t=۱$ و $t=۳$

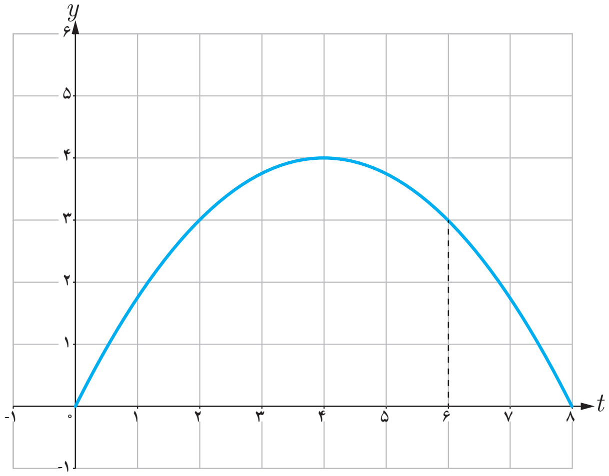
B سرعت متوسط بین $t=۵$ و $t=۶$

C سرعت لحظه‌ای در $t=۱$

D سرعت لحظه‌ای در $t=۳$

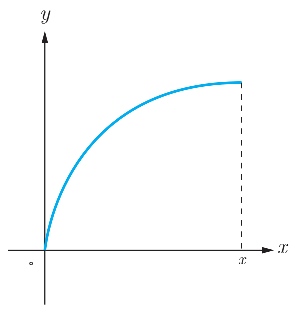
E سرعت لحظه‌ای در $t=۵$

F سرعت لحظه‌ای در $t=۶$

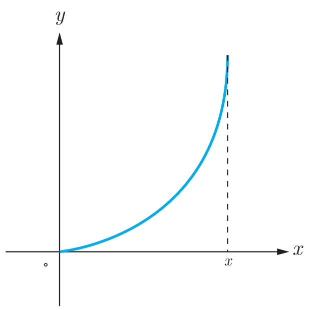


۲ کدام‌یک از نمودارهای داده شده دارای این خاصیت است:

برای همه مقادیر x، آهنگ تغییر متوسط روی $[۰,x]$ بزرگ‌تر است از آهنگ تغییر لحظه‌ای در x.



(ب)



(الف)

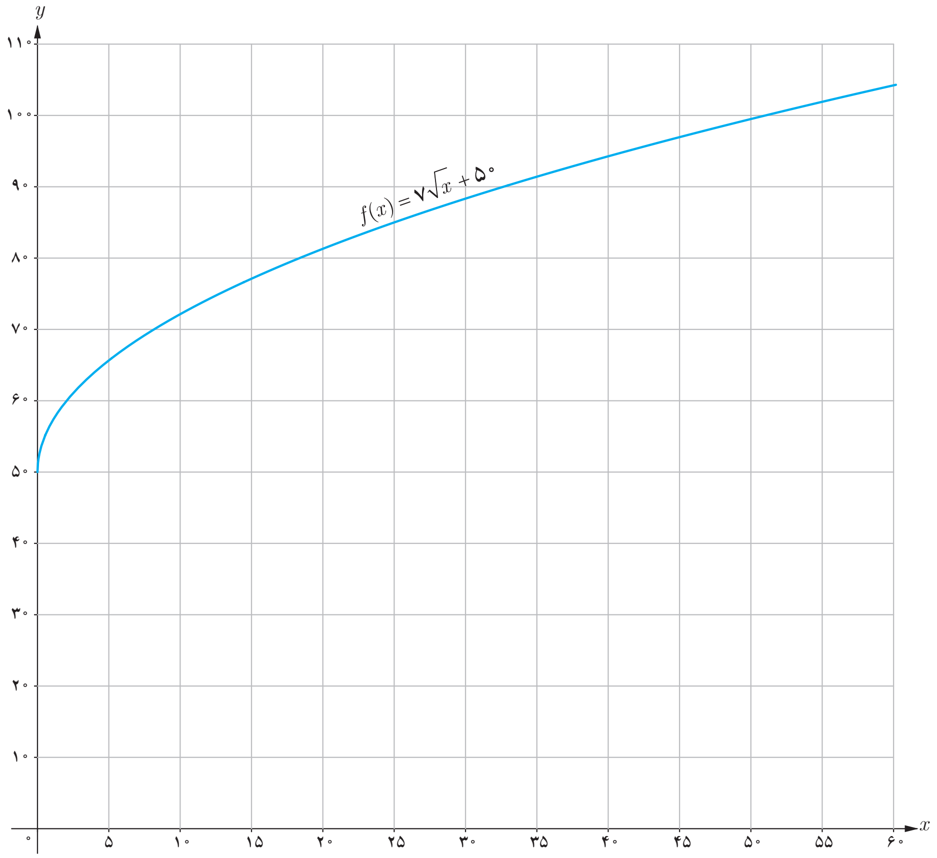
کاربردهایی دیگر از آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای

آهنگ رشد : همان‌گونه که در حسابان (۱) ملاحظه کردید تابع $f(x)=7\sqrt{x}+50$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x تعداد ماه‌های پس از تولد است.

آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0,60]$ چنین است :

$$\frac{f(60)-f(0)}{60-0}=\frac{7\sqrt{60}+50-50}{60}=0/9\ \frac{\text{سانتی‌متر}}{\text{ماه}}$$

یعنی در طی ۵ سال رشد متوسط قد به اندازه $\frac{9}{10}$ سانتی‌متر در هر ماه است.



کار در کلاس

الف) آهنگ رشد متوسط در بازه زمانی $[0,25]$ چقدر است؟

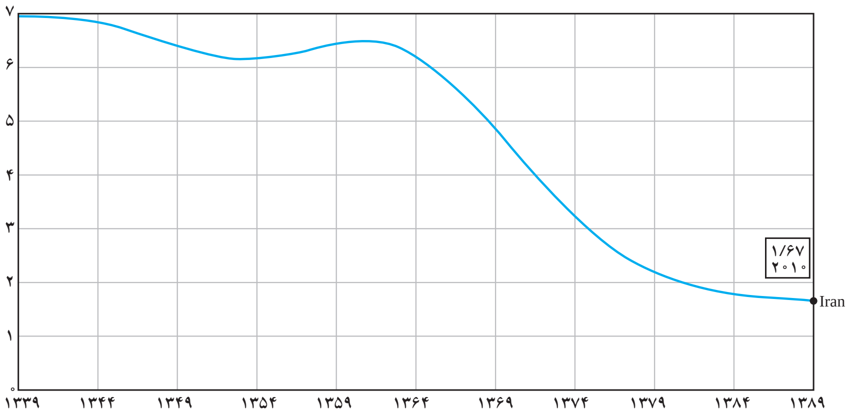
ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام‌یک بیشتر است؟

پ) اگر علی در ۱۶ ماهگی ۸۰ سانتی‌متر قد داشته باشد و قد او در ۳۶ ماهگی ۹۵ سانتی‌متر باشد، آهنگ تغییر متوسط رشد او را با آهنگ تغییر متوسط استاندارد (نمودار بالا) مقایسه کنید.

آهنگ (نرخ) باروری : نمودار زیر روند رو به کاهش نرخ باروری در کشورمان را در طی نیم‌قرن نمایش می‌دهد. آهنگ تغییر متوسط باروری در بازه زمانی [۱۳۳۹,۱۳۸۹] برابر است با :

$$\frac{۱/۶-۷}{۱۳۸۹-۱۳۳۹}=\frac{-۵/۴}{۵۰}=-۰/۱۰۸$$

آهنگ تغییر متوسط باروری در بازه زمانی [۱۳۶۴,۱۳۷۹] را به‌دست آورید. بازه زمانی را مشخص کنید که در آن آهنگ تغییر متوسط باروری مثبت باشد.



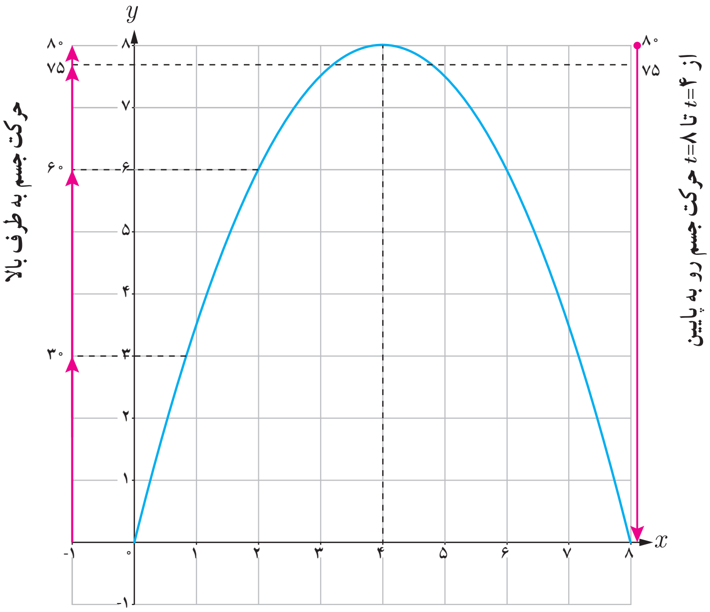
میانگین تعداد فرزندان متولد شده به ازای هر مادر ایرانی

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

مثال : جسمی را از سطح زمین به‌طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t)=-۵t^۲+۴۰t$ به‌دست می‌آید. به‌طور مثال ۲ ثانیه پس از پرتاب این جسم در ارتفاع ۶۰ متری از سطح زمین است.

به هر حال جسم پس از مدتی به زمین برمی‌گردد. نمودار مکان ــ زمان حرکت این جسم در شکل نشان داده شده است.

اگر سرعت متوسط این جسم در بازه‌های زمانی [۰,۲] ، [۱,۲] ، [۲,۳] و [۳,۴] به ترتیب با $v_۱$ ، $v_۲$ ، $v_۳$ و $v_۴$ نمایش دهیم داریم :



$$v_۱=\frac{h(۲)-h(۰)}{۲-۰}=\frac{۶۰}{۲}=۳۰\,m/s$$

$$v_۲=\frac{h(۲)-h(۱)}{۲-۱}=۳۰\,m/s$$

$$v_3=\frac{h(۳)-h(۲)}{۳-۲}=\frac{۷۵-۶۰}{۱}=۱۵\,m/s \qquad v_4=\frac{۸۰-۷۵}{۱}=۵\,m/s$$

سرعت لحظه‌ای در زمان‌های t=۱ ، t=۲ ، t=۳ و t=۴ با استفاده از مشتق تابع h چنین به‌دست می‌آید :

$$f(t)=-۵t^۲+۴۰t \Rightarrow f'(t)=-۱۰t+۴۰$$

$$f'(۱)=۳۰m/s \quad , \quad f'(۲)=۲۰m/s \quad , \quad f'(۳)=۱۰m/s \quad , \quad f'(۴)=۰\ m/s$$

در t=۴ جسم به بالاترین ارتفاع خود از سطح زمین (۸۰ متر) می‌رسد و در این لحظه سرعت آن برابر صفر (متر بر ثانیه) می‌شود. سپس جسم شروع به حرکت به طرف زمین می‌کند. سرعت متوسط در بازه [۴,۵] برابر $\frac{h(۵)-h(۴)}{۵-۴}=\frac{۷۵-۸۰}{۱}=-۵\,m/s$ و سرعت لحظه‌ای در t=۵ برابر $f'(۵)=-۱۰m/s$ است. علامت منفی نشان می‌دهد که حرکت جسم رو به پایین است.

کار در کلاس

با توجه به مثال قبل :

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به‌دست آورید.

ب) سرعت متوسط جسم را در بازه زمانی [۵,۸] به‌دست آورید.

پ) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم ۳۵ m/s و ۳۵ m/s– است.

تمرین

۱ جدول زیر درجه حرارت T (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ صبح تا ۱۸ عصر در یک روز نشان می‌دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را :

الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۶ به‌دست آورید.

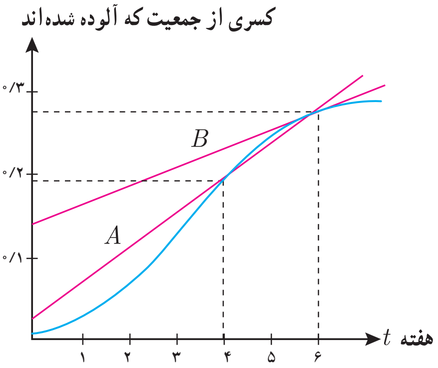
ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به‌دست آورید. پاسخ را چگونه تفسیر می‌کنید.

۲ کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار روبه‌رو نشان داده شده است.

الف) شیب‌های خطوط A و B چه چیزهایی را نشان می‌دهند.

ب) گسترش آلودگی در کدام‌یک از زمان‌های $t=$۱ ، $t=$۲ یا $t=$۳ بیشتر است؟

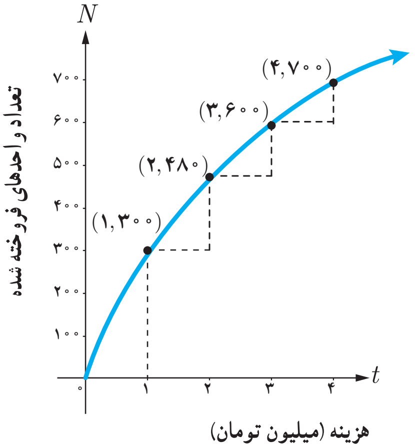
پ) قسمت ب را برای $t=$۴ ، $t=$۵ و $t=$۶ بررسی کنید.



۳ نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N برحسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند را به‌دست آورید.

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟



۴ معادله حرکت متحرکی به‌صورت $f(t)=t^2-t+10$ برحسب متر در بازه زمانی [۰,۵] (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی [۰,۵] با هم برابرند.

۵ توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول زیر نمایش داده شده است.

t ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$ متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

بر اساس جدول کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه، است نشان دهد؟

الف) ۱/۲۳m/s
ب) ۱۴/۹۱m/s
ج) ۱۱/۵m/s
د) ۱۶۰۳m/s

۶ با توجه به مقادیر داده شده برای تابع f در جدول زیر، f' را برای نقاط داده شده تخمین بزنید. به‌طور مثال $f'(۰)\approx -۶$. بقیه جدول را کامل کنید.

x	۰	۵	۱۰	۱۵	۳۰
$f(x)$	۱۰۰	۷۰	۵۵	۴۶	۴۰
مقدار تقریبی $f'(x)$	۶−				

۷ از سه دانش‌آموز خواسته شد که با استفاده از جدول زیر مقداری تقریبی برای $f'(۴)$ ارائه کنند. راه‌حل‌های سه دانش‌آموز در ادامه داده شده‌اند.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f(x)$	۴/۲	۴/۱	۴/۲	۴/۵	۵	۵/۷

دانش‌آموز اول : $f'(۴)\approx \frac{f(۵)-f(۴)}{۵-۴}=۰/۵$

دانش‌آموز دوم : $f'(۴)\approx \frac{f(۴)-f(۳)}{۴-۳}=۰/۳$

دانش‌آموز سوم : $f'(۴)\approx \frac{۰/۵+۰/۳}{۲}=۰/۴$

الف) نمودار f را رسم کنید و نشان دهید که این سه مقدار چگونه روی نمودار مشخص می‌شوند.

ب) از نظر شما کدام پاسخ صحیح‌تر است؟

۸ کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است :

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[۰,۱]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه صفر است.

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن هم، همواره صعودی است.

پ) نمی‌توان تابعی را یافت که برای آن هم $f'(a)=۰$ و هم $f(a)=۰$

۹ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+۲t^۳$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $۳\leq t\leq ۴$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=۳$ چقدر است؟

۱۰ گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظهٔ $t=۰$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V=۴۰(۱-\frac{t}{۱۰۰})^۲$ به‌دست آید :

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[۰,۱]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[۰,۱۰۰]$ می‌شود؟

فصل ۳

حد و مشتق

درس اوّل: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

درس دوم: آشنایی با مفهوم مشتق

درس سوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

درس اوّل

حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

حد توابع کسری

بنابر قضیه‌ای از سال قبل می‌دانیم که اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای مثل a حد داشته باشند و حد آنها در این نقطه به ترتیب l و m باشد به‌طوری که $m \neq ۰$، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و این حد برابر $\frac{l}{m}$ است. به عبارت دیگر با شرایط این قضیه، حد خارج قسمت دو تابع برابر است با خارج قسمت حدهای آنها.

مثال :

$$\lim_{x \to ۵} \frac{x^۲ - ۳x + ۲}{x + ۱} = \frac{۱۲}{۶} = ۲$$

همچنین، ملاحظه کردیم که در یک تابع گویا مثل $\frac{f}{g}$، اگر در نقطه‌ای مثل a هم حد صورت و هم حد مخرج هر دو برابر صفر باشند، در این صورت با حالت $\frac{۰}{۰}$ مواجه هستیم و دیگر قضیهٔ بالا برای محاسبه حد تابع $\frac{f}{g}$ در a قابلیت استفاده ندارد. در این حالت با توجه به روابط $f(a) = ۰$ و $g(a) = ۰$، نتیجه می‌گیریم که چند جمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x - a)$ بخش‌پذیرند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج کسر $\frac{f}{g}$ بر $(x - a)$، تابع گویای دیگری حاصل می‌شود که حد آن در نقطهٔ a، در صورت وجود با حد $\frac{f}{g}$ در a برابر است.

مثال : مقدار $\lim_{x \to ۱} \frac{x^۲ - ۱}{x^۲ + x - ۲}$ را محاسبه کنید.

حل : صورت و مخرج کسر به ازای $x = ۱$ برابر صفرند. بنابراین هم صورت و هم مخرج بر $(x - ۱)$ بخش‌پذیرند. این عامل را به کمک تجزیه، در صورت و مخرج ایجاد می‌کنیم.

$$\lim_{x \to ۱} \frac{x^۲ - ۱}{x^۲ + x - ۲} = \lim_{x \to ۱} \frac{\cancel{(x - ۱)}(x + ۱)}{\cancel{(x - ۱)}(x + ۲)} = \frac{۱ + ۱}{۱ + ۲} = \frac{۲}{۳}$$

مثال : حد تابع $f(x) = \frac{۲x^۳ + ۳x^۲ + ۴}{x^۳ + ۸}$ را در نقطهٔ $x = -۲$ در صورت وجود به دست آورید.

حل : در این مثال نیز صورت و مخرج در -۲ برابر صفرند. باید عامل $(x + ۲)$ را در صورت و مخرج ایجاد کنیم. مخرج را می‌توانیم به کمک اتحاد مجموع مکعبات دو جمله به حاصل‌ضرب عامل‌های اوّل تجزیه کنیم. اما شاید تجزیه صورت قدری دشوارتر باشد. به همین دلیل صورت را بر $(x + ۲)$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{۲x^۳} + ۳x^۲ + ۴ & x + ۲ \\ \cline{2-2}
-(\cancel{۲x^۳} + ۴x^۲) & ۲x^۲ - x + ۲ \\ \cline{1-1}
\quad \cancel{-x^۲} + ۴ & \\
\quad -(\cancel{-x^۲} - ۲x) & \\ \cline{1-1}
\qquad \cancel{۲x} + \cancel{۴} & \\
\qquad -(\cancel{۲x} + \cancel{۴}) & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad ۰ &
\end{array}$$

با توجه به تقسیم صفحه قبل می‌توان نوشت $۲x^۳+۳x^۲+۴=(x+۲)(۲x^۲-x+۲)$.

بنابراین:

$$\lim_{x\to -۲} f(x)=\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)(۲x^۲-x+۲)}{(x+۲)(x^۲-۲x+۴)}=\frac{۸+۲+۲}{۴+۴+۴}=۱$$

گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$. در این حالت برای محاسبه حد $\frac{f}{g}$ در a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ایجاد شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، قادر باشیم مقدار حد را در صورت وجود به دست آوریم.

مثال : حد تابع $g(x)=\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}$ را در نقطهٔ $x=۵$ به دست آورید.

حل : هم حد صورت و هم حد مخرج برابر صفرند. صورت و مخرج را در مزدوج صورت یعنی $۲+\sqrt{x-۱}$ ضرب می‌کنیم تا صورت کسر گویا شود.

$$\lim_{x\to ۵} g(x)=\lim_{x\to ۵}\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}\times\frac{۲+\sqrt{x-۱}}{۲+\sqrt{x-۱}}=\lim_{x\to ۵}\frac{۴-(x-۱)}{(x-۵)(۲+\sqrt{x-۱})}$$

$$=\lim_{x\to ۵}\frac{-(x-۵)}{(x-۵)(۲+\sqrt{x-۱})}=\frac{-۱}{۲+۲}=\frac{-۱}{۴}$$

مثال : حد تابع $h(x)=\frac{x^۲-۸x}{\sqrt[۳]{x}-۲}$ را در $x=۸$ به دست آورید.

حل : باز هم با حالت $\frac{۰}{۰}$ مواجه هستیم. صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۸} h(x)=\lim_{x\to ۸}\frac{x^۲-۸x}{\sqrt[۳]{x}-۲}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}=\lim_{x\to ۸}\frac{x(x-۸)(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴)}{x-۸}=۸(۴+۴+۴)=۹۶$$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -۳}\frac{x^۲-۹}{x^۲+۳x}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}\frac{۲x^۲+x-۱}{۴x^۲-۴x+۱}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x^۲-۵x+۶}{۲x^۳-۱۳x^۲+۲۴x-۹}$

ت) $\lim\limits_{x\to -۱}\frac{x^۲-۱}{x+\sqrt{۲x+۳}}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{x^۲+x-۲}$

ج) $\lim\limits_{x\to -۱}\frac{\sqrt[۳]{x}+۱}{x^۲-۳x+۲}$

حد نامتناهی

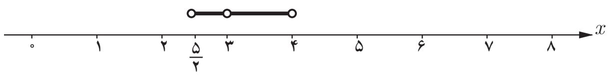
توابعی وجود دارند که در نزدیکی یک نقطه مثل a، مقدارشان از هر عدد دلخواهی می‌تواند بزرگ‌تر شود؛ به عبارت دیگر، حد آنها در a، بی‌نهایت می‌شود. در اینجا، حدهایی از این نوع را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

همسایگی : هر بازهٔ باز شامل عدد حقیقی $x_\circ$ را یک همسایگی از $x_\circ$ می‌نامیم. به عبارت دیگر اگر $x_\circ \in (a\,,b)$ آنگاه بازهٔ $(a\,,b)$ یک همسایگی از $x_\circ$ می‌باشد.

مثال : بازهٔ $(۲\,,۵)$ یک همسایگی از ۳ است. آیا بازهٔ $(۰\,,۴)$ هم یک همسایگی برای ۳ محسوب می‌شود؟ شما دو همسایگی دیگر برای ۳ بنویسید و جواب خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

همسایگی محذوف : اگر بازهٔ $(a\,,b)$ یک همسایگی از عدد حقیقی $x_\circ$ باشد، آنگاه مجموعهٔ $(a\,,b)-\{x_\circ\}$ یک همسایگی محذوف از $x_\circ$ نامیده می‌شود.

مثال : مجموعهٔ $(\frac{۵}{۲}\,,۴)-\{۳\}$ یک همسایگی محذوف از ۳ می‌باشد.



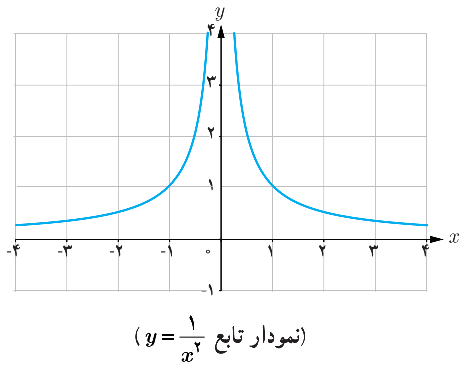
همسایگی چپ و راست : اگر r عددی مثبت باشد آنگاه $(x_\circ\,,x_\circ+r)$ یک همسایگی راست از $x_\circ$ نامیده می‌شود. همچنین، $(x_\circ-r\,,x_\circ)$ را یک همسایگی چپ از $x_\circ$ می‌نامیم.

فعالیت

می‌خواهیم مقدار $\lim\limits_{x\to\circ}\frac{۱}{x^۲}$ را در صورت وجود به‌دست آوریم. می‌دانیم تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲}$ در هر نقطهٔ غیرصفر تعریف شده است؛ یعنی $D_f=\mathbb{R}-\{\circ\}$. با تکمیل جدول زیر، برخی مقادیر تابع را در نزدیک صفر به‌دست آورید.

x	−۰/۲	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۰۱	→ ۰ ←	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۲
$f(x)=\frac{۱}{x^۲}$	۲۵	۱۰۰	...	۱۰۰۰۰۰۰۰۰	→ ? ←	...	۱۰۰۰۰۰۰	...	...	۲۵

در جدول دیده می‌شود که وقتی x از سمت راست یا چپ به ۰ نزدیک می‌شود، مقدار $x^۲$ نیز به ۰ نزدیک می‌شود، اما مقادیر $\frac{۱}{x^۲}$، بزرگ، بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود. در واقع با دقت در نمودار تابع $y=\frac{۱}{x^۲}$ می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه به اندازهٔ کافی x را به ۰ نزدیک کنیم، خواهیم توانست مقادیر $f(x)$ را به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ نماییم. بنابراین مقدارهای $f(x)$ به هیچ عددی میل نمی‌کند؛ در نتیجه $\lim\limits_{x\to\circ}\frac{۱}{x^۲}$ موجود نیست. با این حال برای توصیف بهتر رفتار این تابع در همسایگی صفر، ترجیح می‌دهیم از نماد $\lim\limits_{x\to\circ}\frac{۱}{x^۲}=+\infty$ استفاده کنیم.



(نمودار تابع $y=\frac{۱}{x^۲}$)

تذکر : همچنان که از سال‌های قبل می‌دانیم، $+\infty$ یک عدد حقیقی نیست و رابطهٔ $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x^۲}=+\infty$ صرفاً بر حالت خاصی از عدم وجود حد اشاره دارد. به این معنا که $\frac{۱}{x^۲}$ را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم بزرگ کنیم، مشروط بر آنکه x را به قدر کافی به ۰ نزدیک کرده باشیم. در حالت کلی تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱ : فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقدارهای $f(x)$ را به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

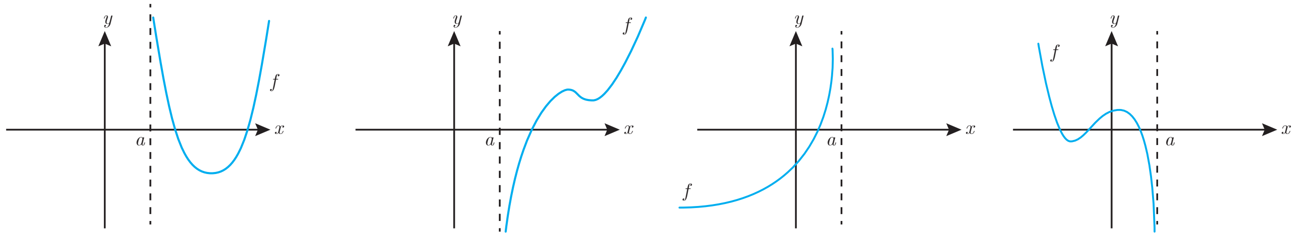
رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ به روش مشابه تعریف می‌شود :

تعریف ۲ : فرض کنیم f در یک .... a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را به هر اندازهٔ .... کوچک و منفی کرد (از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر کرد)، مشروط بر آنکه x به قدر .... به a نزدیک اختیار شود.

حدهای یک طرفهٔ نامتناهی نیز به روش مشابهی تعریف می‌شوند. به عنوان نمونه تعریف $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ در زیر آمده است.

تعریف ۳ : فرض کنیم f در یک همسایگی راست از a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ کرد، مشروط بر آنکه x با مقادیر بزرگ‌تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

به نمودار مربوط به $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ و همچنین سایر حالت‌های حدود نامتناهی، در شکل‌های زیر دقت کنید.



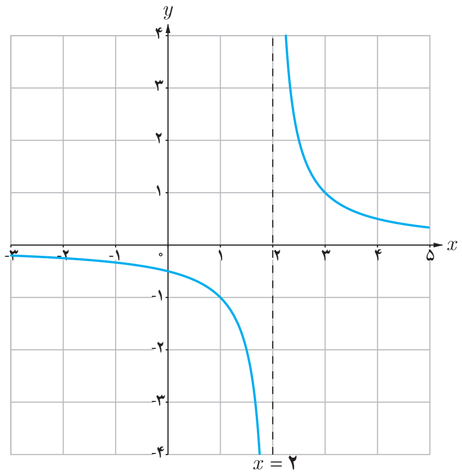
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ | $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ | $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ | $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

مثال : حاصل حدهای زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{۱}{x-۲}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{۱}{x-۲}$

حل : وقتی $x\to ۲^+$ در این صورت مخرج کسر یعنی $(x-۲)$ عددی مثبت و کوچک خواهد بود. در نتیجه $\frac{۱}{x-۲}$ عددی بزرگ و مثبت می‌شود. بنابراین دیده می‌شود که $\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{۱}{x-۲}=+\infty$ به همین ترتیب وقتی $x\to ۲^-$، مخرج کسر یعنی $(x-۲)$ عددی منفی و نزدیک صفر خواهد بود. در نتیجه مقدار $\frac{۱}{x-۲}$ از هر عدد منفی، کوچک‌تر می‌شود. بنابراین $\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{۱}{x-۲}=-\infty$.

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$ رسم شده است. به مقادیر تابع در سمت راست و چپ $x=۲$ دقت نمایید.



در مورد حدهای نامتناهی قضیهٔ زیر بدون اثبات بیان می‌شود.

قضیه ۱ : فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ در این صورت

الف) اگر $L>0$ و تابع $g(x)$ در نزدیکی a با مقادیر مثبت به صفر میل کند، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ب) اگر $L>0$ و تابع $g(x)$ در نزدیکی a با مقادیر منفی به صفر میل کند، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

پ) اگر $L<0$ و تابع $g(x)$ در نزدیکی a با مقادیر مثبت به صفر میل کند، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ت) اگر $L<0$ و تابع $g(x)$ در نزدیکی a با مقادیر منفی به صفر میل کند، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{[x]-3}{|2x-1|}$ را محاسبه کنید[1].

حل : مخرج در نزدیکی $\frac{1}{2}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند و حد صورت هم در $\frac{1}{2}$ برابر -3 است.
پس بنابر قضیه بالا داریم :

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{[x]-3}{|2x-1|}=-\infty$$

کار در کلاس

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{2x}{x-5}$

ب) $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{2x}{x-5}$

پ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{x^2}$

ت) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2}{|x-3|}$

ث) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{[x]}{|3x+1|}$

ج) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{\sin^2 x}$

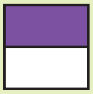
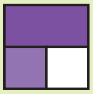
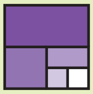
حد در بی‌نهایت

در بخش قبل که حدهای نامتناهی را بررسی کردیم، دیدیم که وقتی x را به سمت عددی مثل a میل می‌دادیم، مقادیر y به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کرد. در اینجا x را به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌دهیم و حد تابع را به دست می‌آوریم.

۱ــ در اینجا حد آن توابع کسری مدنظر است که به‌صورت عدد غیر صفر بر روی صفر باشد. بنابراین حالت‌های $\frac{\infty}{\infty}$، $0\times\infty$ و $\infty-\infty$ مورد نظر نیستند که این مطلب باید در سؤالات ارزشیابی هم مورد توجه باشد.

فعالیت

فرض کنید بخواهیم سطح مربعی به ضلع ۱ متر را مطابق شکل‌های زیر به شیوهٔ خاصی رنگ کنیم. در مرحلهٔ اوّل، نصف سطح مربع را رنگ می‌کنیم. در مرحله دوم نصف قسمت‌های رنگ نشده را و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

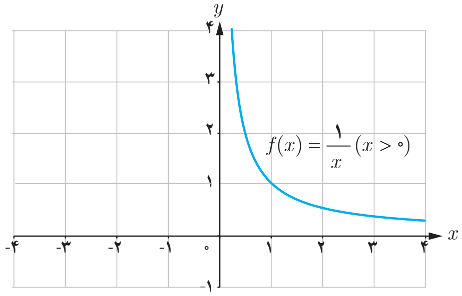
مرحله	۱	۲	۳	۴	۵
شکل					...
سطح رنگ شده (متر مربع)	$\frac{۱}{۲}=۱-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۴}=۱-\frac{۱}{۲^۲}$	$\frac{۷}{۸}=۱-\frac{۱}{۲^۳}$	...	...

الف) در مرحلهٔ دهم، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

ب) در مرحلهٔ nام، چه سطحی از مربع رنگ شده است؟

پ) اگر n به قدر کافی بزرگ اختیار شود، در مورد مساحت سطح رنگ شده در مرحلهٔ nام چه می‌توان گفت؟

در فعالیت بالا دیدیم که رفتار تابع $f(n)=۱-\frac{۱}{۲^n}$ به ازای nهای بزرگ مدنظر است. به عبارت دیگر مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}(۱-\frac{۱}{۲^n})$ مورد نظر می‌باشد. به طور شهودی می‌توان گفت که اگر n به قدر کافی بزرگ اختیار شود، پس از n مرحله تقریباً تمام سطح مربع رنگ می‌شود. به عبارت دیگر $\lim\limits_{n\to+\infty}(۱-\frac{۱}{۲^n})=۱$.



حال تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در بازهٔ $(۰\ ,\ +\infty)$ در نظر می‌گیریم. رفتار این تابع را به ازای برخی مقادیر مثبت x در جدول زیر مشاهده می‌کنید.

x	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	$\to +\infty$
$f(x)=\frac{۱}{x}$	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	$\to ۰$

از جدول دیده می‌شود که با افزایش مقدار x، مقدار $\frac{۱}{x}$ به صفر نزدیک، نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به نظر شما، آیا به هر میزان که بخواهیم، می‌توانیم مقدار $\frac{۱}{x}$ را به صفر نزدیک کنیم؟ به عنوان مثال، آیا مقداری از x وجود دارد که به ازای آن، فاصله $\frac{۱}{x}$ تا صفر کمتر از ۰/۰۰۰۰۰۱ باشد؟ در این حالت می‌گوییم حد تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ در $+\infty$ برابر صفر است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=۰$.

> به‌طور کلی اگر تابع f در بازه‌ای مثل $(a\ ,\ +\infty)$ تعریف شده باشد، عبارت $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ به این معناست که به هر مقدار دلخواه می‌توان $f(x)$ را به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

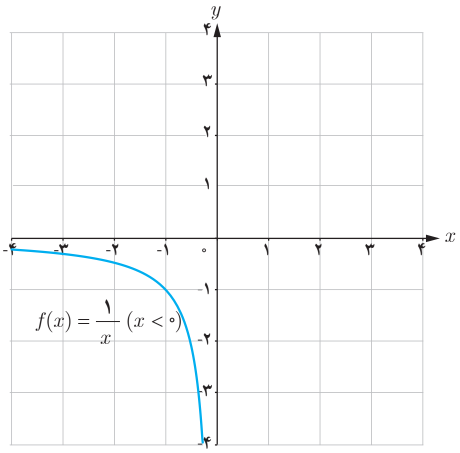
رابطهٔ $\lim_{x\to -\infty} f(x)=L$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شود :

فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty \ , \ b)$ تعریف شده باشد. عبارت $\lim_{x\to -\infty} f(x)=L$ به این معناست که به هر مقدار .... می‌توان $f(x)$ را به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر .... کوچک (و منفی) اختیار شود.

مثال : با توجه به جدول زیر و با ملاحظهٔ نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ که در بازهٔ $(-\infty \ , \ ۰)$ رسم شده است، دیده می‌شود که $\lim_{x\to -\infty}\frac{۱}{x}=۰$.

x	$-\infty \leftarrow$	-۱۰۰۰۰۰۰	-۱۰۰۰۰۰	-۱۰۰۰	-۱۰۰
$f(x)=\frac{۱}{x}$	$۰ \leftarrow$	$-۰/۰۰۰۰۰۱$	...	...	$-۰/۰۱$

در مورد حد تابع‌ها در نقطه‌ای مثل a، سال گذشته قواعدی مانند حد مجموع، حد حاصل‌ضرب و... داشتیم که اکثر آنها در حالتی که $x\to +\infty$ و $x\to -\infty$ نیز درست‌اند. علاوه بر آن قضیه زیر هم برقرار است.



قضیه : فرض کنیم r عددی گویا و مثبت باشد.

الف) $\lim_{x\to +\infty}\frac{۱}{x^r}=۰$

ب) اگر به ازای هر x، x^r تعریف شده باشد، آنگاه $\lim_{x\to -\infty}\frac{۱}{x^r}=۰$.

مثال: $\lim_{x\to +\infty}(-۲+\frac{۱}{\sqrt{x}})=\lim_{x\to +\infty}(-۲)+\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{۱}{x^{\frac{۱}{۲}}}\right)=-۲+۰=-۲$

مثال: $\lim_{x\to -\infty}\frac{۲-\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}}{\frac{۱}{x}+۳}=\frac{\lim_{x\to -\infty}(۲-\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}})}{\lim_{x\to -\infty}(\frac{۱}{x}+۳)}=\frac{۲-۰}{۰+۳}=\frac{۲}{۳}$

مثال : مقدار $\lim_{x\to +\infty}\frac{۷x^۲-۴x+۱}{۳x^۲+۵x-۶}$ را به دست آورید.

حل : برای محاسبه این حد، ابتدا باید صورت و مخرج را بر بزرگ‌ترین توانی از x که در مخرج وجود دارد، یعنی $x^۲$ تقسیم کنیم (چون $x\to +\infty$، پس می‌توان فرض کرد $x^۲\neq ۰$).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۷x^{۲}-۴x+۱}{۳x^{۲}+۵x-۶}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۷x^{۲}-۴x+۱}{x^{۲}}}{\frac{۳x^{۲}+۵x-۶}{x^{۲}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۷-\frac{۴}{x}+\frac{۱}{x^{۲}}}{۳+\frac{۵}{x}-\frac{۶}{x^{۲}}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to+\infty}(۷-\frac{۴}{x}+\frac{۱}{x^{۲}})}{\lim_{x\to+\infty}(۳+\frac{۵}{x}-\frac{۶}{x^{۲}})}=\frac{۷-۰+۰}{۳+۰-۰}=\frac{۷}{۳}$$

کار در کلاس

۱ مقدار حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x+۲}{x-۱}$

ب) $\lim_{t\to-\infty}\frac{۱-۵t^{۲}}{t^{۲}+۳t}$

پ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{۳x-۲}$

ت) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}$

۲ الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر (۱−) باشد. پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

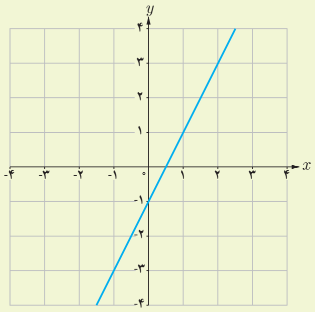
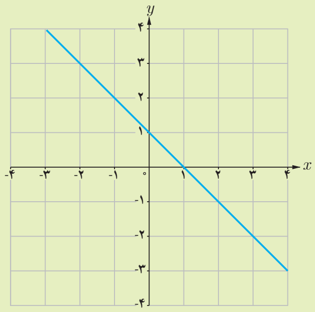
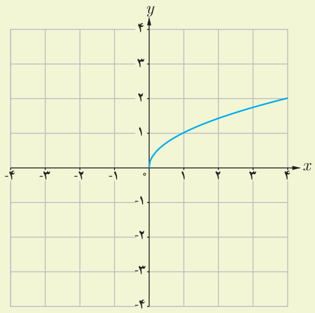
ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر ۱۰۰ باشد. پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

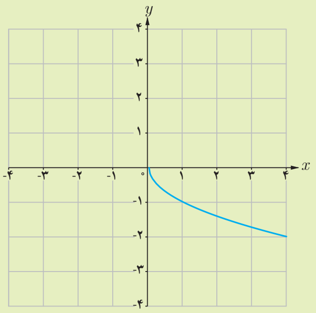
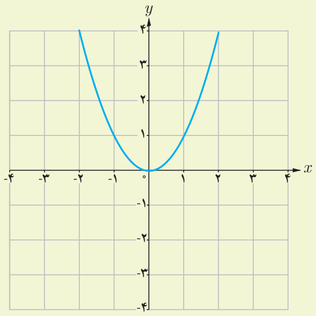
درس دوم

اکسترمم‌های تابع

یکنوایی تابع و مشتق

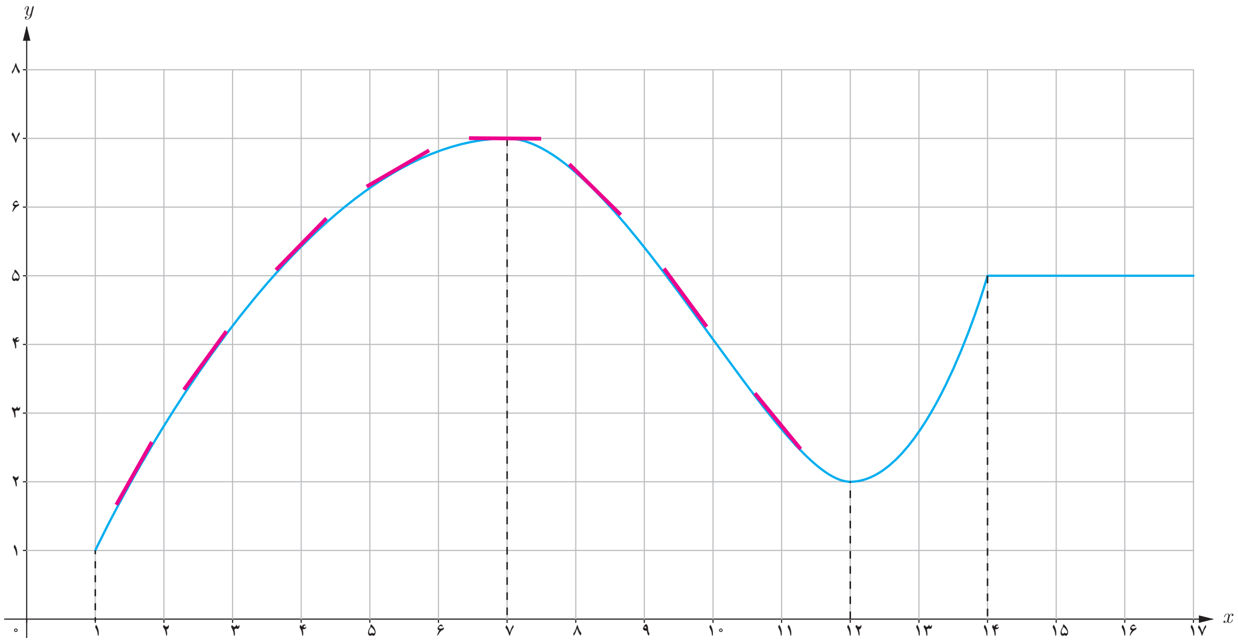
در فصل اول، تعریف تابع صعودی و تابع نزولی را دیدیم. در اینجا می‌خواهیم ارتباط علامت مشتق یک تابع را با صعودی یا نزولی بودن آن تابع بررسی کنیم. جدول زیر را در نظر بگیرید. در این جدول مشخصات چند تابع ارائه شده است که از قبل با آنها آشنا هستیم. به علاوه، مشتق هر کدام از این تابع‌ها، تعیین علامت شده و صعودی یا نزولی بودن آنها نیز مشخص شده است.

علامت مشتق	تابع مشتق	یکنوایی تابع	نمودار تابع	ضابطهٔ تابع
همواره $f'(x) > ۰$	$f'(x) = ۲$	f در R اکیداً صعودی است		$f(x) = ۲x - ۱$
همواره ...	$g'(x) = -۱$	g در R اکیداً ... است		$g(x) = -x + ۱$
همواره $h'(x) > ۰$ در $[۰, +\infty)$	$h'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$	h در $[۰, +\infty)$ اکیداً صعودی است		$h(x) = \sqrt{x}$

در $[0,+\infty)$، همواره ...	$u'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{x}}$ $u'(x)=\ldots$	u در $[0,+\infty)$ اکیداً ... است		$u(x)=-\sqrt{x}$
$x\in(-\infty,0)\Rightarrow k'(x)<0$ $x\in(0,+\infty)\Rightarrow k'(x)>0$	$k'(x)=2x$	k در $(-\infty,0)$ اکیداً نزولی و در $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی است		$k(x)=x^2$

با دقت در جدول بالا، توضیح دهید که چه رابطه‌ای بین علامت مشتق در یک بازه و یکنوایی تابع در آن بازه وجود دارد.

از فصل قبل می‌دانیم که مشتق هر تابع در یک نقطه، برابر است با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه. تابع زیر را درنظر بگیرید.



ملاحظه می‌شود که :

الف) در بازهٔ $(1,7)$ که f اکیداً صعودی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f، مثبت است؛ پس در این بازه f' مثبت است.

ب) در بازهٔ $(۷, ۱۲)$ که تابع اکیداً نزولی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f، منفی است؛ بنابراین در این بازه f' منفی است.

پ) در بازه $(۱۴, +\infty)$ که تابع، مقدار ثابت دارد، f' برابر صفر است.

مطلب فوق برای توابع مشتق‌پذیر همواره درست است که آن‌را به شکل زیر بیان می‌کنیم :

آزمون یکنوایی تابع

الف) در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنهٔ f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

بنابراین برای مشخص کردن بازه‌های مربوط به صعودی بودن یا نزولی بودن تابع f، کافی است f' را تعیین علامت کنیم. به مثال زیر دقت کنید.

مثال : تابع $f(x) = ۲x^۳ - ۹x^۲ + ۱۴$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه‌ها اکیداً نزولی است؟

حل : f' را به‌دست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f'(x) = ۶x^۲ - ۱۸x$$

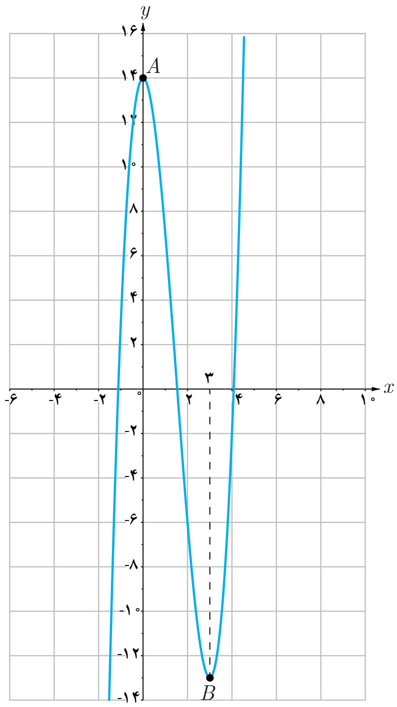
$$f'(x) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \ , \quad x = ۳$$

	۰	۳	
بازه	$(-\infty , ۰)$	$(۰ , ۳)$	$(۳ , +\infty)$
علامت f'	+	−	+
یکنوایی f	اکیداً صعودی ↗	اکیداً نزولی ↘	اکیداً صعودی ↗

نمودار تابع f مربوط به مثال قبل را رسم کرده‌ایم. آن را با جدول مقایسه کنید.

در نمودار این تابع، نقاط به طول ۰ و ۳ که صفرهای تابع f' هستند را مورد توجه قرار دهید.

اهمیت این نقاط از این جهت است که در هر یک از آنها، رفتار تابع از نظر صعودی یا نزولی بودن عوض شده است (جدول قبل ملاحظه شود). این دو نقطه را اگر به ترتیب A و B بنامیم، آنگاه A را نقطهٔ ماکزیمم نسبی f و B را نقطهٔ مینیمم نسبی f می‌گوییم که تعریف دقیق آنها به شرح زیر است.



تعریف : گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول c ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند I باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم : $f(c) \geq f(x)$.
در این حالت $f(c)$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع f نامیده می‌شود.

مثال : همچنان‌که گفته شد، تابع مثال قبل در نقطهٔ $A(۰, ۱۴)$ ماکزیمم نسبی دارد و ۱۴ را مقدار ماکزیمم نسبی این تابع می‌نامیم. مینیمم نسبی به روش مشابه تعریف می‌شود.

تعریف : گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند I باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

در مثال قبل، تابع در چه نقطه‌ای مینیمم نسبی دارد؟ مقدار مینیمم نسبی آن چقدر است؟

کار در کلاس

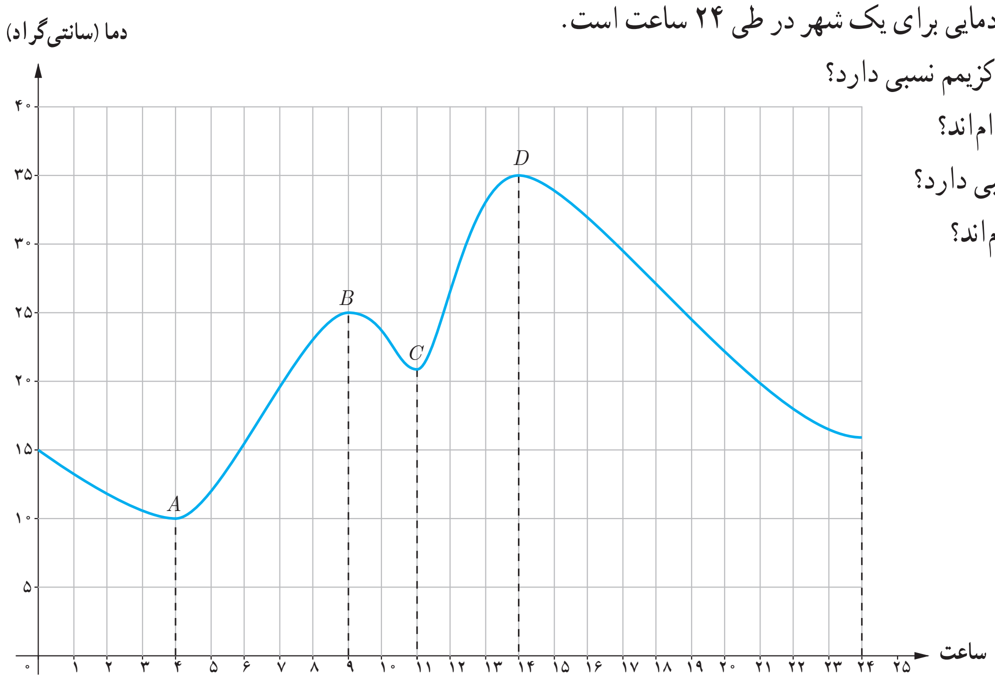
نمودار زیر نشان‌دهنده تغییرات دمایی برای یک شهر در طی ۲۴ ساعت است.

الف) تابع مقابل در چه نقاطی ماکزیمم نسبی دارد؟

ب) مقادیر ماکزیمم نسبی تابع کدام‌اند؟

پ) تابع در چه نقاطی مینیمم نسبی دارد؟

ت) مقادیر مینیمم نسبی تابع کدام‌اند؟



با توجه به نمودار، دیده می‌شود که دمای هوا در ساعت ۱۴ بیشترین مقدار و برابر با ۳۵ درجه سانتی‌گراد بوده است. در این حالت می‌گوییم تابع در نقطهٔ (۱۴,۳۵) ماکزیمم مطلق دارد و مقدار ماکزیمم مطلق آن برابر ۳۵ می‌باشد. نقطهٔ مینیمم مطلق این تابع و همچنین مقدار مینیمم مطلق آن را بنویسید.

تعریف : نقطهٔ به طول c از دامنهٔ تابع f یک نقطهٔ ماکزیمم مطلق برای تابع نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

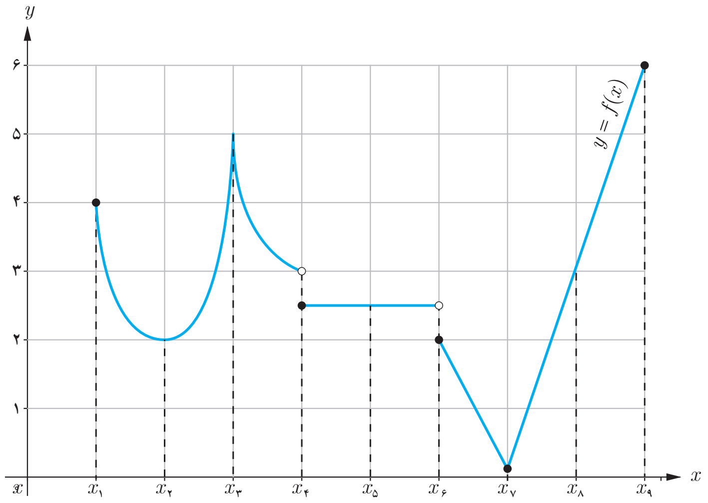
تعریف : نقطهٔ به طول c از دامنهٔ تابع f یک نقطهٔ مینیمم مطلق برای تابع نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x از D_f داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت عدد $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق f روی D_f می‌نامیم.

در تابع صفحه قبل نقاط A و D به ترتیب نقاط مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق تابع هستند.
تذکر : مقادیر ماکزیمم و مینیمم یک تابع را اکسترمم‌های آن تابع هم می‌گوییم. تابع صفحه قبل درنقاط A ، B ، C ، D اکسترمم نسبی دارد و نقاط A و D اکسترمم‌های مطلق تابع هستند.

کار در کلاس

۱ــ با تکمیل جدول زیر، ماکزیمم‌های مطلق و نسبی و همچنین مینیمم‌های مطلق و نسبی تابع زیر را در نقاط مشخص شده تعیین کنید.

نقطه	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
نوع اکسترمم	نه اکسترمم نسبی نه اکسترمم مطلق	min نسبی	....	....	هم min نسبی هم max نسبی	نه اکسترمم نسبی نه اکسترمم مطلق	....	....	Max مطلق



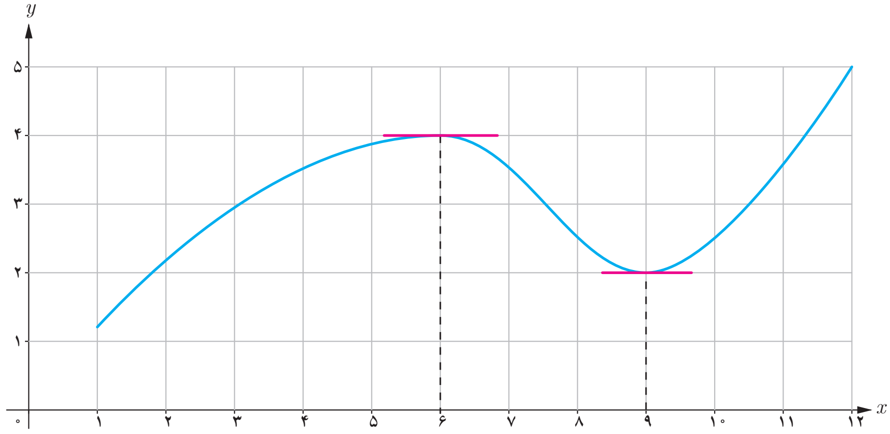
۲ــ مقادیر اکسترمم نسبی و مطلق تابع‌های زیر را به کمک رسم شکل در صورت وجود تعیین کنید.

الف) $f(x) = |x-۲|$ ب) $g(x) = -x^۲$ پ) $h(x) = \text{Cos}\,x$

ت) $t(x) = x^۳$ ث) $u(x) = \frac{۱}{x}$

نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع صفحه بعد را درنظر بگیرید. دیده می‌شود که خط مماس بر نمودار در این نقاط افقی، یعنی با شیب صفر است. از آنجا که مشتق تابع در یک نقطه، برابر شیب خط مماس بر منحنی تابع در آن نقطه است، لذا در این تابع داریم :

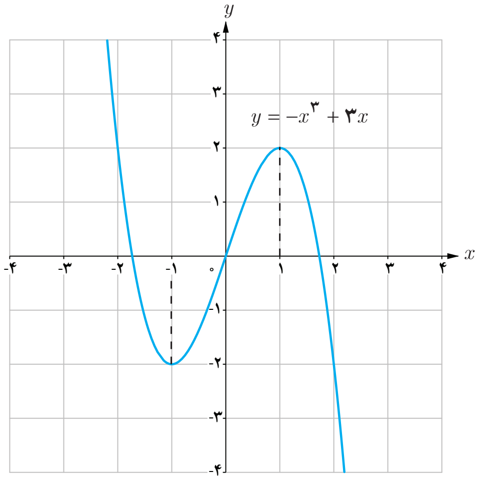
$f'(۶) = ۰ \quad , \quad f'(۹) = ۰$



این مطلب در مورد نقاط اکسترمم نسبی هر تابع مشتق‌پذیر، درست است. قضیه زیر را در این مورد بیان می‌کنیم.

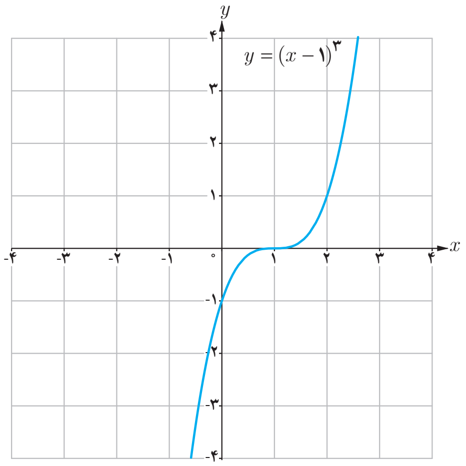
قضیه فرما : اگر تابع f در نقطهٔ به طول c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c)=0$.

مثال : در قسمت الف کار در کلاس شماره ۲ صفحه قبل دیدیم که تابع $f(x)=|x-2|$ در $x=2$ مینیمم نسبی دارد. آیا $f'(2)$ موجود است؟ چرا؟



مثال : نمودار تابع $f(x)=-x^3+3x$ را رسم کرده‌ایم. ملاحظه می‌شود که تابع در نقاط به طول ۱ و ۱− اکسترمم نسبی دارد. می‌دانیم این تابع در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. پس از یافتن ضابطهٔ $f'(x)$ ، ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=0$ را به‌دست آورید و درستی قضیه فرما را در مورد این تابع بررسی کنید.

از مثال قبل، این سؤال مطرح می‌شود که آیا صفرهای تابعِ مشتق، همواره طول نقاط اکسترمم نسبی تابع را به‌دست می‌دهند؟ با وجود آنکه جواب این سؤال در مورد بیشتر تابع‌های مورد بحث ما مثبت است، مثال زیر نشان می‌دهد که این مطلب همیشه هم درست نیست.



مثال : به نمودار تابع $f(x)=(x-1)^3$ دقت کنید. تابعِ مشتقِ این تابع به‌صورت $f'(x)=3(x-1)^2$ است. با وجود آنکه مقدار $f'(x)$ در $x=1$ برابر صفر است، امّا با توجه به نمودار، دیده می‌شود که نقطهٔ به طول ۱ برای این تابع نه ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی. دلیل این مطلب را در صفحات بعد به شکل دقیق‌تری بررسی خواهیم کرد.