

تمرین

۴۵- دامنه‌ی توابع زیر را به دست آورده و آن‌ها را با استفاده از بازه‌ها نمایش دهید.

الف) $f(x) = \log \sqrt[3]{(x+1)^2}$ ب) $g(x) = x - \log_5(9 - x^2)$

چهار عمل اصلی روی توابع

چهار عمل اصلی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را که بلدید؟! تا حالا این اعمال را برای اعداد به کار می‌بردیم و حالا می‌خواهیم در مورد توابع به کار ببریم. ما چهار عمل اصلی را روی مقادیر و ضابطه‌های دو تابع اثر می‌دهیم؛ مثلاً اگر $f(2) = 10$ و $g(2) = 5$ آن‌گاه:

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 10 + 5 = 15 \quad (f-g)(2) = f(2) - g(2) = 10 - 5 = 5$$

$$(f \cdot g)(2) = f(2) \cdot g(2) = 10 \times 5 = 50 \quad \left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{10}{5} = 2$$

یک مثال دیگر برایتان بزنم؛ اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{x}{x+1}$ آن‌گاه:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x} \times \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1}$$

در این مثال، ضابطه‌ی تابع $f \cdot g$ را ساختیم؛ اما دامنه‌ی این تابع چیست؟ خوب معلوم است؛ $f(x) \cdot g(x)$ زمانی تعریف شده که هم $f(x)$ و هم $g(x)$ تعریف شده باشد. $f(x)$ به ازای $x=0$ تعریف نشده و دامنه‌ی آن $\mathbb{R} - \{0\}$ است. $g(x)$ هم به ازای $x=-1$ تعریف نشده و دامنه‌ی آن $\mathbb{R} - \{-1\}$ است. پس $f(x) \cdot g(x)$ به ازای $x=0, -1$ تعریف نشده و دامنه‌ی آن $\mathbb{R} - \{0, -1\}$ است. مثل این است که از دامنه‌های دو تابع اشتراک گرفتیم.

روی مقادیر یا ضابطه‌ی دو تابع، می‌توان چهار عمل اصلی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را انجام داد و توابع $f+g, f-g, f \cdot g$

و $\frac{f}{g}$ را ساخت. دامنه‌ی تابع حاصل، اشتراک دامنه‌های دو تابع است و البته برای تقسیم دو تابع، شرط صفرنشدن مخرج را هم باید اضافه کرد:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) & D_{f+g} &= D_f \cap D_g \\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x) & D_{f-g} &= D_f \cap D_g \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) & D_{f \cdot g} &= D_f \cap D_g \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} & D_{\frac{f}{g}} &= \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\} \end{aligned}$$

برای دو تابع $f = \{(-1, 4), (0, 3), (1, -2), (2, 0)\}$ و $g = \{(-2, -3), (-1, 7), (1, 0), (2, 5)\}$ داریم:

$$\begin{array}{ccccc} -2 & \xrightarrow{f} & - & & -1 & \xrightarrow{f} & 4 \\ & \searrow g & -3 & & & \searrow g & 7 \\ & & & & 0 & \xrightarrow{f} & 3 \\ & & & & & \searrow g & - \\ & & & & 1 & \xrightarrow{f} & -2 \\ & & & & & \searrow g & 0 \\ & & & & 2 & \xrightarrow{f} & 0 \\ & & & & & \searrow g & 5 \end{array}$$

$x = -2$ و $x = 0$ را کنار می‌گذاریم (چون هر دو تابع f و g به ازای آن‌ها تعریف نشده، یعنی عضو $D_f \cap D_g$ نیست)؛ حالا:

$$f+g = \{(-1, 4+7), (1, -2+0), (2, 0+5)\} = \{(-1, 11), (1, -2), (2, 5)\}$$

$$f-g = \{(-1, 4-7), (1, -2-0), (2, 0-5)\} = \{(-1, -3), (1, -2), (2, -5)\}$$

$$f \cdot g = \{(-1, 4 \times 7), (1, -2 \times 0), (2, 0 \times 5)\} = \{(-1, 28), (1, 0), (2, 0)\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(-1, \frac{4}{7}), (1, \frac{-2}{0}), (2, \frac{0}{5})\} = \{(-1, \frac{4}{7}), (2, 0)\}$$

در $\frac{f}{g}$ ، $x=1$ از دامنه کنار می‌رود، چون $g(1)=0$. ببینید:

$$\frac{g}{f} = \{(-1, \frac{7}{4}), (1, \frac{0}{-2}), (2, \frac{5}{0})\} = \{(-1, \frac{7}{4}), (1, 0)\}$$

در $\frac{g}{f}$ ، $x=2$ از دامنه کنار می‌رود، چون $f(2)=0$. ببینید:

اگر $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & x \leq -2 \\ \sqrt{x+2} & -2 < x \end{cases}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{1-2x}$ باشد، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(f+g)(-1)$

ب) $(f-g)(-3)$

ج) $(f \cdot g)(7)$

د) $(\frac{f}{g})(0)$

الف) $(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = \sqrt{-1+2} + \frac{1-3(-1)}{1-2(-1)} = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$

$$(f-g)(-3) = f(-3) - g(-3) = (3(-3)^2 - 1) - \frac{1-3(-3)}{1-2(-3)} = 26 - \frac{10}{7} = \frac{172}{7} \quad (\text{ب})$$

$$(f \cdot g)(7) = f(7) \cdot g(7) = \sqrt{7+2} \times \frac{1-3 \times 7}{1-2 \times 7} = 3 \times \frac{20}{13} = \frac{60}{13} \quad (\text{ج})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{\sqrt{0+2}}{\frac{1-3 \times 0}{1-2 \times 0}} = \sqrt{2} \quad (\text{د})$$

تمرین

۴۶- اگر $f = \{(-2, 3), (-1, 2), (0, -4), (1, 0), (3, 5)\}$ و $g = \{(-3, 5), (-1, 1), (0, 6), (1, 3)\}$ باشد، توابع زیر را بیابید.

$$\begin{array}{llll} f+g \text{ (الف)} & 2f-g \text{ (ب)} & f-f \cdot g \text{ (ج)} & \frac{f}{g} + \frac{g}{f} \text{ (د)} \end{array}$$

۴۷- اگر $f = \{(-7, 0), (-2, 3), (-1, 3), (1, 6), (2, 4)\}$ و $g(x) = \sqrt{\frac{2-x-x^2}{x+3}}$ باشد، تابع $\frac{f}{g}$ چیست؟

کلید: اگر $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{-x}}{x^2-1}$ ، دامنه و ضابطه‌ی توابع $f \cdot g$ ، $f \cdot g$ ، $f \pm g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید.

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ (چون باید $x-1 \neq 0$) و $D_g = (-\infty, 0] - \{-1\}$ (چون باید $-x \leq 0$ ، یعنی $x \leq 0$ و همچنین $x^2-1 \neq 0$ ، یعنی $x \neq \pm 1$). پس:

$$D_f \cap D_g = (-\infty, 0] - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0] \Rightarrow D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0]$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \quad g(x) \text{ به ازای } x=0 \text{ صفر می‌شود و باید از } D_f \cap D_g \text{ حذف شود:}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = \{x \in D_f \cap D_g \mid f(x) \neq 0\} = (-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (-1, 0] \quad f(x) \text{ به ازای } x=-3 \text{ صفر می‌شود و باید از } D_f \cap D_g \text{ حذف شود:}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x+3}{x-1} + \frac{\sqrt{-x}}{x^2-1} = \frac{(x+3)(x+1) + \sqrt{-x}}{x^2-1} = \frac{x^2 + 4x + 3 + \sqrt{-x}}{x^2-1} \quad \text{حالا ضابطه‌ها را پیدا می‌کنیم:}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x+3}{x-1} - \frac{\sqrt{-x}}{x^2-1} = \frac{(x+3)(x+1) - \sqrt{-x}}{x^2-1} = \frac{x^2 + 4x + 3 - \sqrt{-x}}{x^2-1}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{x+3}{x-1} \times \frac{\sqrt{-x}}{x^2-1} = \frac{(x+3)\sqrt{-x}}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{(x+3)\sqrt{-x}}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+3}{x-1} \div \frac{\sqrt{-x}}{x^2-1} = \frac{x+3}{x-1} \times \frac{x^2-1}{\sqrt{-x}} = \frac{x+3}{x-1} \times \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{-x}} = \frac{(x+3)(x+1)}{\sqrt{-x}} = \frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{-x}}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{-x}}{x^2-1} \div \frac{x+3}{x-1} = \frac{\sqrt{-x}}{x^2-1} \times \frac{x-1}{x+3} = \frac{\sqrt{-x}}{(x+1)(x-1)} \times \frac{x-1}{x+3} = \frac{\sqrt{-x}}{(x+1)(x+3)} = \frac{\sqrt{-x}}{x^2 + 4x + 3}$$

تمرین

۴۸- اگر $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = \frac{x}{x+1}$ ، نمودار تابع $f \cdot g$ را رسم کنید.

۴۹- اگر $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3x^2}{x+4}}$ و $g(x) = \frac{x^2-16}{\sqrt{5-|x|}}$ باشد، دامنه‌ی توابع $\frac{f}{g}$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید.

۵۰- فرض کنید $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x}}$ و $g(x) = \sqrt{1+\sqrt{1-x}}$ ؛ در این صورت:

(الف) دامنه‌ی تابع $f-g$ چیست؟ (ب) مقادیر تابع $f \cdot g$ به ازای $x=2$ و $x=3-2\sqrt{2}$ چیست؟

۵۱- اگر $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ و $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$ ، دامنه و ضابطه‌ی توابع $f-g$ و $\frac{f}{g}$ چیست؟

موقع انجام هر عمل روی دو تابع، آدم وسوسه می‌شود اول ضابطه را پیدا کند؛ چون راحت‌تر است! اما این عادت خوبی نیست

و بهتر است از حالا خودتان را عادت دهید که اول دامنه را پیدا کنید، بعد ضابطه را. این‌طوری کم‌تر دچار اشتباه می‌شوید. مثلاً

اگر $f(x) = x$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ آن‌گاه $(f \cdot g)(x) = x \times \frac{1}{x} = 1$ و ممکن است بگویید دامنه‌ی تابع $f \cdot g$ مساوی $\mathbb{R}$ است (چون $(f \cdot g)(x) = 1$)؛

در صورتی که $g(x)$ در $x=0$ تعریف نشده و همین باعث می‌شود $f \cdot g$ هم در $x=0$ تعریف نشده باشد، یعنی دامنه‌ی آن $\mathbb{R} - \{0\}$ است.

اگر $f(x) = \sqrt{8-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-2}$ آن گاه توابع $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را تشکیل دهید.

$$0 \leq 8-x^2 \Rightarrow x^2 \leq 8 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2] \quad , \quad 0 \leq x-2 \Rightarrow 2 \leq x \Rightarrow D_g = [2, +\infty)$$

پس $D_f \cap D_g = \{2\}$ ؛ به ازای $x=2$ مقدار تابع $f-g$ را حساب می‌کنیم: $(f-g)(2) = f(2) - g(2) = \sqrt{8-2^2} + \sqrt{2-2} = 0$

پس $f-g = \{(2, 0)\}$. یعنی تفاضل دو تابع f و g ، تابعی تک‌عضوی شد. در مورد $\frac{f}{g}$ ، $g(2) = 0$ و در نتیجه $\frac{f(2)}{g(2)}$ قابل تعریف نیست؛ یعنی $\frac{f}{g} = \emptyset$.

تمرین

۵۲- اگر $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sin 2x$ ، تابع $\frac{f}{g}$ را تشکیل دهید.

۵۳- اگر $f(x) = \tan x$ و $g(x) = \cot x$ ، نمودار تابع $f \cdot g$ در بازه $(0, 2\pi)$ چگونه است؟

ترکیب توابع

چند صفحه قبل بود که این مثال را با هم دیدیم: اگر $f(x) = 2x+3$ آن گاه حاصل $f(5-x)$ چیست؟ برای جواب گفتیم باید به جای x های $f(x)$ ، قرار دهیم $5-x$:

$$f(5-x) = 2(5-x) + 3 = 10 - 2x + 3 = -2x + 13$$

خب می‌توانستیم مثال را این‌طوری مطرح کنیم: اگر $f(x) = 2x+3$ و $g(x) = 5-x$ ، آن گاه $f(g(x))$ چیست؟ باز هم برای جواب، باید به جای x های $f(x)$ ، قرار دهیم $g(x)$:

$$f(g(x)) = f(5-x) = 2(5-x) + 3 = 10 - 2x + 3 = -2x + 13$$

مثل این است که دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را با هم ترکیب کردیم و تابع مرکب $f(g(x))$ را ساختیم. خوب راستش را بخواهید، $f(g(x))$ را به صورت $(f \circ g)(x)$ هم نشان می‌دهیم.

تابع مرکب $f \circ g$ (اف اُ جی!) از ترکیب دو تابع f و g به دست می‌آید طوری که برای نوشتن ضابطه‌ی آن، باید به جای x های $f(x)$ قرار دهیم $g(x)$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

اگر $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = 2x+1$ باشد، ضابطه‌ی تابع $f \circ g$ چیست؟

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^2 - 2(2x+1) = (4x^2 + 4x + 1) - (4x + 2) = 4x^2 - 1$$

می‌بینم که با $f \circ g$ آشنا شدید! حالا آیا می‌توانید بگویید ضابطه‌ی $g \circ f$ چه‌طوری به دست می‌آید؟ آفرین:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

ضابطه‌ی $g \circ f$ ، از قراردادن $f(x)$ به جای x های $g(x)$ به دست می‌آید. یعنی:

در مثال قبل، ضابطه‌ی تابع $g \circ f$ را بیابید.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2x) = 2(x^2 - 2x) + 1 = 2x^2 - 4x + 1$$

اگر $f(x) = \frac{3x+2}{x^2+1}$ و $g(x) = x+4$ باشد، $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ را بیابید. آیا این دو تابع مرکب با هم مساوی‌اند؟

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+4) = \frac{3(x+4)+2}{(x+4)^2+1} = \frac{3x+14}{x^2+8x+17}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{3x+2}{x^2+1}\right) = \frac{3x+2}{x^2+1} + 4 = \frac{3x+2+4x^2+4}{x^2+1} = \frac{4x^2+3x+6}{x^2+1}$$

دو تابع بالا با هم مساوی نیستند. کلاً این را بدانید که:

دو تابع f و g را ممکن است بتوان به دو صورت $f \circ g$ و $g \circ f$ ترکیب کرد؛ توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ ربطی به هم ندارند (معمولاً با هم مساوی نیستند).

تمرین

۵۴- اگر $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ و $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$ باشد، $(f \circ g)(x)$ را بیابید.

۵۵- اگر $f(x) = \tan x$ و $g(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ باشد، ضابطه‌ی $g \circ f$ را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

۵۶- اگر $f(x) = 5x+3$ و $g(x) = 4-6x$ آن گاه $(f \circ g)(1+x) - (g \circ f)(1-x)$ را بیابید.

حالا بگویید ببینم اگر $f(x) = 3x^2 - 6$ و $g(x) = \frac{x}{x+1}$ آن وقت $(fog)(2)$ چند است؟ می‌خواهم بدون محاسبه‌ی ضابطه‌ی fog به این سؤال جواب دهید. خوب می‌نویسیم:

$$g(2) = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \Rightarrow (fog)(2) = f(g(2)) = f\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 6 = \frac{4}{3} - 6 = -\frac{14}{3}$$

در واقع مثل این است که اول 2 وارد $g(x)$ شد و $\frac{2}{3}$ بیرون آمد، بعد $\frac{2}{3}$ وارد $f(x)$ شد و $-\frac{14}{3}$ بیرون آمد. این اتفاقی است که در همه‌ی توابع مرکب می‌افتد.

در تابع مرکب fog، ابتدا x وارد g می‌شود و $g(x)$ بیرون می‌آید؛ بعد $g(x)$ وارد f می‌شود و $f(g(x))$ بیرون می‌آید:

$$x \rightarrow \boxed{g} \xrightarrow{g(x)} \boxed{f} \rightarrow f(g(x))$$

اگر $f(5) = 3$ و $g(4) = 5$ باشد، مقدار $(fog)(4)$ چیست؟ جواب:

$$\pi \rightarrow \boxed{\sin x} \rightarrow \boxed{\cos x} \rightarrow ?$$

خروجی ماشین روبه‌رو چیست و این ماشین کدام تابع مرکب را نشان می‌دهد؟

π وارد $\sin x$ می‌شود و $\sin \pi = 0$ بیرون می‌آید، بعد $x = 0$ وارد $\cos x$ می‌شود و $\cos 0 = 1$ بیرون می‌آید. پس خروجی، عدد 1 است. این ماشین تابع مرکب $y = \cos(\sin x)$ را نشان می‌دهد. در واقع، اگر فرض کنیم $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sin x$ ، همان $y = f(g(x))$ است. حواستان باشد که به اشتباه نگویید ضابطه‌ی تابع، $y = \sin(\cos x)$ است! چون در شکل، اول π وارد سینوس شد، در ضابطه هم اول x وارد سینوس می‌شود و در نتیجه سینوس داخل پرانتز قرار می‌گیرد.

تمرین

۵۷- اگر $f(x) = \cos x - \sin^2 x$ و $g(x) = \sqrt{3-4x}$ باشد، مقدار $(gof)\left(\frac{\pi}{3}\right)$ چیست؟

$$\text{ورودی} \rightarrow \boxed{\sqrt{x+3}} \rightarrow \boxed{\frac{x-3}{\sqrt{x}}} \rightarrow \text{خروجی}$$

۵۸- اگر خروجی ماشین مقابل مساوی ۲- باشد، مقدار ورودی چیست؟

۵۹- الف) دو تابع مثال بزنید که ترکیب آن‌ها، تابع $y = \frac{x^2-3}{x^2+1}$ شود.

ب) دو تابع مثال بزنید که ترکیب آن‌ها، تابع $y = \frac{1}{(x-3)^5}$ شود.

قرارمان این شد که علاوه بر ضابطه‌ی توابع، به دامنه‌ی آن‌ها هم توجه کنیم. حالا می‌توانید بگویید دامنه‌ی fog را چه‌طوری می‌شود به دست آورد؟ بگذارید کمکتان کنم! دو تابع مثل $f(x) = \frac{1}{x-3}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ در نظر بگیرید.

$g(9) = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow f(g(9)) = f(3) = \frac{1}{3-3} = 1$ چند می‌شود؟ آفرین:

$g(-1) = \sqrt{-1}$ تعریف نشده: $f(g(-1))$ تعریف نشده: چند می‌شود؟ احسن!

$g(4) = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow f(g(4)) = f(2) = \frac{1}{2-3} = -1$ تعریف نشده: $f(g(4))$ چند می‌شود؟ مرحبا:

$f(g(-1))$ تعریف نشده بود، چون $g(x)$ به ازای $x = -1$ وجود نداشت، یعنی $(-1) \notin D_g$.

$f(g(4))$ هم تعریف نشده بود، چون اگرچه $g(4)$ وجود داشت اما $f(x)$ به ازای $g(4)$ وجود نداشت، یعنی $g(4) \notin D_f$.

پس یک نتیجه‌ای می‌توان گرفت: اگر $x \notin D_g$ یا $g(x) \notin D_f$ ، آن‌گاه $f(g(x))$ تعریف نشده است. به عبارت دیگر، زمانی $f(g(x))$ تعریف شده که هم $x \in D_g$ و هم $g(x) \in D_f$.

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

برای تعیین دامنه‌ی تابع fog، می‌نویسیم:

(x باید مجوز ورود به g را داشته باشد، یعنی $x \in D_g$ و خروجی آن باید مجوز ورود به f را بگیرد، یعنی $g(x) \in D_f$)

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

به همین ترتیب، دامنه‌ی تابع gof، می‌شود:

(x باید مجوز ورود به f را داشته باشد، یعنی $x \in D_f$ و خروجی آن باید مجوز ورود به g را بگیرد، یعنی $f(x) \in D_g$)

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\}, \quad D_g = [0, +\infty)$$

اگر $f(x) = \frac{1}{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ آن گاه:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [0, +\infty) \mid g(x) \neq 2\} = \{0 \leq x \mid \sqrt{x} \neq 2\} = \{0 \leq x \mid x \neq 4\} = [0, +\infty) - \{4\}$$

اگر $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ و $g(x) = x^2 - 5$ آن گاه ضابطه و دامنه تابع $f \circ g$ چیست؟

برای رسیدن به ضابطه تابع $f \circ g$ به جای x های $f(x)$ ، قرار می دهیم $x^2 - 5$ (همان $g(x)$):

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 5) = \frac{(x^2 - 5) - 2}{(x^2 - 5) + 1} = \frac{x^2 - 7}{x^2 - 4}$$

برای تعیین دامنه $f \circ g$ ، می نویسیم: $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \xrightarrow{D_g = \mathbb{R}, D_f = \mathbb{R} - \{-1\}} D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq -1\}$

از طرفی $x^2 - 5 = -1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ ، پس: $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 2\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

از روی ضابطه $f \circ g$ هم معلوم بود که باید $x^2 - 4 \neq 0$ و در نتیجه $x \neq \pm 2$.

یک چیزی به شما می گویم، آویزه ی گوشتان کنید: دامنه ی توابع مرکب را همیشه از روی همین تعریف هایی که گفتیم تعیین کنید نه از روی ضابطه ی آن تابع مرکب. چون تعیین دامنه از روی ضابطه ی تابع مرکب، ممکن است شما را به اشتباه بیندازد. مثلاً اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$ ، آن گاه $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$ ؛ ممکن است بگویید دامنه ی تابع $(f \circ g)(x) = x$ مساوی $\mathbb{R}$ است، در حالی که:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [0, +\infty) \mid g(x) \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty)$$

اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x\sqrt{x^2 - 4}$ آن گاه ضابطه و دامنه ی تابع $g \circ f$ چیست؟

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{(\sqrt{x})^2 - 4} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x - 4} = \sqrt{x^2 - 4x}$$

ضابطه ی تابع $g \circ f$ ، این است:

$$0 \leq x^2 - 4x \Rightarrow x \leq 0 \text{ یا } 4 \leq x \Rightarrow D_{g \circ f} = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$$

تعیین اشتباه (!) دامنه از روی ضابطه:

اشتباه ما این بود که از نسخه ی ساده شده ی تابع استفاده کردیم! باید از $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x - 4}$ استفاده می کردیم: $0 \leq x$ ، $0 \leq x - 4 \Rightarrow 4 \leq x$ ، اشتراک $0 \leq x$ و $4 \leq x$ می شود $4 \leq x$ ، پس: $D_{g \circ f} = [4, +\infty)$

تعیین دامنه ی تابع مرکب با استفاده از تعریف، ریسک های بالا را ندارد! ببینید:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \xrightarrow{D_f = [0, +\infty), D_g = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)} D_{g \circ f} = \{x \in [0, +\infty) \mid f(x) \leq -2 \text{ یا } 2 \leq f(x)\} = [4, +\infty)$$

در مورد دامنه ی g ، گفتیم $0 \leq x^2 - 4 \Rightarrow 4 \leq x^2 \Rightarrow x \leq -2$ یا $2 \leq x$ ، هم چنین:

$$f(x) \leq -2 \text{ یا } 2 \leq f(x) \xrightarrow{f(x) = \sqrt{x} \geq 0} 2 \leq f(x) \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x} \Rightarrow 4 \leq x$$

تمرین

۶۰- برای توابع f و g داده شده در زیر، دامنه و ضابطه ی تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف بیابید.

الف) $f(x) = \sqrt{3x+1}$ و $g(x) = 3x^2 - 2x$ ب) $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x) = \tan x$

۶۱- برای توابع $f(x) = 1 - 3x + x^2$ و $g(x) = |x+2|$ ، دامنه و ضابطه ی تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف بیابید.

زمانی می توان دو تابع را ترکیب کرد که دامنه ی تابع مرکب حاصل، تهی نشود. بنابراین ممکن است دو تابع f و g را نتوان به هر دو صورت $f \circ g$ و $g \circ f$ ترکیب کرد.

مثلاً اگر $f(x) = \sqrt{-x}$ و $g(x) = x^2 + 1$ ، با توجه به این که $D_f = (-\infty, 0]$ و $D_g = \mathbb{R}$ ، داریم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 \leq 0\} \xrightarrow{1 \leq x^2 + 1} D_{f \circ g} = \emptyset \Rightarrow \text{ترکیب } f \text{ و } g \text{ به صورت } f \circ g \text{ ممکن نیست}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in (-\infty, 0] \mid \sqrt{-x} \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 0], \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{-x}) = (\sqrt{-x})^2 + 1 = -x + 1$$

تمرین

۶۲- اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ و $g(x) = -1 - \sin \frac{1}{x^2}$ آن گاه:

الف) ضابطه و دامنه‌ی تابع $g \circ f$ چیست؟
ب) آیا این دو تابع را می‌توان به صورت $f \circ g$ ترکیب کرد؟



یک تابع می‌تواند با خودش ترکیب شود؟ بله که می‌تواند. کافی است در تعریف $f \circ f$ و $D_{f \circ f}$ ، به جای g بگذاریم f ؛

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) \quad , \quad D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$$

نتیجه این می‌شود:

🔑 اگر $f(x) = \sin \pi x$ باشد، مقدار $(f \circ f)(\frac{1}{6})$ چیست؟

$$(f \circ f)(\frac{\pi}{6}) = f(f(\frac{\pi}{6})) = f(\frac{1}{2}) = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{پس:} \quad f(\frac{1}{6}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

🔑 اگر $f(x) = \frac{x}{x+3}$ باشد، تابع $f \circ f$ را تشکیل دهید. (دامنه و ضابطه‌ی تابع را معلوم کنید)

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} \xrightarrow{D_f = \mathbb{R} - \{-3\}} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3, \frac{x}{x+3} \neq -3\} = \mathbb{R} - \{-3, -\frac{9}{4}\}$$

(اگر $\frac{x}{x+3} = -3$ آن گاه $x = -3x - 9$ و در نتیجه $x = -\frac{9}{4}$ ضابطه‌ی $f \circ f$ هم این است:

$$f(x) = \frac{x}{x+3} \Rightarrow (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x}{x+3}}{\frac{x}{x+3} + 3} = \frac{\frac{x}{x+3}}{\frac{x + 3x^2 + 9}{x+3}} = \frac{x}{3x^2 + x + 9}$$

تمرین

۶۳- اگر $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}$ باشد، مقدار $(f \circ f)(9)$ چیست؟

۶۴- برای تابع $\begin{cases} f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x(2x-1) \end{cases}$ دامنه و ضابطه‌ی تابع $f \circ f$ را بیابید.

۶۵- اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد، نمودار تابع $f \circ f$ را رسم کنید.



بعضی وقت‌ها به جای آن که دو تابع را داشته باشیم و آن‌ها را ترکیب کنیم، تابع مرکب به همراه یکی از توابع را داریم و

تابع دیگر را می‌خواهیم. مثلاً ضابطه‌ی f و $f \circ g$ را داریم و ضابطه‌ی g را می‌خواهیم.^۱

در این حالت، به جای x های $f(x)$ قرار می‌دهیم $g(x)$ ، یعنی $f(g(x))$ را به دست می‌آوریم. بعد، $f(g(x))$ ی را که خودمان برحسب $g(x)$ به دست آورده‌ایم، با $f(g(x))$ ی که سؤال داده مساوی قرار می‌دهیم و ضابطه‌ی $g(x)$ را حساب می‌کنیم.

🔑 اگر $f(x) = 2x+1$ و $(f \circ g)(x) = x^2 - 1$ باشد، $g(x)$ چیست؟

$$f(x) = 2x+1 \Rightarrow f(g(x)) = 2g(x)+1$$

$f(g(x))$ را خودمان به دست می‌آوریم:

$$2g(x)+1 = x^2 - 1 \Rightarrow 2g(x) = x^2 - 2 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$$

اما سؤال گفته $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2 - 1$ ، پس:

تمرین

۶۶- اگر $f(x) = 2x - a$ و $g(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، a ، b و c را طوری تعیین کنید که داشته باشیم $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 3x - 5$.

۶۷- اگر $g(x) = \frac{x+1}{2x-3}$ و $(g \circ f)(x) = x^2$ باشد، مقدار $f(2)$ چیست؟



در مثال بعدی، توابعی را ترکیب می‌کنیم که به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بیان شده‌اند.

۱- این حالت جزء تمرین‌های کتاب درسی و نمونه سؤالات امتحان نهایی است؛ حالتی که g و $f \circ g$ را داریم و f را می‌خواهیم، در قسمت بعدی این فصل بررسی می‌شود.

اگر $f = \{(3, 1), (-1, 3), (-2, -6)\}$ و $g = \{(3, 1), (-1, -2)\}$ باشد، توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را تشکیل دهید.

$$3 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 2 \quad -1 \xrightarrow{g} -2 \xrightarrow{f} -6$$

برای تشکیل $f \circ g$ ، از مؤلفه‌های اول g استفاده می‌کنیم:

ترجمه: g عدد ۳ را به ۱ می‌برد ($(3, 1) \in g$) و f عدد ۱ را به ۲ می‌برد ($(1, 2) \in f$)، پس $f \circ g$ عدد ۳ را به ۲ می‌برد ($(3, 2) \in f \circ g$). مورد دوم هم به همین صورت ترجمه می‌شود! خلاصه این‌که:

$$f \circ g = \{(3, 2), (-1, -6)\}$$

$$-2 \xrightarrow{f} -6 \xrightarrow{g} - \quad -1 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} 1 \quad 1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} -$$

برای تشکیل $g \circ f$ ، از مؤلفه‌های اول f استفاده می‌کنیم:

در مورد اولی و سومی، چون -6 و 2 (خروجی‌های f) در دامنه‌ی g نبودند، در نهایت چیزی خارج نشد. پس:

$$g \circ f = \{(-1, 1)\}$$

تمرین

۶۸- اگر $f = \{(-4, 0), (-2, 1), (0, 3), (1, 5), (3, 1)\}$ و $g = \{(2, -4), (-1, 1), (0, 1), (3, -2)\}$ باشد، توابع زیر را بیابید.

$g \circ g$ (د)

$f \circ f$ (ج)

$g \circ f$ (ب)

$f \circ g$ (الف)

در ترکیب توابع چندضابطه‌ای باید مدام چک کنید که حدود x چیست و از کدام ضابطه باید استفاده کنید.

اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & 0 \leq x \\ \sqrt{1-x} & x < 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $(f \circ f)(-8)$ چیست؟

$$(f \circ f)(-8) = f(f(-8)) = f(3) \xrightarrow{0 \leq 3} = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$-8 < 0, \text{ پس } f(-8) = \sqrt{1 - (-8)} = \sqrt{9} = 3 \text{ حالا:}$$

تمرین

۶۹- اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-x^2} & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x+2}{x} & x < 0 \text{ یا } 1 < x \end{cases}$ باشد، مقدار تابع $f \circ f$ در هر یک از نقاط زیر چیست؟

$$x = -4 \text{ (ج)}$$

$$x = \frac{5}{3} \text{ (ب)}$$

$$x = \frac{4}{5} \text{ (الف)}$$

برای توابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x+3}{x+2}$ ، جدول زیر را ببینید:

عمل	تابع	ضابطه	دامنه
+	$f + g$	$y = \frac{1}{x-1} + \frac{x+3}{x+2} = \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + x - 2}$	$D_f \cap D_g = (\mathbb{R} - \{1\}) \cap (\mathbb{R} - \{-2\}) = \mathbb{R} - \{1, -2\}$
-	$f - g$	$y = \frac{1}{x-1} - \frac{x+3}{x+2} = \frac{-x^2 - x + 5}{x^2 + x - 2}$	$D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{1, -2\}$
$\times$	$f \cdot g$	$y = \frac{1}{x-1} \times \frac{x+3}{x+2} = \frac{x+3}{x^2 + x - 2}$	$D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{1, -2\}$
$\div$	$\frac{f}{g}$	$y = \frac{1}{x-1} \div \frac{x+3}{x+2} = \frac{1}{x-1} \times \frac{x+2}{x+3} = \frac{x+2}{x^2 + 2x - 3}$	$\{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1, -2, -3\}$
$\div$	$\frac{g}{f}$	$y = \frac{x+3}{x+2} \div \frac{1}{x-1} = \frac{x+3}{x+2} \times (x-1) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x+2}$	$\{x \in D_f \cap D_g \mid f(x) \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1, -2\}$
o	$f \circ g$	$y = f(g(x)) = \frac{1}{\frac{x+3}{x+2} - 1} = \frac{1}{\frac{x+3-x-2}{x+2}} = \frac{1}{\frac{x-1}{x+2}} = \frac{x+2}{x-1}$	$\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq -2 \mid g(x) \neq 1\} = \mathbb{R} - \{-2\}$
o	$g \circ f$	$y = g(f(x)) = \frac{\frac{1}{x-1} + 3}{\frac{1}{x-1} + 2} = \frac{\frac{1+3x-3}{x-1}}{\frac{1+2x-2}{x-1}} = \frac{3x-2}{2x-1}$	$\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \neq 1 \mid f(x) \neq -2\} = \mathbb{R} - \{1, \frac{1}{2}\}$

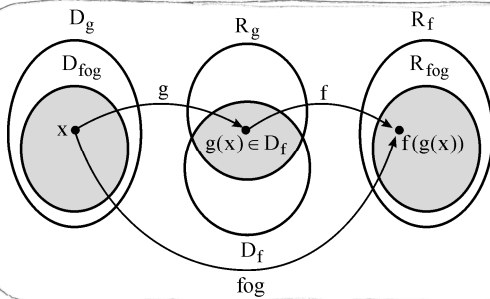
هدف از مثال بالا این بود که یک بار عملیات اصلی روی توابع و ترکیب توابع را برایتان جمع‌بندی کنم!

تمرین

۷۰- اگر $f(x) = 3x + 4$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ باشد، مقدار توابع زیر را در $x = 2$ حساب کنید.

ب) $(f + 2g) \circ f$

الف) $\frac{f}{g} \circ f$



این مبحث را با نمودار روبه‌رو از کتاب درسی تمام می‌کنم.

نمودار روبه‌رو صرفاً جهت حُسن ختام است و ارزش دیگری ندارد!

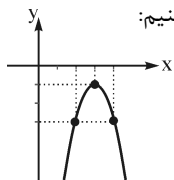
موفق و پیروز باشید و سربلند.

برد تابع $f(x) = x^2 + 4x + 6$ چیست؟

برد تابع f مساوی $[2, +\infty)$ است. ببینید:

روال کار این طوری بود که گفتیم نصف ضریب x مساوی ۲ است که مربع آن می شود ۴. پس $x^2 + 4x + 4$ مربع کامل است و آن را جدا کردیم. حالا $(x+2)^2$ همیشه نامنفی است، یعنی حداقل صفر است؛ پس $(x+2)^2 + 2$ حداقل ۲ است: $2 \leq f(x) \Rightarrow 2 \leq (x+2)^2 + 2 \Rightarrow 0 \leq (x+2)^2$. نمودار تابع $f(x) = -2x^2 + 12x - 19$ را رسم کنید و پایین ترین یا بالاترین نقطه نمودار را نیز مشخص نمایید.

دلتای $-2x^2 + 12x - 19$ منفی است، پس نمودار محور x ها را قطع نمی کند و بر آن مماس نیست. در نقطه $(0, -19)$ محور y ها را قطع می کند. چون ضریب x^2 منفی است، سهمی رو به پایین است و تابع بیشترین مقدار دارد. بالاترین نقطه نمودار را پیدا می کنیم:



$$f(x) = -2x^2 + 12x - 19 = -2(x^2 - 6x) - 19$$

ضریب x مساوی -6 است، نصف آن می شود -3 که وقتی به توان ۲ می رسد، می شود ۹. پس می نویسیم:

$$f(x) = -2(x^2 - 6x + 9) - 1 = -2(x-3)^2 - 1$$

اگر $x = 3$ آن گاه $-2(x-3)^2$ مساوی صفر و در نتیجه مقدار تابع -1 می شود. در سایر نقاط، $-2(x-3)^2$ منفی و در نتیجه مقدار تابع از -1 کمتر است، پس $(3, -1)$ بالاترین نقطه نمودار است. این نقطه را روی نمودار مشخص می کنیم. حالا محض احتیاط، دو نقطه دیگر از نمودار را هم پیدا می کنیم؛ $f(2) = f(4) = -3$ ، پس نقاط $(2, -3)$ و $(4, -3)$ هم روی نمودارند.

(قارچ از کشور ۱۹)

۱۰۶ برد تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ کدام بازه ی زیر است؟

(۴) $(-\infty, 0)$

(۳) $[0, +\infty)$

(۲) $(0, +\infty)$

(۱) $\mathbb{R}$

۱۰۷ کم ترین مقدار تابع $f(x) = \begin{cases} (x+5)^2 - 4 & x > 1 \\ |x+1| - 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ (x+3)^2 - 3 & x < -1 \end{cases}$ برابر است با:

(۴) -4

(۳) 5

(۲) -2

(۱) -3

برویم سراغ چهار عمل اصلی روی توابع

۱۰۸ اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}$ و $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}}$ باشد، دامنه ی تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟

(۴) $(-3, +\infty) - \{0\}$

(۳) $(-3, +\infty)$

(۲) $\mathbb{R} - \{1\}$

(۱) $(-3, +\infty) - \{1\}$

برای انجام چهار عمل اصلی روی توابع چندضابطه ای و پیدا کردن ضابطه ی حاصل، ابتدا باید با توجه به مرز ضابطه ها، فواصل یا مجموعه های مختلفی از x را در نظر بگیرید که هر دو تابع در آن دارای یک ضابطه اند؛ سپس در هر یک از آن محدوده ها، عمل مورد نظر را انجام دهید.

اگر $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & 2 < x \\ 1-|x| & x \leq 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 5x & x \leq 1 \\ 6 & 1 < x \end{cases}$ باشد، ضابطه ی $f-g$ را بیابید.

مرز ضابطه ها در تابع f ، نقطه $x=2$ و در تابع g ، نقطه $x=1$ است؛ پس سه حالت را جدا بررسی می کنیم: قبل از $x=1$ ، بین $x=1$ و $x=2$ ، بعد از $x=2$. در هر حالت کمی تأمل می کنیم که از کدام ضابطه ها باید استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} x \leq 1 &\Rightarrow f(x) - g(x) = (1 - |x|) - 5x = -5x - |x| + 1 \\ 1 < x \leq 2 &\Rightarrow f(x) - g(x) = (1 - |x|) - 6 = -|x| - 5 \\ 2 < x &\Rightarrow f(x) - g(x) = (3x + 2) - 6 = 3x - 4 \end{aligned} \Rightarrow (f-g)(x) = \begin{cases} -5x - |x| + 1 & x \leq 1 \\ -|x| - 5 & 1 < x \leq 2 \\ 3x - 4 & 2 < x \end{cases}$$

فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < -2 \\ 1 - x & -2 \leq x \end{cases}$ و $g(x) = 2x + 1$ ؛ در این صورت:

(ب) ضابطه ی تابع $f \cdot g$ را بیابید.

(الف) مقدار $(f-g^2)(-3)$ را بیابید.

(الف) اگر $x < -2$ آن گاه $f(x) = x^2 + 1$ ؛ پس $f(-3) = (-3)^2 + 1 = 10$. هم چنین $g(x) = 2x + 1$ ؛ پس $g(-3) = 2(-3) + 1 = -5$. حالا:

$$(f-g^2)(-3) = f(-3) - g^2(-3) = 10 - (-5)^2 = -15$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} (x^2+1)(2x+1) & x < -2 \\ 2x^3 + x^2 + 2x + 1 & x < -2 \\ (1-x)(2x+1) & -2 \leq x \\ -2x^2 + x + 1 & -2 \leq x \end{cases} \quad (ب)$$

در تمرین بالا، به توان توابع برخوردید؛ در f^n ، ضابطه به توان n می‌رسد. یعنی $y = f(x)$ به $y = (f(x))^n$ تبدیل می‌شود. $(f(x))^n$ را به صورت $f^n(x)$ نیز می‌توان نمایش داد. مثلاً اگر $f(x) = x+1$ آن‌گاه $f^2(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ یا اگر $g(x) = \sin x$ آن‌گاه ضابطه‌ی g^2 به صورت $y = \sin^2 x$ است.

۱۰۹- اگر $f(x) = \begin{cases} x & x \geq -2 \\ x-2 & x < -2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ x-1 & x \leq 0 \end{cases}$ باشد، حاصل $(f+2g)(x)$ به ازای $x = f(0)$ چه قدر است؟

(۱) ۲ (۲) -۴ (۳) -۶ (۴) ۳

تست‌هایی که در آن‌ها دو تابع را می‌دهند و ترکیب آن‌ها را می‌خواهند، آسان است. ببینید:

۱۱۰- اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1,2), (5,4), (6,5), (2,3)\}$ باشد، $g(f(a)) = 5$ عدد a کدام است؟ (سراسری ۹۱)

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۱۱- اگر $A = \{1,2,3,4,5\}$ و $f = \{(x,2x-1), x \in A\}$ باشد، تابع $f(f(x))$ چند عضو دوتایی دارد؟ (سراسری ۸۳)

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۱۲- اگر $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$ باشد، مقدار $(g \circ f)\left(\frac{\pi}{4}\right)$ کدام است؟ (سراسری ۸۱)

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{2}$

۱۱۳- اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x) = \tan x$ باشد، ضابطه‌ی تابع $(f \circ g)(x)$ در بازه‌ی $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ برابر کدام است؟ (سراسری ۸۰)

(۱) $\sin x$ (۲) $\cos x$ (۳) $-\sin x$ (۴) $-\cos x$

۱۱۴- اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ باشد، حاصل $g(f(1-\sqrt{2})) - g(f(1+\sqrt{2}))$ کدام است؟ (سراسری ۸۹)

(۱) $4(1-\sqrt{2})$ (۲) $4(\sqrt{2}-1)$ (۳) ۴ (۴) $4\sqrt{2}$

۱۱۵- اگر $f(x) = |x| - x$ باشد، ضابطه‌ی تابع $(f \circ f)(x)$ برابر کدام است؟ (سراسری ۸۳)

(۱) x (۲) $|x|$ (۳) $x + |x|$ (۴) صفر

۱۱۶- اگر $f(x) = \sqrt{x+2|x|}$ باشد، مقدار $f(f(-144))$ کدام است؟ (سراسری ۸۸)

(۱) تعریف نشده (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲

۱۱۷- اگر $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$ باشد، مقدار $f(f(-1))$ کدام است؟ (فارج از کشور ۸۸)

(۱) تعریف نشده (۲) صفر (۳) ۱ (۴) $\sqrt{2}$

۱۱۸- اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = -\frac{1}{4}x + 2$ ، مجموعه‌ی طول نقاطی از منحنی تابع $g \circ f$ که در بالای محور x ها قرار می‌گیرد، برابر کدام بازه است؟ (سراسری ۹۱)

(۱) $(-4, 1)$ (۲) $(-3, 2)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(-1, 4)$

۱۱۹- اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد، ضابطه‌ی تابع $f(x^2) - 2f(x) + 1$ کدام است؟ (فارج از کشور ۸۹)

(۱) $\frac{1}{1-x^2}$ (۲) $\frac{2x}{x^2-1}$ (۳) $\frac{2x+1}{1-x^2}$ (۴) $\frac{2x-1}{x^2-1}$

۱۲۰- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2(2-x)^2$ ، حاصل $f(1+x) - f(1-x)$ کدام است؟ (سراسری ۸۵)

(۱) صفر (۲) $4x$ (۳) $2x^2$ (۴) $4x^2$

در ترکیب توابع چندضابطه‌ای، مدام چک کنید که از کدام ضابطه باید استفاده کنید.

۱۲۱- در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & x > 3 \\ 2x+3 & x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۲۲- اگر $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$ باشند، حاصل $g(f(\tan 20^\circ + \cot 20^\circ))$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) -۱

۱۲۳- اگر $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ -1 & x \leq 1 \end{cases}$ باشد، حاصل $f(1 + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}) + f(1 - \cos^2 x)$ برابر است با:

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) صفر

دامنه‌ی تابع مرکب را با استفاده از تعریف به دست آورید تا کم‌تر دچار اشتباه شوید.

(فارج از کشور ۸۷)

۱۲۴- اگر $f(x) = \sqrt{x+|x|}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x}$ باشد، دامنه‌ی تابع $g \circ f$ کدام است؟

- (۱) $(0, 8) \cup (8, +\infty)$ (۲) $\mathbb{R} - \{0, 8\}$ (۳) $\mathbb{R} - \{0\}$ (۴) $(0, +\infty)$

(سراسری ۸۷)

۱۲۵- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ و $g(x) = \tan x$; $|x| < \frac{\pi}{4}$ باشد، دامنه‌ی تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ (۲) $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ (۳) $(-\frac{\pi}{4}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{4}]$ (۴) $[-1, 0) \cup (0, 1]$

یک تابع را می‌توان چندین بار با خودش ترکیب کرد.

اگر $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ باشد، دامنه و ضابطه‌ی تابع $f \circ f \circ f$ چیست؟

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(f(x)) = f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{x-1}{x+1} + 1} = \frac{\frac{x-1-x-1}{x+1}}{\frac{x-1+x+1}{x+1}} = \frac{\frac{-2}{x+1}}{\frac{2x}{x+1}} = \frac{-2}{2x} = -\frac{1}{x}$$

$$(f \circ f \circ f)(x) = f\left(f\left(f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)\right) = f\left(f\left(-\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{-\frac{1}{x} - 1}{-\frac{1}{x} + 1} = \frac{\frac{-1-x}{x}}{\frac{-1+x}{x}} = \frac{-1-x}{-1+x} = \frac{1+x}{1-x}$$

بنابراین:

اگر از روی ضابطه تعیین علامت کنید، به احتمال زیاد اشتباه خواهید کرد. تعیین دامنه با تعریف، ایمن‌تر است:

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} \xrightarrow{D_f = \mathbb{R} - \{-1\}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1, f(x) \neq -1\}$$

$$f(x) = -1 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = -1 \Rightarrow x-1 = -x-1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$D_{f \circ f \circ f} = D_{(f \circ f) \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_{f \circ f}\} = \{x \in \mathbb{R} - \{-1\} \mid f(x) \neq -1, 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$$

$$f(x) = -1 \Rightarrow x = 0, \quad f(x) = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

دقت کنید که:

ممکن است شما به جای آن که $f \circ f \circ f$ را به صورت $(f \circ f) \circ f$ نوشته باشید، آن را به صورت $f \circ (f \circ f)$ در نظر گرفته باشید؛ این اشکالی ندارد:

$$D_{f \circ f \circ f} = D_{f \circ (f \circ f)} = \{x \in D_{f \circ f} \mid (f \circ f)(x) \in D_f\} = \{x \mid x \neq 0, -1, (f \circ f)(x) \neq -1\} = \{x \mid x \neq 0, -1, -\frac{1}{x} \neq -1\} = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$$

$$(از \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x = -1)$$

(مشابه فارج از کشور ۸۸)

۱۲۶- اگر $f(x) = 2x+1$ باشد، حاصل $f(f(f(f(x))))$ کدام است؟

- (۱) $8x+7$ (۲) $16x+15$ (۳) $4x+1$ (۴) $16x+1$

۱۲۷- اگر $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x > 0 \\ \sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases}$ باشد، حاصل $f \circ f \circ f(-1)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $-\frac{1}{9}$

گفتیم وقتی ضابطه‌ی $f(g(x))$ و $f(x)$ را داریم (تابع مرکب و تابع بیرونی) و $g(x)$ (تابع درونی) را می‌خواهیم، به جای x های $f(x)$ قرار می‌دهیم $g(x)$ ، یعنی خودمان $f(g(x))$ را برحسب $g(x)$ به دست می‌آوریم. سپس حاصل را با $f(g(x))$ که سؤال داده مساوی قرار می‌دهیم.

(سراسری ۸۴)

۱۲۸- اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $fo g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ باشد، مقدار $g(1)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

(قارج از کشور ۸۴)

۱۲۹- اگر $f(x) = 2x^2 + 4$ و $f(g(x)) = 4x^2 + 6x$ باشد، مقدار $g(-2)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲



وقتی ضابطه‌ی $f(g(x))$ و $g(x)$ (تابع مرکب و تابع درونی) را داریم و $f(x)$ (تابع بیرونی) را می‌خواهیم، فرض می‌کنیم $t = g(x)$ ؛ سپس از این رابطه، x را برحسب t می‌نویسیم. در نهایت، در ضابطه‌ی $f(g(x))$ ، به جای $g(x)$ قرار می‌دهیم t و به جای x ها، معادلاتشان را برحسب t می‌نویسیم. با این کار، $f(t)$ به دست می‌آید و حالا کافی است به جای t بنویسیم x تا $f(x)$ داشته باشیم.

اگر $(fo g)(x) = x^2 - 2x + 4$ و $g(x) = x + 1$ آن‌گاه $f(x)$ را به دست آورید.

$$g(x) = t \Rightarrow x + 1 = t \Rightarrow x = t - 1$$

تغییر متغیر:

$$f(g(x)) = x^2 - 2x + 4 \Rightarrow f(t) = (t-1)^2 - 2(t-1) + 4 = t^2 - 2t + 1 - 2t + 2 + 4 = t^2 - 4t + 7$$

جاگذاری:

$$\text{بنابراین } f(x) = x^2 - 4x + 7$$

البته می‌توانیم تغییر متغیر را زمانی انجام دهیم که در $f(g(x))$ ، $g(x)$ را ظاهر کردیم:

$$f(g(x)) = x^2 - 2x + 4 = (x^2 - 2x + 1) + 3 = (x-1)^2 + 3 = ((x+1)-2)^2 + 3 \xrightarrow{g(x)=x+1} f(x+1) = ((x+1)-2)^2 + 3$$

$$f(t) = (t-2)^2 + 3 = t^2 - 4t + 4 + 3 = t^2 - 4t + 7 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 7$$

صورت مثال قبل را این‌گونه هم می‌شد مطرح کرد: اگر $f(x+1) = x^2 - 2x + 4$ آن‌گاه $f(x)$ را به دست آورید.



در بعضی تست‌ها به جای آن‌که ضابطه‌ی تابع بیرونی را بخواهند، مقدار آن را در یک نقطه می‌خواهند. در این صورت، به جای t در روش تغییر متغیر، همان عدد خاص را قرار دهید.

اگر $f(x+1) = x^2 - 2x + 4$ آن‌گاه $f(0)$ را به دست آورید.

$$f(x+1) = x^2 - 2x + 4 \xrightarrow{x=-1} f(-1+1) = (-1)^2 - 2(-1) + 4 \Rightarrow f(0) = 1 + 2 + 4 = 7 \quad \text{حالا: } x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

(سراسری ۹۰)

۱۳۰- اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ باشد، آن‌گاه $f(1-x)$ کدام است؟

- (۱) $x^2 + 1$ (۲) $x^2 + 3$ (۳) $x^2 + 4x + 5$ (۴) $x^2 - 4x + 5$

۱۳۱- اگر $f(\sqrt{x}) = x + \sqrt{x}$ باشد، حاصل $f(2) + f(1)$ کدام است؟

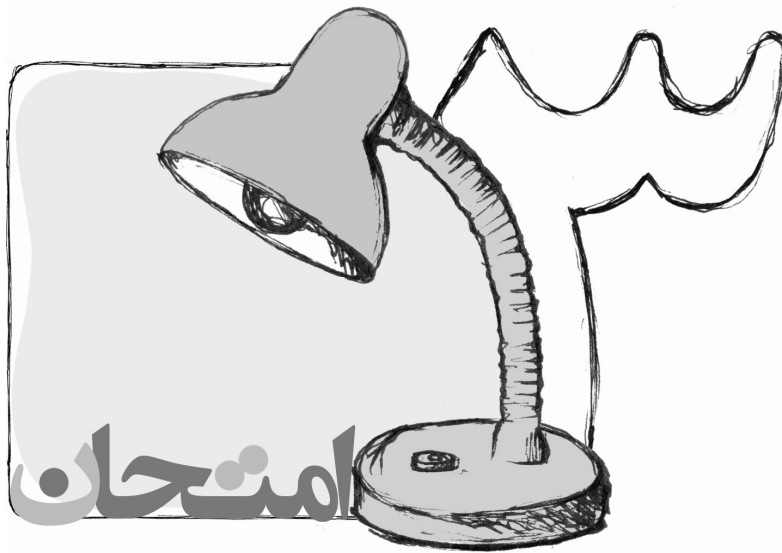
- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۳۲- اگر $f(\sqrt{x} + 1) = x + 2\sqrt{x} + 2$ باشد، آن‌گاه $f(\sqrt{2})$ چه قدر است؟

- (۱) ۳ (۲) $1 + \sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2} + 2$ (۴) ۵

۱۳۳- اگر $f(x^2 + x) = x^4 + 2x^3 + x^2$ باشد، آن‌گاه $f(\sqrt{3})$ چه قدر است؟

- (۱) ۷ (۲) ۳ (۳) $(3 + \sqrt{3})^2$ (۴) $\sqrt{3}$



شهرپور ۹۱

۱۳۴- الف) دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ برابر است با

ب) معادله‌ی $\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x^2-1} = \frac{x-2}{x+1}$ را حل کنید.

۱۳۵- سهمی به معادله‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ مفروض است؛ مقادیر a ، b و c را طوری بیابید که این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع کند و از نقطه‌ی $M(1, 4)$ نیز بگذرد.

۱۳۶- تابع $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x \geq 0 \\ x-3 & x < 0 \end{cases}$ مفروض است. $f(f(2))$ را محاسبه کنید.

۱۳۷- توابع $f(x) = x-1$ و $g(x) = \sqrt{x+2}$ داده شده‌اند.

الف) دامنه‌ی توابع $f(x)$ و $g(x)$ را به دست آورید.

ب) دامنه‌ی تابع $f \times g$ را به دست آورید.

ج) ضابطه‌ی $g \circ f$ را بنویسید.

۱۳۸- مقدار $\cos 75^\circ$ را محاسبه کنید.

خرداد ۹۱

۱۳۹- نامعادله‌ی $x-2 \geq \frac{2x-1}{x+2}$ را حل کنید و سپس مجموعه جواب آن را به صورت بازه بنویسید.

۱۴۰- درستی رابطه‌ی مقابل را نشان دهید.
 $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$

۱۴۱- اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، a ، b و c را طوری بیابید که این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۴ و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع کند و از نقطه‌ی $(1, 2)$ نیز بگذرد.

۱۴۲- نمودار $f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & x \geq 0 \\ 1-\frac{x}{2} & x < 0 \end{cases}$ را رسم کرده، سپس $f(f(-4))$ را به دست آورید.

۱۴۳- اگر $f(x) = x+3$ و $g(x) = \sqrt{1-x}$ دو تابع باشند:

الف) دامنه‌ی f و g را به دست آورید.

ب) دامنه‌ی تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف محاسبه کنید.

ج) ضابطه‌ی $f \circ g$ را بنویسید.

دی ۹۰

۱۴۴- اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 4\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ باشند، $A \cup B$ و $A \cap B$ را به صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.

۱۴۵- نامعادله‌ی $\frac{3}{x-4} + \frac{5}{x+4} > \frac{8}{x^2-16}$ را حل کنید.

۱۴۶- دامنه‌ی توابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = \sin \frac{1}{x+2} \quad (\text{الف}) \quad g(x) = \frac{-5}{\sqrt[3]{x+1}} \quad (\text{ب})$$

۱۴۷- اگر توابع $f(x) = \sqrt{x+7}$ و $g(x) = x^2 - 1$ باشند، مطلوب است:

$$(f+2f)(2) \quad (\text{الف محاسبه‌ی مقدار}) \quad (\text{ب تعیین دامنه‌ی } f, g \text{ و دامنه‌ی } \frac{f}{g} \text{ با استفاده از تعریف})$$

۱۴۸- اگر $fog(x) = 8x + 12$ و $f(x) = 2x + 4$ باشند، تابع $g(x)$ را تعیین کنید.

۹۰ خرداد

۱۴۹- نامعادله‌ی $\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} \geq -1$ را حل کرده و جواب را به صورت بازه نشان دهید.

۱۵۰- مقادیر a و b را چنان بیابید که مجموعه‌ی $g = \{(-1, -b+3), (y, 1), (-1, 4-a), (y, a)\}$ یک تابع باشد.

۱۵۱- دامنه‌ی تابع $f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4})$ را به دست آورید.

۱۵۲- دو تابع $f(x) = 3x^2 - 1$ و $g(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ داده شده‌اند.

(الف ضابطه‌ی تابع gof و دامنه‌ی gof را با استفاده از تعریف تعیین کنید.

(ب مقدار $(f-3g)(1)$ را محاسبه کنید.

۹۰ شهریور

۱۵۳- توابع $f(x) = -2$ و $g(x) = x^2 + 1$ داده شده‌اند.

(الف نمودار تابع $f+g$ را رسم کنید.

(ب مقدار $(f \cdot g)(-3)$ را محاسبه کنید.

۱۵۴- دامنه‌ی توابع زیر را به دست آورده و به صورت بازه نشان دهید:

$$f(x) = \log(x^2 - 2x - 3) \quad (\text{الف}) \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-1}} \quad (\text{ب})$$

۱۵۵- دو تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ داده شده‌اند.

(الف ضابطه‌ی تابع fog را بنویسید.

(ب دامنه‌ی تابع fog را با استفاده از تعریف تعیین کنید.

۱۵۶- سهمی به معادله‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ مفروض است. اگر نمودار آن، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض -1 و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول 1 قطع کند و داشته باشیم $f(2) = 3$ ، مقادیر a ، b و c را بیابید.

۸۹ دی

۱۵۷- اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ باشند، بازه‌هایی را که با مجموعه‌های $A \cup B$ و $A \cap B$ تعریف شده‌اند مشخص کنید.

۱۵۸- نامعادله‌ی $\frac{2x^2 - 16}{x^2 + 3x + 2} < 1$ را حل کرده و جواب را روی محور نشان دهید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (\text{الف تعیین کنید.})$$

(الف نمودار تابع f را رسم کنید.

(ب حاصل $f(f(-1))$ را به دست آورید.

۱۶۰- دو تابع $f(x) = x - 2$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ داده شده‌اند.

(الف ضابطه‌ی تابع مرکب gof را مشخص کنید.

(ب دامنه‌ی تابع مرکب gof را تعیین کنید.

۱۶۱- اگر $f(x) = 3x + 5$ و $g(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ ، دامنه و ضابطه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید.

ج) $D_f = (-\infty, -1)$ چون: $x < -1 \Rightarrow x+1 < 0 \Rightarrow \frac{-1}{x+1} \Rightarrow 0 \leq \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} \Rightarrow 0 \leq \frac{x-1}{1-x^2} \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$ ، $1-x^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$ ، $0 \leq \frac{x-1}{1-x^2} \Rightarrow 0 \leq \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} \Rightarrow 0 \leq \frac{-1}{x+1} \Rightarrow x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$

د) $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ چون باید: $x \leq -1$ یا $x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow 1 \leq x^2 \Rightarrow 0 \leq x^2 - 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$ ، $1-x^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$ ، $0 \leq x^2 - 1 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \leq -1$ یا $x \geq 1$

ه) $D_f = (0, 3] - \{1\} = (0, 1) \cup (1, 3]$ چون باید: $0 \leq 3-x \Rightarrow x \leq 3$ ، $0 \leq \frac{1}{x} \Rightarrow 0 < x$ ، $1 - \sqrt{\frac{1}{x}} \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$

و) $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 6} = \frac{2(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2})}{x^2 + x - 6} = \frac{2(x - \frac{1}{2})(x - 1)}{(x+3)(x-2)}$

ز) $D_f = (0, \frac{1}{2}]$ چون باید: $0 \leq \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 6} \Rightarrow x < -3$ یا $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ یا $2 < x \Rightarrow D_f = (-\infty, -3) \cup [\frac{1}{2}, 1] \cup (2, +\infty)$

ح) غیرممکن $\rightarrow x^2 - x + 3 \leq 0 \Rightarrow x^2 - x + 3 \geq 0 \Rightarrow x - 3 \geq x^2 \xrightarrow{(1)} x - 3 \leq \frac{1}{x^2} \xrightarrow{(2)}$

بنابراین $D_f = \emptyset$

توضیح (۱): وقتی دو طرف یک نامساوی هم علامت‌اند، با معکوس کردن طرفین، جهت نامساوی عوض می‌شود. در این جا با توجه به $x < 3$ ، دو طرف نامساوی مثبت‌اند.

توضیح (۲): دلتای $x^2 - x + 3$ منفی است، پس این عبارت ریشه ندارد و همیشه مثبت است (هم علامت با ضریب x^2).

پاسخ ۴۴

الف) $1 + \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = -1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

ب) $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{2k\pi + \frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

ج) به خاطر $\sqrt{x}$ ، باید $x \geq 0$ و به خاطر $\frac{1}{x}$ ، باید $x \neq 0$. کمان کتانژانت هم نباید مضرب صحیح π باشد: $\frac{1}{x} \neq k\pi \Rightarrow x \neq \frac{1}{k\pi}$

بنابراین: $D_h = (0, +\infty) - \{\frac{1}{k\pi} \mid k \in \mathbb{N}\}$

پاسخ ۴۵

الف) برای مثبت بودن $\sqrt[3]{(x+1)^2}$ کافی است $(x+1)^2$ مثبت باشد. از طرفی $(x+1)^2$ نامنفی است (صفر یا مثبت)، پس فقط باید غیرصفر باشد:

یعنی $x \neq -1$ و در نتیجه $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

ب) $D_g = (-3, 3)$ پس $0 < 9 - x^2 \Rightarrow x^2 < 9 \Rightarrow -3 < x < 3$

پاسخ ۴۶

مورد آخر و دو مورد اول را کنار می‌گذاریم و فقط با سومی، چهارمی و پنجمی کار داریم!

الف) $f + g = \{(-1, 2+1), (0, -4+6), (1, 0+3)\} = \{(-1, 3), (0, 2), (1, 3)\}$

ب) $2f - g = \{(-1, 2 \times 2 - 1), (0, 2 \times (-4) - 6), (1, 2 \times 0 - 3)\} = \{(-1, 3), (0, -14), (1, -3)\}$

ج) $f - f \cdot g = \{(-1, 2 - 2 \times 1), (0, -4 - (-4) \times 6), (1, 0 - 0 \times 3)\} = \{(-1, 0), (0, 20), (1, 0)\}$

د) $\frac{f}{g} = \{(-1, \frac{2}{1}), (0, \frac{-4}{6}), (1, \frac{0}{3})\} = \{(-1, \frac{2}{1}), (0, -\frac{2}{3}), (1, 0)\}$ ، $\frac{g}{f} = \{(-1, \frac{1}{2}), (0, \frac{6}{-4}), (1, \frac{3}{0})\} = \{(-1, \frac{1}{2}), (0, -\frac{3}{2}), (1, \frac{3}{0})\}$

$\frac{f}{g} + \frac{g}{f} = \{(-1, 2 + \frac{1}{2}), (0, -\frac{2}{3} - \frac{3}{2}), (1, \frac{0}{3} + \frac{3}{0})\} = \{(-1, \frac{5}{2}), (0, -\frac{13}{6}), (1, \frac{3}{0})\}$ دقت کنید که $\frac{g}{f}$ به ازای $x = 1$ تعریف نشده، چون $f(1) = 0$. حالا:

پاسخ ۴۷

$$f(-7) = 0, g(-7) = \sqrt{\frac{7+7-49}{-7+3}} = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(-7) = \frac{0}{1} = 0$$

$$f(-2) = 3, g(-2) = \sqrt{\frac{2+2-4}{-2+3}} = 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(-2) = \frac{3}{0} \text{ (تعریف نشده)}$$

$$f(-1) = 3, g(-1) = \sqrt{\frac{1+1-1}{-1+3}} = 1 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(-1) = \frac{3}{1} = 3$$

$$f(1) = 6, g(1) = \sqrt{\frac{1-1-1}{1+3}} = 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{6}{0} \text{ (تعریف نشده)}$$

$$f(2) = 4, g(2) = \sqrt{\frac{2-2-4}{2+3}} = \sqrt{-\frac{4}{5}} \text{ (تعریف نشده)} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(2) \text{ تعریف نشده}$$

$$\frac{f}{g} = \{(-7, 0), (-1, 3)\}$$

بنابراین:

پاسخ ۴۸

دامنه‌ی تابع f مساوی $\mathbb{R}$ و دامنه‌ی تابع g مساوی $\mathbb{R} - \{-1\}$ است؛ پس دامنه‌ی تابع $f \cdot g$ می‌شود:

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$$

ضابطه‌ی تابع $f \cdot g$ هم این است:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 1) \times \frac{x}{x+1} = (x-1)(x+1) \times \frac{x}{x+1} = (x-1)x = x^2 - x$$

باید نمودار $y = x^2 - x, x \neq -1$ را رسم کنیم. یعنی یک سهمی که گودی آن رو به بالاست (چون ضریب x^2 مثبت است) و محور x ها را در دو نقطه به طول‌های $x=0$ و $x=1$ قطع می‌کند ($y = x(x-1) = 0 \Rightarrow x=0, 1$). هم‌چنین نمودار در نقطه‌ی به طول $x=-1$ سوراخ است، یعنی نقطه‌ی $(-1, 2)$.

پاسخ ۴۹

$$\frac{x^3 - 3x^2}{x+4} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2(x-3)}{x+4} \geq 0 \Rightarrow x < -4 \text{ یا } x=0 \text{ یا } 3 \leq x \Rightarrow D_f = (-\infty, -4) \cup \{0\} \cup [3, +\infty)$$

$$\begin{array}{c} -4 \quad 0 \quad 3 \\ + \quad | \quad - \quad 0 \quad - \quad + \end{array}$$

دقت کنید که $x=0$ از $x^2=0$ به دست آمد، که توان زوج دارد، به همین خاطر عبارت در آن تغییر علامت ندارد. ضمناً ممکن است بعضی دوستان قبل از تعیین دامنه نوشته باشند $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 3x^2}{x+4}} = \sqrt{\frac{x^2(x-3)}{x+4}} = |x| \sqrt{\frac{x-3}{x+4}}$ و بعد تعیین علامت را شروع کرده باشند. این دوستان احتمالاً $x=0$ را در دامنه نمی‌بینند، چون فقط به $\frac{x-3}{x+4} \geq 0$ فکر می‌کنند! هیچ‌وقت قبل از تعیین دامنه به ضابطه دست نزنید!

حالا دامنه‌ی g :

$$0 < 5 - |x| \Rightarrow |x| < 5 \Rightarrow -5 < x < 5 \Rightarrow D_g = (-5, 5)$$

بنابراین $D_f \cap D_g = (-5, -4) \cup \{0\} \cup [3, 5)$. ببینید:

برای $\frac{f}{g}$ ، باید $g(x) \neq 0$ باشد؛ از طرفی $x = \pm 4 \Rightarrow x^2 - 16 = 0 \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow x = -4$ که در $D_f \cap D_g$ دیده نمی‌شود اما $x=4$ در آن هست و باید حذف شود. یعنی:

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\} = (-5, -4) \cup \{0\} \cup [3, 4) \cup (4, 5)$$

هم‌چنین برای $\frac{g}{f}$ باید $f(x) \neq 0$ از طرفی:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=3$$

و $x=0$ و $x=3$ باید از $D_f \cap D_g$ حذف شوند. یعنی:

$$D_{\frac{g}{f}} = \{x \in D_f \cap D_g \mid f(x) \neq 0\} = (-5, -4) \cup (3, 5)$$

پاسخ ۵۰

الف) $D_f = [0, 1]$ چون باید:

$$0 \leq 1-x \Rightarrow x \leq 1, \quad 0 \leq 1-\sqrt{1-x} \Rightarrow \sqrt{1-x} \leq 1 \Rightarrow (\sqrt{1-x})^2 \leq 1^2 \Rightarrow 1-x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x$$

هم‌چنین $D_g = (-\infty, 1]$ ، چون از نامنفی بودن $1-x$ نتیجه می‌شود $x \leq 1$ و $1+\sqrt{1-x}$ هم که نامنفی هست. پس:

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = [0, 1]$$

ب) حالا لابد می‌گویید $(f \cdot g)(2) = \sqrt{2}$! اما حواستان باشد که دامنه‌ی تابع $f \cdot g$ بازه‌ی $[0, 1]$ است (همان $D_f \cap D_g$) و در نتیجه تابع $f \cdot g$ در $x=2$ تعریف نشده. در مورد $x=3-2\sqrt{2}$ این مشکل را نداریم ($\sqrt{2} \simeq 1/4$) و در نتیجه $3-2\sqrt{2} \simeq 3-2/8 = 0/2 \in [0, 1]$:

$$(f \cdot g)(3-2\sqrt{2}) = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$$

پاسخ ۵۱

$D_f = D_g = \mathbb{R}$ ، پس $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$. برای دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ ، شرط $g(x) \neq 0$ را هم باید اضافه کرد؛ $D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ، چون:

$$g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x, \quad g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$$

حالا برویم سراغ ضابطه‌ها:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x) - (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x$$

بنابراین:

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} = \tan x + 1$$

پاسخ ۵۲

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\} \xrightarrow{D_f=D_g=\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin 2x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

(سینوس به ازای مضارب صحیح π صفر می‌شود، یعنی $\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$) ضابطه‌ی $\frac{f}{g}$ را هم حساب می‌کنیم:

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\cos x}{\sin 2x} = \frac{\cos x}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{2 \sin x}$$

(اگر می‌خواستیم از روی ضابطه‌ی $y = \frac{1}{\sin x}$ تعیین ضابطه کنیم، احتمالاً می‌نوشتیم $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$ و در نتیجه به اشتباه $\mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ را به عنوان دامنه معرفی می‌کردیم!)

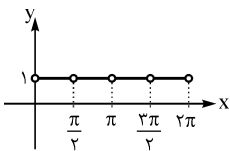
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cos x = 0 \xrightarrow{0 < x < 2\pi} x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sin x = 0 \xrightarrow{0 < x < 2\pi} x = \pi$$

پاسخ ۵۳

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = (0, 2\pi) - \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$$

بنابراین:

هم‌چنین $(f \cdot g)(x) = \tan x \cot x = 1$ ؛ پس نمودار $f \cdot g$ خط افقی $y = 1$ در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ است که در سه نقطه سوراخ شده:



پاسخ ۵۴

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x} + 1) = ((\sqrt[3]{x} + 1) - 1)^3 = (\sqrt[3]{x})^3 = x$$

 اول دقت کنید که $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$ ؛ حالا:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\tan x) = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos 2x$$

پاسخ ۵۵

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(4 - 6x) \xrightarrow{f(x) = \Delta x + 3} = \Delta(4 - 6x) + 3 = -3 \cdot 6x + 19 = -18x + 19$$

پاسخ ۵۶

$$(fog)(1+x) = -3 \cdot (1+x) + 19 = -3 \cdot 1 - 3 \cdot x + 19 = -3 - 3x + 19 = 16 - 3x$$

 حالا برای داشتن $(fog)(1+x)$ ، در ضابطه‌ی بالا به جای x قرار می‌دهیم $1+x$:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\Delta x + 3) \xrightarrow{g(x) = 4 - 6x} = 4 - 6(\Delta x + 3) = 4 - 6 \cdot \Delta x - 18 = -14 - 6 \cdot \Delta x$$

هم‌چنین:

$$(gof)(1-x) = -3 \cdot (1-x) - 14 = 3 \cdot x - 17 = 3x - 17$$

 حالا برای داشتن $(gof)(1-x)$ ، در ضابطه‌ی بالا به جای x قرار می‌دهیم $1-x$:

$$(fog)(1+x) - (gof)(1-x) = (-3 \cdot 1 - 3 \cdot x + 19) - (3 \cdot 1 - 3 \cdot x - 14) = -3 - 3x + 19 - 3 + 3x + 14 = 27$$

بنابراین:

پاسخ ۵۷

$$(gof)(\frac{\pi}{4}) = g(f(\frac{\pi}{4})) = g(-\frac{1}{4}) = \sqrt{1 - 4(-\frac{1}{4})} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

پس:

پاسخ ۵۸

از مقدار $\frac{x-3}{\sqrt{x}}$ خارج شده؛ ببینیم ورودی آن چه بوده:

$$\frac{x-3}{\sqrt{x}} = -2 \Rightarrow x-3 = -2\sqrt{x} \Rightarrow x+2\sqrt{x}-3=0 \Rightarrow (\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}-3=0 \Rightarrow (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)=0 \xrightarrow{0 \leq \sqrt{x}} \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1$$

$$\sqrt[3]{x} + 3 = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = -2 \Rightarrow x = -8$$

ورودی $\frac{x-3}{\sqrt{x}}$ همان خروجی $\sqrt[3]{x} + 3$ است؛ یعنی از $\sqrt[3]{x} + 3$ مقدار ۱ خارج شده:

۸- ورودی ماشین است. ماشینی که طرز کار یک تابع مرکب را به ما نشان می‌دهد!

پاسخ ۵۹

الف) مثلاً اگر $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ و $g(x) = x^2$ ، آن‌گاه $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{x^2-3}{x^2+1}$.

ب) مثلاً اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = (x-3)^5$ ، آن‌گاه $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{(x-3)^5}$.

جواب‌های بالا منحصر به فرد نیستند و ممکن است شما توابع دیگری را مثال زده باشید.

پاسخ ۶۰

الف) $D_f = [-\frac{1}{3}, +\infty)$ (چون باید $x \geq -\frac{1}{3} \Rightarrow -1 \leq 3x \Rightarrow 0 \leq 3x+1$) دامنه‌ی g هم که $\mathbb{R}$ است. حالا:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} \leq g(x)\} = \mathbb{R}$$

چون: همیشه برقرار است $0 \leq (x - \frac{1}{3})^2 \Rightarrow 0 \leq x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \Rightarrow 0 \leq 3x^2 - 2x + \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq g(x)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{3(3x^2 - 2x) + 1} = \sqrt{9x^2 - 6x + 1} = \sqrt{(3x-1)^2} = |3x-1|$$

پس: $f(x) = \sqrt{3x+1}$ و $g(x) = 3x^2 - 2x$ ؛ پس:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\text{مضارب صحیح و فرد پی‌دوم!})$$

ب) $D_g = \mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ؛ چون:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \mid \tan x \in \mathbb{R}\} = D_g = \mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

دامنه‌ی f هم که $\mathbb{R}$ است؛ حالا:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\tan x) = \frac{|\tan x|}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \frac{|\tan x|}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} = \frac{|\tan x|}{\frac{1}{|\cos x|}} = |\tan x| \cdot |\cos x| = \left| \frac{\sin x}{\cos x} \right| \cdot |\cos x| = |\sin x|$$

این هم ضابطه:

پاسخ ۶۱

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

پس: $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1 - 3x + x^2) = (1 - 3x + x^2)^2 = (1 - 3x + x^2) + 2 = x^2 - 3x + 3$$

هم‌چنین:

$x^2 - 3x + 3$ به این دلیل بدون تغییر از قدرمطلق بیرون آمد که دلتایش منفی است ($\Delta = 9 - 12$)، در نتیجه ریشه ندارد و همیشه مثبت است (هم‌علامت با ضریب x^2).

پاسخ ۶۲

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \xrightarrow{D_f = (0, +\infty), D_g = \mathbb{R} - \{0\}} D_{g \circ f} = \{x \in (0, +\infty) \mid f(x) \in \mathbb{R} - \{0\}\} = (0, +\infty)$$

الف)

($f(x)$ به ازای تمام x های دامنه‌اش، عضو $\mathbb{R} - \{0\}$ است، چون $\frac{1}{\sqrt{x}}$ هیچ‌وقت صفر نمی‌شود)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -1 - \sin\left(\frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{x}})^2}\right) = -1 - \sin\frac{1}{x} = -1 - \sin x$$

ضابطه‌ی $g \circ f$ هم این است:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid 0 < g(x)\}$$

ب)

اما $0 < g(x) \Rightarrow 0 < -1 - \sin\frac{1}{x^2} \Rightarrow \sin\frac{1}{x^2} < -1$ و سینوس هیچ‌وقت کم‌تر از -1 نمی‌شود، پس $D_{f \circ g} = \emptyset$. این یعنی ترکیب $f \circ g$ ممکن نیست.

پاسخ ۶۳

$$(f \circ f)(9) = f(f(9)) = f(2) = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 5} = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{-3}} \rightarrow \text{تعریف نشده}$$

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 5}, \text{ پس } f(9) = \frac{1 + \sqrt{9}}{\sqrt{9} - 5} = \frac{4}{-2} = -2 \text{ در نتیجه:}$$

پاسخ ۶۴

$f(x) = x(2x-1) = 2x^2 - x$ بنابراین ضابطه‌ی $f \circ f$ به صورت زیر است:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x^2 - x) = 2(2x^2 - x)^2 - (2x^2 - x) = 2(4x^4 - 4x^3 + x^2) - 2x^2 + x = 8x^4 - 8x^3 + x$$

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \mid -3 \leq x \leq 3, -3 \leq f(x) \leq 3\} = [-1, \frac{3}{4}]$$

پس: $D_f = [-3, 3]$

$$-3 \leq f(x) \Rightarrow -3 \leq 2x^2 - x \Rightarrow 0 \leq 2x^2 - x + 3 \rightarrow \text{همیشه برقرار است}$$

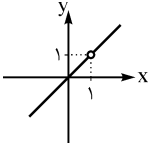
دقت کنید که:

(دلتای $2x^2 - x + 3$ منفی است: $\Delta = 1 - 24 = -23$ ، پس این عبارت صفر نمی‌شود و هم‌علامت با ضریب x^2 است، یعنی مثبت)

$$f(x) \leq 3 \Rightarrow 2x^2 - x \leq 3 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 \leq 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \leq 0 \Rightarrow (x+1)(x-\frac{3}{2}) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x - (x-1)}{x-1}} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{x}{1} = x$$

پاسخ ۶۵



اما یادتان نرود دامنه را هم تعیین کنید؛ تعیین دامنه با استفاده از تعریف، ایمن‌تر است:

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \{x \neq 1 \mid \frac{x}{x-1} \neq 1\} = \{x \neq 1 \mid x \neq x-1\} = \mathbb{R} - \{1\}$$

($x \neq x-1$ همیشه برقرار است) پس نمودار تابع $f \circ f$ خط $y = x$ است که در نقطه‌ی $x = 1$ سوراخ شده:

کلاً در توابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، اگر a و d قرینه باشند، $f \circ f$ تابع همانی $y = x$ با دامنه‌ی $\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$ است.

$$f(x) = 2x - a \Rightarrow f(g(x)) = 2g(x) - a$$

پاسخ ۶۶

$$2g(x) - a = 4x^2 + 3x - 5 \Rightarrow 2g(x) = 4x^2 + 3x - 5 + a \Rightarrow g(x) = 2x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{a-5}{2}$$

$$a = 2, \quad b = \frac{3}{2}, \quad c = \frac{a-5}{2} = \frac{2-5}{2} = -\frac{3}{2}$$

از مقایسه‌ی ضابطه‌ی بالا با $g(x) = ax^2 + bx + c$ ، نتیجه می‌شود:

پاسخ ۶۷

$$g(x) = \frac{x+1}{2x-3} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{f(x)+1}{2f(x)-3}$$

$$\frac{f(x)+1}{2f(x)-3} = x^2 \Rightarrow f(x)+1 = 2x^2 f(x) - 3x^2 \Rightarrow f(x) - 2x^2 f(x) = -3x^2 - 1 \Rightarrow f(x)(1-2x^2) = -3x^2 - 1 \Rightarrow f(x) = \frac{-3x^2 - 1}{1-2x^2} = \frac{3x^2 + 1}{2x^2 - 1}$$

$$f(2) = \frac{3 \times 2^2 + 1}{2 \times 2^2 - 1} = \frac{13}{7}$$

پاسخ ۶۸

$$2 \xrightarrow{g} -4 \xrightarrow{f} 0 \quad -1 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 5 \quad 0 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 5 \quad 3 \xrightarrow{g} -2 \xrightarrow{f} 1$$

الف

بنابراین $f \circ g = \{(2,0), (-1,5), (0,5), (3,1)\}$

$$-4 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} 1 \quad -2 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} - \quad 0 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} -2 \quad 1 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g} - \quad 3 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{g} -$$

ب

بنابراین $g \circ f = \{(-4,1), (0,-2), (3,-2)\}$

$$-4 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 3 \quad -2 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 5 \quad 0 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 1 \quad 1 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} - \quad 3 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 5$$

ج

بنابراین $f \circ f = \{(-4,3), (-2,5), (0,1), (3,5)\}$

$$2 \xrightarrow{g} -4 \xrightarrow{g} - \quad -1 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{g} - \quad 0 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{g} - \quad 3 \xrightarrow{g} -2 \xrightarrow{g} -$$

د

بنابراین $g \circ g = \emptyset$

پاسخ ۶۹

$$(f \circ f)\left(\frac{4}{5}\right) = f\left(f\left(\frac{4}{5}\right)\right) = f\left(\frac{2}{5}\right) \xrightarrow{0 \leq \frac{2}{5} \leq 1} = \sqrt{\frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{25}} = \frac{\sqrt{6}}{5} \quad \text{پس } 0 \leq \frac{4}{5} \leq 1: f\left(\frac{4}{5}\right) = \sqrt{\frac{4}{5} - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$$

الف

$$(f \circ f)\left(\frac{5}{3}\right) = f\left(f\left(\frac{5}{3}\right)\right) = f\left(\frac{11}{5}\right) \xrightarrow{1 < \frac{11}{5}} = \frac{\frac{11}{5} + 2}{\frac{11}{5}} = \frac{\frac{21}{5}}{\frac{11}{5}} = \frac{21}{11} \quad \text{پس } 1 < \frac{5}{3}: f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{\frac{5}{3} + 2}{\frac{5}{3}} = \frac{\frac{11}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{11}{5}$$

ب

$$(f \circ f)(-4) = f(f(-4)) = f\left(\frac{1}{2}\right) \xrightarrow{0 \leq \frac{1}{2} \leq 1} = \sqrt{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad \text{پس } -4 < 0: f(-4) = \frac{-4 + 2}{-4} = \frac{1}{2}$$

ج

پاسخ ۷۰

$$\left(\frac{f}{g} - g \circ f\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} - g(f(2)) \xrightarrow{f(2)=3 \times 2 + 4 = 10} = \frac{10}{g(2)} - g(10) = \frac{10}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{10} = 20 - 0.1 = 19.9$$

الف

$$((f + 2g) \circ f)(2) = (f + 2g)(f(2)) = (f + 2g)(10) = f(10) + 2g(10) = (3 \times 10 + 4) + 2 \times \frac{1}{10} = 34 + 0.2 = 34.2 \quad \text{پس } f(2) = 3 \times 2 + 4 = 10$$

ب

۱۰۲- گزینه ۴»

$\sqrt{x+1}$ همیشه از $\sqrt{x+3}$ کوچکتر است و در نتیجه زیر رادیکال همیشه منفی است. پس دامنه‌ی تابع $\emptyset$ است.

۱۰۳- گزینه ۳»

زیر رادیکال قریبه‌ی عبارتی را داریم که مربع کامل و در نتیجه نامنفی است. به عبارت دیگر، زیر رادیکال اگر صفر نباشد، منفی خواهد بود. پس دامنه‌ی تابع فقط شامل ریشه‌های عبارت زیر رادیکال یعنی اعداد 2 و -2 است.

۱۰۴- گزینه ۳»

$$0 \leq x^2 - 1 \Rightarrow 1 \leq x^2 \Rightarrow 1 \leq |x|, \quad 0 < 4 - x^2 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow 1 \leq |x| < 2$$

۱۰۵- گزینه ۴»

دامنه‌ی تابع، بازه‌ی $(1, 11]$ است. چون به خاطر لگاریتم، باید $x - 1 > 0$ و در نتیجه $x > 1$ ؛ به خاطر رادیکال هم باید:

$$0 \leq 1 - \log(x-1) \Rightarrow \log(x-1) \leq 1 \Rightarrow \log(x-1) \leq \log 10 \Rightarrow x-1 \leq 10 \Rightarrow x \leq 11$$

۱۰۶- گزینه ۲»

وقتی $x \neq 0$ ، $f(x) = x^2$ تمام مقدارهای نامنفی جز صفر را اختیار می‌کند؛ یعنی تمام مقدارهای مثبت را! به ازای $x = 0$ هم مقدار تابع می‌شود 2 که چون مثبت است، قبلاً اختیار شده! پس برد تابع، مقادیر مثبت یعنی $(0, +\infty)$ است.

$$x > 1 \Rightarrow f(x) = (x+5)^2 - 4 > (1+5)^2 - 4 \Rightarrow f(x) > 32$$

۱۰۷- گزینه ۱»

$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x) = |x+1| - 2 = (x+1) - 2 = x - 1 \Rightarrow -1 - 1 \leq f(x) \leq 1 - 1 \Rightarrow -2 \leq f(x) \leq 0$$

$$x < -1 \Rightarrow f(x) = (x+3)^2 - 3 \Rightarrow f(x) \geq 0 - 3 = -3$$

دقت کنید که در حالت سوم یعنی وقتی $x < -1$ است، $x+3$ کوچکتر از 2 می‌شود؛ پس چون $x+3$ تمام مقادیر منفی را اختیار می‌کند، مربع آن تمام مقادیر نامنفی را می‌گیرد. بنابراین کمترین مقدار تابع -3 است (که به ازای $x = -3$ هم اتفاق می‌افتد).

۱۰۸- گزینه ۱»

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\} = \{x \in (-3, +\infty) \mid \frac{x-1}{\sqrt{x+3}} \neq 0\} = \{x \in (-3, +\infty) \mid x \neq 1\} = (-3, +\infty) - \{1\} \quad \text{پس: } D_f = D_g = (-3, +\infty)$$

۱۰۹- گزینه ۲»

اگر $x \leq 0$ آن‌گاه $f(x) = x - 1$ ، پس $f(0) = 0 - 1 = -1$. ما مقدار $(f+2g)(x)$ را به ازای $x = f(0) = -1$ می‌خواهیم: $(f+2g)(-1) = f(-1) + 2g(-1)$ حاصل، $-4 = -2 + 2(-1)$ است، چون:

$$x \leq 0 \Rightarrow f(x) = x - 1 \Rightarrow f(-1) = -1 - 1 = -2, \quad -2 \leq x \Rightarrow g(x) = x \Rightarrow g(-1) = -1$$

۱۱۰- گزینه ۴»

$(6, 5) \in g$ پس $g(6) = 5$ و در نتیجه $f(a) = 6$ ؛ بنابراین $f(a) = a + \sqrt{a} = 6$ که با امتحان کردن گزینه‌ها می‌فهمیم $a = 4$.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad f = \{(x, 2x-1), x \in A\} = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9)\}$$

۱۱۱- گزینه ۳»

حالا: تعریف نشده $f(f(5)) = f(9)$ ، تعریف نشده $f(f(4)) = f(7)$ ، $f(f(3)) = f(5) = 9$ ، $f(f(2)) = f(3) = 5$ ، $f(f(1)) = f(1) = 1$ ، یعنی تابع $f \circ f$ فقط سه عضو دوتایی دارد:

$$f \circ f = \{(1, 1), (2, 5), (3, 9)\}$$

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۱۲- گزینه ۱»

$$g(x) = x\sqrt{1-x^2} \Rightarrow (g \circ f)\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

۱۱۳- گزینه ۳»

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\tan x) = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} = \frac{\tan x}{\frac{1}{|\cos x|}} = |\cos x| \tan x \quad \text{پس: } g(x) = \tan x \text{ و } f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(f \circ g)(x) = -\cos x \tan x = -\cos x \times \frac{\sin x}{\cos x} = -\sin x$$

در بازه‌ی $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ یعنی ربع دوم و سوم، کسینوس منفی است؛ بنابراین:

۱۱۴- گزینه ۱»

$$f(x) = |x| \text{ و } g(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \text{ پس:}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f((x+1)^2) = |(x+1)^2| = (x+1)^2 \Rightarrow (f \circ g)(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2} + 1)^2 = (2 - \sqrt{2})^2 = 4 + 2 - 4\sqrt{2} = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(|x|) = (|x| + 1)^2 \Rightarrow (g \circ f)(1 - \sqrt{2}) = (|1 - \sqrt{2}| + 1)^2 = (\sqrt{2} - 1 + 1)^2 = 2$$

$$f \circ g(1 - \sqrt{2}) - g \circ f(1 - \sqrt{2}) = (6 - 4\sqrt{2}) - 2 = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1 - \sqrt{2})$$

بنابراین:

$$f(x) = |x| - x \Rightarrow f(f(x)) = f(|x| - x) = ||x| - x| - (|x| - x) = 0$$

۱۱۵- گزینه‌ی «۴»

چون اگر $x \leq 0$ آن گاه $f(f(x)) = |x - x| - (x - x) = 0$ و اگر $x > 0$ آن گاه $f(f(x)) = |-x - x| - (-x - x) = -2x + 2x = 0$

$$f(x) = \sqrt{x+2}|x| \Rightarrow f(-144) = \sqrt{-144+2}|-144| = \sqrt{-142} \times 144 = \sqrt{144} = 12$$

۱۱۶- گزینه‌ی «۲»

$$f(f(-144)) = f(12) = \sqrt{12+2} \times 12 = \sqrt{14} \times 12 = 6$$

بنابراین:

$$f(x) = \sqrt{2-x-x^2} \Rightarrow f(-1) = \sqrt{2-(-1)-(-1)^2} = \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

۱۱۷- گزینه‌ی «۱»

$$f(f(-1)) = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2-\sqrt{2}-(-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2-\sqrt{2}-2} = \sqrt{-\sqrt{2}}$$

بنابراین:

۱۱۸- گزینه‌ی «۱»

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 3x) = -\frac{1}{4}(x^2 + 3x) + 2$$

$$f(x) = x^2 + 3x \text{ و } g(x) = -\frac{1}{4}x + 2 \text{ پس:}$$

حالا می‌خواهیم مقادیر $g \circ f$ بالای محور x ها یعنی مثبت باشد:

$$-\frac{1}{4}(x^2 + 3x) + 2 > 0 \xrightarrow{\times(-2)} x^2 + 3x - 4 < 0 \Rightarrow (x+4)(x-1) < 0 \Rightarrow -4 < x < 1 \Rightarrow x \in (-4, 1)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & -4 & & 1 & & & \\ & + & & - & & + & \end{array}$$

$$f(x^2) - 2f(x) + 1 = \frac{x^2}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + 1 = \frac{x^2 - 2x(x+1) + (x^2-1)}{x^2-1} = \frac{x^2 - 2x^2 - 2x + x^2 - 1}{x^2-1} = \frac{-2x-1}{x^2-1} = \frac{2x+1}{1-x^2}$$

۱۱۹- گزینه‌ی «۳»

۱۲۰- گزینه‌ی «۱»

با توجه به این که $f(x) = x^2(2-x)^2$ خیلی راحت می‌شود فهمید $f(1+x) - f(1-x) = 0$ چون $f(1+x) = f(1-x)$ ؛ ببینید:

$$f(1+x) = (1+x)^2(2-1-x)^2 = (1+x)^2(1-x)^2, \quad f(1-x) = (1-x)^2(2-1+x)^2 = (1-x)^2(1+x)^2$$

۱۲۱- گزینه‌ی «۴»

$$f(5) = 5 - \sqrt{5+4} = 2, \quad f(f(5)) = f(2) = 2 \times 2 + 3 = 7, \quad f(1) = 2 \times 1 + 3 = 5, \quad f(f(1)) = f(5) = 2$$

جواب، $7+2=9$ است:

۱۲۲- گزینه‌ی «۲»

از $\tan 20^\circ + \cot 20^\circ$ نرسید؛ این‌ها فیلمشان است! 20° در ربع سوم است (بین 180° و 270°)، آن‌جا هم تانژانت و کتانژانت مثبت‌اند؛ از طرفی،

$f(x)$ به ازای تمام یکس‌های نامنفی مساوی ۲ است، پس $f(\tan 20^\circ + \cot 20^\circ) = 2$. حالا: $g(f(\tan 20^\circ + \cot 20^\circ)) = g(2) = 2+1=3$

۱۲۳- گزینه‌ی «۴»

$$f(1 - \cos^2 x) = -1 \text{ اما } 1 - \cos^2 x \text{ هیچ‌وقت از ۱ بزرگ‌تر نمی‌شود، پس } f(1 - \cos^2 x) = -1. \quad f\left(\frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}\right) = 1 \text{ بنابراین ۱ بزرگ‌تر است، همیشه از ۱ بزرگ‌تر است، پس } \frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} + 1$$

با این حساب، حاصل عبارت موردنظر یعنی جمع این دو، می‌شود صفر.

۱۲۴- گزینه‌ی «۱»

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$D_f = \mathbb{R}, \text{ چون در واقع } f(x) = \sqrt{x+|x|} = \begin{cases} \sqrt{x+x} = \sqrt{2x} & 0 \leq x \\ \sqrt{x-x} = 0 & x < 0 \end{cases} \text{ هم‌چنین:}$$

$$x^2 - 4x \neq 0 \Rightarrow x(x-4) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, 4 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0, 4\}$$

بنابراین $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0, 4\}$. از طرفی به ازای تمام x های منفی و هم‌چنین به ازای خود صفر، $f(x)$ مساوی

$$f(x) = 4 \Rightarrow \sqrt{2x} = 4 \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = 8$$

صفر می‌شود. پس تا این‌جا باید بازه‌ی $(-\infty, 0]$ را از $\mathbb{R}$ حذف کنیم. هم‌چنین:

$$D_{g \circ f} = (0, +\infty) - \{8\} = (0, 8) \cup (8, +\infty)$$

پس $x = 8$ هم باید حذف شود. یعنی:

$$x \neq 0, 0 \leq 1 - x^2 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_f = [-1, 1] - \{0\}$$

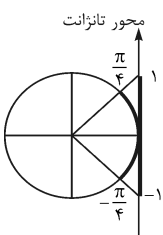
۱۲۵- گزینه‌ی «۳»

در مورد $g(x)$ ، سؤال گفته $|x| < \frac{\pi}{4}$ ؛ در این فاصله هم تانژانت تعریف شده، پس $D_g = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. حالا:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \mid -1 \leq g(x) \leq 1, g(x) \neq 0\}$$

با توجه به شکل روبه‌رو، از $-1 \leq g(x) \leq 1$ نتیجه می‌شود $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. تانژانت هم در $x = 0$ صفر می‌شود، پس:

$$D_{f \circ g} = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] - \{0\} = [-\frac{\pi}{4}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{4}]$$



۱۲۶- گزینهی «۲»

$$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f(f(x)) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3 \Rightarrow f(f(f(x))) = 2(4x + 3) + 1 = 8x + 7 \Rightarrow f(f(f(f(x)))) = 2(8x + 7) + 1 = 16x + 15$$

۱۲۷- گزینهی «۲»

$$-1 \leq 0 \Rightarrow f(-1) = \sqrt{-(-1)} = 1, \quad f(f(-1)) = f(1) \xrightarrow{0 < 1} = -\frac{1}{1}, \quad f(f(f(-1))) = f(-1) \xrightarrow{-\frac{1}{1} < 0} = \sqrt{-(-\frac{1}{1})} = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f(g(x)) = \frac{g(x)+1}{g(x)-1}$$

۱۲۸- گزینهی «۴»

$$\frac{g(x)+1}{g(x)-1} = \frac{x^2+2}{x^2+1} \xrightarrow{x=1} \frac{g(1)+1}{g(1)-1} = \frac{1^2+2}{1^2+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2g(1)+2=3g(1)-3 \Rightarrow g(1)=5$$

اما سؤال گفته $f(g(x)) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ پس:

$$f(x) = 2x^2 + 4 \Rightarrow f(g(x)) = 2g^2(x) + 4$$

۱۲۹- گزینهی «۱»

اما سؤال گفته $f(g(x)) = 4x^2 + 6x$ پس:

$$2g^2(x) + 4 = 4x^2 + 6x \xrightarrow{x=-2} 2g^2(-2) + 4 = 4(-2)^2 + 6(-2) = 4 \Rightarrow 2g^2(-2) = 0 \Rightarrow g(-2) = 0$$

۱۳۰- گزینهی «۴»

راه اول: برای رسیدن از $x-3$ به $1-t$ کافی است x را به $4-t$ تبدیل کنیم:

$$f(x-3) = x^2 - 4x + 5 \xrightarrow{x=4-t} f(1-t) = (4-t)^2 - 4(4-t) + 5 = (16-8t+t^2) - (16-4t) + 5 = t^2 - 4t + 5$$

یعنی $f(1-x) = x^2 - 4x + 5$

$$f(x-3) = x^2 - 4x + 5 \xrightarrow{x=0} f(-3) = 0 - 0 + 5 = 5, \quad 1-x = -3 \Rightarrow x = 4$$

راه دوم:

در بین گزینه‌ها، فقط مقدار گزینهی چهارم به ازای $x = 4$ می‌شود ۵، یعنی همان نتیجه‌ی $f(-3) = 5$ را می‌دهد.

۱۳۱- گزینهی «۳»

$$f(\sqrt{x}) = x + \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} \xrightarrow{\sqrt{x}=t} f(t) = t^2 + t \Rightarrow f(2) + f(1) = (2^2 + 2) + (1^2 + 1) = 8$$

راه اول:

$$f(2) + f(1) = f(\sqrt{4}) + f(\sqrt{1}) = (4 + \sqrt{4}) + (1 + \sqrt{1}) = 8$$

راه دوم:

۱۳۲- گزینهی «۱»

$$f(\sqrt{x}+1) = x + 2\sqrt{x} + 2 = ((\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} + 1) + 1 = (\sqrt{x}+1)^2 + 1 \xrightarrow{\sqrt{x}+1=t} f(t) = t^2 + 1 \Rightarrow f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + 1 = 3$$

۱۳۳- گزینهی «۲»

یک نگاه کوچک به $x^2 + 2x^3 + x^4$ ، به شما می‌فهماند که این عبارت همان $(x^2 + x)^2$ است، پس به فرض $t = x^2 + x$ ، نتیجه می‌شود: $f(t) = t^2$ بنابراین $f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 = 3$ به همین سادگی!

پاسخ امتحان‌های نهایی فصل ۲

پاسخ ۱۳۴

الف) مخرج نباید صفر باشد، یعنی $x^2 - 4 \neq 0$ و در نتیجه $x^2 \neq \pm 2$. پس دامنه‌ی تابع، $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ است.

ب)
$$\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x^2-1} = \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow \frac{x}{x-1} + \frac{3}{(x-1)(x+1)} - \frac{x-2}{x+1} = 0 \Rightarrow \frac{x(x+1) + 3 - (x-2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = 0 \Rightarrow x^2 + x + 3 - x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

پاسخ ۱۳۵

$f(x) = ax^2 + bx + c$, $f(0) = 1 \Rightarrow 0 + 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1$
 $f(x) = ax^2 + bx + 1 \begin{cases} f(-1) = 0 \Rightarrow a - b + 1 = 0 \Rightarrow a - b = -1 \\ f(1) = 4 \Rightarrow a + b + 1 = 4 \Rightarrow a + b = 3 \end{cases} \xrightarrow{+} 2a = 2 \Rightarrow a = 1$

$b = a + 1 = 1 + 1 = 2$

$2 \geq 0 \Rightarrow f(2) = 1 - 2^2 = -3$, $f(f(2)) = f(-3) \xrightarrow{-3 < 0} = -3 - 3 = -6$

پاسخ ۱۳۶

پاسخ ۱۳۷

الف) دامنه‌ی تابع f که چندجمله‌ای است، مساوی $\mathbb{R}$ است. در تابع g ، باید $x + 2 \leq 0$ و در نتیجه $x \leq -2$ ؛ یعنی دامنه‌ی تابع g مساوی $(-\infty, -2]$ است.

$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap (-\infty, -2] = (-\infty, -2]$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-1) = \sqrt{(x-1)+2} = \sqrt{x+1}$

$\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

پاسخ ۱۳۸

$x - 2 \geq \frac{2x-1}{x+2} \Rightarrow x - 2 - \frac{2x-1}{x+2} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(x+2) - (2x-1)}{x+2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{x+2} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-3)}{x+2} \geq 0$

پاسخ ۱۳۹

$\Rightarrow -2 < x \leq -1$ یا $3 \leq x$

$$\begin{array}{ccccccc} & -2 & & -1 & & 3 & \\ - & || & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

برای فهمیدن جواب نامعادله، $\frac{(x+1)(x-3)}{x+2}$ را تعیین علامت کردیم؛ این طوری:

$(-2, -1] \cup [3, +\infty)$

اگر بخواهیم مجموعه جواب را به کمک بازه‌ها نشان دهیم، اجتماع دو بازه را خواهیم داشت:

پاسخ ۱۴۰

کلاً $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$ ، پس:

$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) - (\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha) = 2 \sin \beta \cos \alpha$

پاسخ ۱۴۱

$a(0)^2 + b(0) + c = 4 \Rightarrow c = 4$: $f(0) = 4$ یعنی ۴ قطع کند؛ $f(x) = ax^2 + bx + c$ و می‌خواهیم این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع کند؛

$a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \xrightarrow{c=4} a - b = -4$

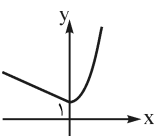
محور x ها را هم در نقطه‌ای به طول ۱- باید قطع کند، یعنی $f(-1) = 0$:

$a(1)^2 + b(1) + c = 2 \xrightarrow{c=4} a + b = -2$

از نقطه‌ی $(1, 2)$ هم که می‌گذرد، پس $f(1) = 2$:

حالا با جمع دو رابطه‌ی آخر، به $-2a = -6$ می‌رسیم، پس $a = 3$. با جاگذاری $a = 3$ در $a + b = -2$ هم نتیجه می‌شود $b = 1$.

پاسخ ۱۴۲



نمودار $y = 1 + x^2$ ، $x \geq 0$ همان نمودار $y = x^2$ است که یک واحد رفته بالا و سمت چپ محور y هایش

حذف شده. نمودار $y = 1 - \frac{x}{p}$ ، $x < 0$ هم همان نمودار $y = -x$ (نیمساز نواحی دوم و چهارم) است که به

خاطر ضریب $\frac{1}{p}$ خوابیده‌تر شده، یک واحد رفته بالا و سمت راست محور y هایش حذف شده.

$f(f(-4)) = f(3) = 1 + 3^2 = 10$

حالا اگر $x < 0$ آن‌گاه $f(x) = 1 - \frac{x}{p}$ ، پس $f(-4) = 1 - \frac{-4}{p} = 3$ و اگر $x \geq 0$ آن‌گاه $f(x) = 1 + x^2$ ، پس:

پاسخ ۱۴۳

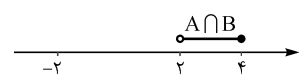
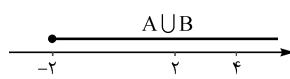
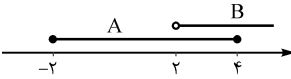
دامنه‌ی تابع f مساوی $\mathbb{R}$ است. برای تابع g ، باید $x-1 \geq 0$ و در نتیجه $x \leq 1$ ؛ یعنی دامنه‌ی g بازه‌ی $(-\infty, 1]$ است.

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq 1\} = \{x \mid x+3 \leq 1\} = \{x \mid x \leq -2\} = (-\infty, -2]$$

$$f(x) = x+3, \quad g(x) = \sqrt{1-x} \Rightarrow f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{1-x} + 3$$

پاسخ ۱۴۴

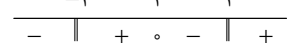
$A = [-2, 4]$ و $B = (2, +\infty)$ ، پس $A \cup B = [-2, +\infty)$ و $A \cap B = (2, 4]$.



پاسخ ۱۴۵

$$\frac{3}{x-4} + \frac{5}{x+4} > \frac{8}{x^2-16} \Rightarrow \frac{3(x+4)+5(x-4)}{(x-4)(x+4)} > \frac{8}{x^2-16} \Rightarrow \frac{8x-8}{x^2-16} > \frac{8}{x^2-16} \Rightarrow \frac{8x-8}{x^2-16} - \frac{8}{x^2-16} > 0 \Rightarrow \frac{8x-16}{x^2-16} > 0$$

$$\Rightarrow -4 < x < 2 \text{ یا } 4 < x \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-4, 2) \cup (4, +\infty)$$



پاسخ ۱۴۶

$$x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$$

$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ ؛ چون سینوس همه جا تعریف شده است و فقط باید:

$$\sqrt[3]{x+1} \neq 0 \Rightarrow x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

$D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$ ؛ چون فقط باید:

پاسخ ۱۴۷

$$(g+2f)(2) = g(2) + 2f(2) = (2^2-1) + 2\sqrt{2+2} = 9$$

پس: $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $g(x) = x^2-1$ ؛

$D_f = [-7, +\infty)$ ؛ چون باید $x+2 \geq 0$ و در نتیجه $x \geq -2$. هم چنین $D_g = \mathbb{R}$ ؛ حالا:

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\} = \{x \in [-7, +\infty) \cap \mathbb{R} \mid x^2-1 \neq 0\} = \{x \in [-7, +\infty) \mid x \neq \pm 1\} = [-7, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

پاسخ ۱۴۸

$f(x) = 2x+4$ ، پس $f(g(x)) = 2g(x)+4$ ؛ از طرفی سؤال گفته $f(g(x)) = 8x+12$. با این حساب، برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$2g(x)+4 = 8x+12 \Rightarrow 2g(x) = 8x+8 \Rightarrow g(x) = 4x+4$$

پاسخ ۱۴۹

$$\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} \geq -1 \Rightarrow \frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x} + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - (x-1)(x+1) + x(x+1)}{x(x+1)} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - (x^2-1) + (x^2+x)}{x(x+1)} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} \geq 0$$

x^2+x+1 ریشه ندارد (دلتایش منفی است) و همیشه مثبت است. پس کسر بالا زمانی مثبت است (این کسر هیچ وقت صفر نمی شود) که مخرجش مثبت باشد. مخرج هم که بین دو ریشه اش منفی و خارج آن ها مثبت است. پس مجموعه جواب نامعادله، $(0, +\infty) \cup (-\infty, -1)$ است.

پاسخ ۱۵۰

در $g = \{(-1, -b+3), (7, 1), (-1, 4-a), (7, a)\}$ دو زوج مرتب می بینیم که مؤلفه‌ی اول آن ها ۷ است؛ پس برای آن که g تابع باشد، باید مؤلفه‌ی دوم آن ها هم مساوی باشد، یعنی $a=1$. هم چنین دو زوج مرتب می بینیم که مؤلفه‌ی اول آن ها -۱ است، پس برای آن که g تابع باشد، باید مؤلفه‌ی دوم آن ها هم مساوی باشد:

$$-b+3 = 4-a \xrightarrow{a=1} -b+3 = 3 \Rightarrow b=0$$

پاسخ ۱۵۱

تانژانت که نسبت سینوس به کسینوس است، همه جا تعریف شده جز جاهایی که کسینوس صفر می شود. کسینوس هم در مضارب صحیح و فرد $\frac{\pi}{2}$

$$x + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = k\pi$$

صفر می شود (در $k\pi + \frac{\pi}{3}$). از طرفی:

$$\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$$

پس دامنه‌ی تابع $f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{3})$ ، برابر است با:

پاسخ ۱۵۲

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2-1) = \frac{3x^2-1}{(3x^2-1)^2-4}$$

پس: $g(x) = \frac{x}{x^2-4}$ و $f(x) = 3x^2-1$ ؛

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq \pm 2\} = \{x \mid 3x^2-1 \neq \pm 2\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

در ضمن، $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ ؛ و:

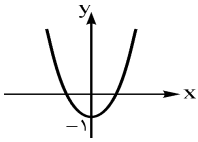
$$3x^2-1=2 \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x=\pm 1, \quad 3x^2-1=-2 \Rightarrow 3x^2=-1 \text{ (غیرممکن)}$$

چون:

$$(f-3g)(1) = f(1) - 3g(1) = (3 \times 1^2 - 1) - 3 \times \frac{1}{1^2 - 4} = 2 - 3(-\frac{1}{3}) = 2 + 1 = 3$$

پاسخ ۱۵۳

پاسخ ۱۵۳



الف) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = -2 + (x^2 + 1) = x^2 - 1$ پس برای رسم نمودار $f+g$ ، باید نمودار $y = x^2 - 1$ را یک واحد بیاوریم پایین:

ب) $(f \cdot g)(-3) = f(-3) \cdot g(-3) = (-2) \cdot ((-3)^2 + 1) = -20$

پاسخ ۱۵۴

الف) $D_f = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ چون عبارت جلوی لگاریتم باید مثبت باشد: $x^2 - 2x - 3 > 0 \Rightarrow (x+1)(x-3) > 0 \Rightarrow x < -1$ یا $3 < x$

ب) $D_g = (\frac{1}{3}, +\infty)$ چون باید زیر رادیکال نامنفی و مخرج غیرصفر باشد، پس: $2x - 1 > 0 \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

پاسخ ۱۵۵

الف) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ پس:

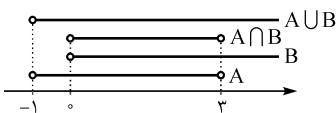
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{\frac{1}{x-1} + 2}{\frac{1}{x-1} - 3} = \frac{\frac{1+2(x-1)}{x-1}}{\frac{1-3(x-1)}{x-1}} = \frac{2x-1}{-3x+4}$$

ب) $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$ و $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$ پس:

از طرفی، اگر $g(x) = \frac{1}{x-1} = 3$ آن گاه $x-1 = \frac{1}{3}$ و در نتیجه $x = \frac{4}{3}$ ، پس:

پاسخ ۱۵۶

کاملاً شبیه سؤال ۸ (خرداد ۹۱) است؛ خودتان حل کنید! جواب نهایی $a=1$ ، $b=0$ و $c=-1$ است.



پاسخ ۱۵۷

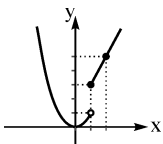
$A = (-1, 3)$ و $B = (0, +\infty)$ پس $A \cup B = (-1, +\infty)$ و $A \cap B = (0, 3)$. ببینید:

پاسخ ۱۵۸

$$\frac{2x^2 - 16}{x^2 + 3x + 2} < 1 \Rightarrow \frac{2x^2 - 16}{x^2 + 3x + 2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{(2x^2 - 16) - (x^2 + 3x + 2)}{x^2 + 3x + 2} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 3x - 18}{x^2 + 3x + 2} < 0 \Rightarrow \frac{(x+3)(x-6)}{(x+2)(x+1)} < 0$$

مجموعه جواب: $(-3, -2) \cup (-1, 6)$

پاسخ ۱۵۹



الف) نمودار تابع را آن روبه‌رو می‌بینید!

برای رسم $f(x) = 2x + 1, 1 \leq x$ دو نقطه را پیدا و به هم وصل می‌کنیم: $(\frac{1}{2}, 2)$

ب) اگر $x < 1$ آن گاه $f(x) = x^2$ ، پس $f(-1) = (-1)^2 = 1$. حالا اگر $x \geq 1$ آن گاه $f(x) = 2x + 1$ ، پس $f(f(-1)) = f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$

پاسخ ۱۶۰

الف) $f(x) = x - 2$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ پس:

ب) $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = [-1, +\infty)$ پس:

پاسخ ۱۶۱

الف) $f(x) = 3x + 5$ و $g(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ پس:

ب) $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ پس: