

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات (۳)

سال سوم آموزش متوسطه

رشته علوم تجربی

وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی

نام کتاب : ریاضیات (۳) - ۲۵۸/۳

مؤلفان : محمد هاشم رستمی، عبدالحمید عطوفی و دکتر محمد گودرزی

آماده‌سازی و نظارت بر جاب و توزیع : اداره کل چاپ و توزیع کتاب‌های درسی

تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹

وبسایت: www.chap.sch.ir

مدیر امور فنی و چاپ : سید احمد حسینی

رسام : محمد حسن معماری، رامین شافعی

طراح جلد : محمد حسن معماری

صفحه‌آرا : علی نجمی

حروفچین : فاطمه باقری مهر

مصحح : زهرا رشیدی مقدم، فاطمه گیتی جبین

امور آماده‌سازی خبر : سپیده ملک‌ایزدی

امور فنی رایانه‌ای : حمید ثابت کلاچاهی، مریم دهقان‌زاده

ناشر : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروبخش)

تلفن: ۵-۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۴۴۵/۶۸۴

چاپخانه : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار : ۱۳۹۰

حق چاپ محفوظ است.



اساس همه شکست‌ها و پیروزی‌ها از خود آدم شروع می‌شود. انسان
اساس پیروزی است و اساس شکست است. باور انسان اساس تمام امور
است. غربیان و در سابق انگلستان و بعد از او امریکا و سایر کشورهای
قدرتمند دنبال این بودند که با تبلیغات دامنه‌دار خودشان به ممالک ضعیف باور
بیاورند که ناتوانند، باور بیاورند که این‌ها نمی‌توانند هیچ کاری انجام
بدهند.

امام خمینی (ره)

این کتاب در سال ۱۳۸۹ در گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و
تألیف کتاب‌های درسی توسط آقایان : حمیدرضا امیری، میرشهرام صدر
و رضا جلیلی و در سال ۱۳۹۰ مجدداً توسط گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی
و تألیف کتاب‌های درسی مورد تجدیدنظر قرار گرفت.

فهرست

فصل اوّل

۱

پدیده‌های تصادفی و احتمال

فصل دوم

۲۰

تابع

فصل سوم

۶۷

حد و پیوستگی

فصل چهارم

۱۲۲

مشتق

فصل اول

پدیده‌های تصادفی و احتمال

در اطراف ما پدیده‌هایی رخ می‌دهند که ما قبل از وقوع یا رخداد این پدیده‌ها، تمام حالت‌های ممکن در رخداد آن‌ها را می‌شناسیم، اما از این که کدام یک از حالت‌های ممکن به‌طور قطع رخ خواهد داد، اطلاع دقیقی نداریم و فقط براساس اطلاعات و گاهی وقت‌ها بنابر تجربه‌ای که داریم، می‌توانیم پیش‌بینی کنیم یا حدس بزنیم که کدام یک از حالت‌های ممکن، امکان بیشتری برای به وقوع پیوستن داشته و کدام یک شانس کمتری دارند.

فرض کنید، مطالعات ژنتیکی در نژاد خاصی از مردم آسیا نشان داده است که ۸۵٪ زن‌های تعیین‌کننده رنگ چشم آن‌ها از نوع زن‌های غالب (تیره) هستند، اگر ۲ نفر از افراد متعلق به این نژاد با هم ازدواج کنند، چقدر احتمال دارد رنگ چشم فرزند آن‌ها روشن باشد؟ اگر بدانیم رنگ چشم فرزند اول آن‌ها روشن است، چقدر احتمال دارد رنگ چشم فرزند دوم این خانواده تیره باشد؟ البته با توجه به اطلاعات موجود و مطالعات انجام شده، شما حدس می‌زنید که بچه به دنیا آمده در این خانواده دارای چشم‌هایی به رنگ تیره باشد. آیا امکان روشن بودن چشم این بچه هم وجود دارد؟ آیا روشن بودن رنگ چشم بچه اول روی روشن یا تیره بودن رنگ چشم فرزند دوم در این خانواده تأثیر دارد؟

پدیده‌های تصادفی

به دنیا آمدن یک نوزاد پدیده‌ای است که ما قبل از وقوع، دو حالت ممکن برای آن می‌شناسیم، (پسر یا دختر) اما قبل از تولد نمی‌توانیم با قطعیت پسر یا دختر بودن نوزاد را تعیین کنیم. وقتی یک مکعب را که روی شش وجه آن اعداد ۱ تا ۶ حک شده است (چنین مکعبی را تاس می‌نامیم) به هوا پرتاب می‌کنیم، قبل از این که به زمین بیافتد و از حرکت بایستد نمی‌توانیم با قطعیت عدد رو شده را تعیین کنیم. به چنین پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که، «از همه حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن آن‌ها مطلع باشیم اما از این که کدام حالت، قطعاً رخ خواهد داد اطمینان نداشته باشیم» یک پدیده تصادفی می‌گوییم.

فضای نمونه‌ای

اگر یک پدیده تصادفی داشته باشیم، «مجموعه شامل همه حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن این پدیده تصادفی را فضای نمونه‌ای می‌نامیم.» فضای نمونه‌ای را معمولاً با S نمایش می‌دهند، اگر اعضای S قابل شمارش باشد آن را یک فضای نمونه‌ای گسسته می‌نامیم.

در جدول زیر تعدادی پدیده تصادفی و فضای نمونه‌ای مربوط به هر کدام و تعداد اعضای هر فضای نمونه‌ای مشخص شده است که توجه به این جدول، به خصوص محاسبه تعداد اعضای هر فضای نمونه‌ای بسیار مهم می‌باشد.

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای: $n(S)$	فضای نمونه‌ای: S	پدیده تصادفی
$n(S) = 2$	$S = \{\text{رو و پشت}\}$	انداختن یک سکه
$n(S) = 6$	$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	انداختن یک تاس
$n(S) = 2 \times 2 = 4$	$S = \{(d, d), (d, p), (p, d), (p, p)\}$	تولد دو فرزند در یک خانواده
$n(S) = 3! = 6$	$S = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$	کنار هم قرار گرفتن حروف a و b و c به طور تصادفی
$n(S) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$	$S = \{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$	انتخاب تصادفی دو حرف از بین حروف d, c, b, a (بدون در نظر گرفتن ترتیب)
$n(S) = \binom{4}{2} = 6$	$S = \{\bar{A}_1\bar{A}_2, \bar{A}_1\bar{A}_2Q, \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{Q}, \bar{A}_1Q\bar{A}_2, \bar{A}_1Q\bar{Q}, \bar{A}_1\bar{Q}Q, A_1\bar{A}_2, A_1\bar{A}_2Q, A_1\bar{A}_2\bar{Q}, A_1Q\bar{A}_2, A_1Q\bar{Q}, A_1\bar{Q}Q\}$	انتخاب تصادفی ۲ مهره از جعبه‌ای که در آن ۲ مهره قرمز و ۲ مهره آبی وجود دارد.
$n(S) = P(4, 2) = \frac{4!}{2!} = 12$	$S = \{12, 21, 14, 41, 16, 61, 24, 42, 26, 62, 46, 64\}$	انتخاب تصادفی ۲ رقم از بین ارقام $1, 2, 4, 6$ و ساختن عدد ۲ رقمی
$n(S) = n(S_1) \times n(S_2) = 6 \times 6 = 36$ S_1 فضای نمونه‌ای تاس آبی و S_2 فضای نمونه‌ای تاس قرمز است	$S = \{(1, 1), \dots, (1, 6), \dots, (6, 6)\}$	انداختن دو تاس با هم و یا انداختن ۱ تاس دو بار (تاس آبی و تاس قرمز)

پیشامد تصادفی

اگر یک پدیده تصادفی رخ دهد و S فضای نمونه‌ای این پدیده یا آزمایش تصادفی باشد «هر زیرمجموعه S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.» به عنوان مثال وقتی یک سکه را می‌اندازیم، فضای نمونه‌ای به صورت $\{r, p\}$ تعریف می‌شود، مجموعه S دارای $2 = 4$

زیرمجموعه است که طبق تعریف فوق هر کدام از زیرمجموعه‌های S یعنی هریک از مجموعه‌های $A_1 = \{پ\}$ و $A_2 = \{ر\}$ و $A_3 = \{پ, ر\}$ و $A_4 = \{پ, ر, ب\}$ یک پیشامد تصادفی از فضای نمونه‌ای $S = \{پ, ر, ب\}$ می‌باشد.

پیشامد $A_3 = \emptyset$ را پیشامد نشدنی و پیشامد $A_4 = S$ را پیشامد حتمی می‌نامیم.
 هر زیرمجموعه فضای نمونه‌ای S مانند A را یک پیشامد تصادفی نامیدیم و «اگر A یک پیشامد تصادفی باشد و نتیجه آزمایش عضوی از A باشد، می‌گوییم A رخ داده است». قبل از ورود به بحث احتمال به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱: خانواده‌ای دارای سه فرزند است اگر پیشامد A ، هم جنس بودن دو فرزند اول و پیشامد B وجود یک فرزند پسر در این خانواده باشد، A و B را مشخص کنید.

حل: فضای نمونه‌ای این پدیده $2 \times 2 \times 2 = 8$ عضو دارد و پیشامدهای A و B از این فضای نمونه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A = \{(پ, د, د), (د, د, د), (د, پ, پ), (پ, پ, پ)\}$$

$$B = \{(پ, د, د), (د, پ, د), (د, د, پ)\}$$

مثال ۲: یک تاس و یک سکه را با هم می‌اندازیم و پیشامد A را به این صورت تعریف می‌کنیم که تاس عدد زوج و سکه «رو» بیاید و پیشامد B را به این صورت تعریف می‌کنیم که سکه «پشت» و تاس عدد کمتر از ۴ باشد، A و B را مشخص کنید.

حل: می‌دانیم فضای نمونه‌ای این مثال دارای $12 = 2 \times 6$ عضو است و داریم:

$$A = \{(۲, رو), (۴, رو), (۶, رو)\}$$

$$B = \{(۱, پشت), (۲, پشت), (۳, پشت)\}$$

مثال ۳: دو تاس را با هم می‌اندازیم و پیشامدهای A و B را به ترتیب «مجموع اعداد دو تاس برابر ۷» و «عدد رو شده حداقل یک تاس برابر ۶» تعریف می‌کنیم، پیشامدهای A و B را معلوم کنید.

حل: فضای نمونه‌ای انداختن دو تاس دارای $36 = 6 \times 6$ عضو است و داریم:

$$A = \{(۱, ۶), (۶, ۱), (۲, ۵), (۵, ۲), (۳, ۴), (۴, ۳)\} \rightarrow n(A) = 6$$

$$B = \{(۱, ۶), (۲, ۶), \dots, (۵, ۶), (۶, ۱), (۶, ۲), \dots, (۶, ۵), (۶, ۶)\} \rightarrow n(A) = ۱۱$$

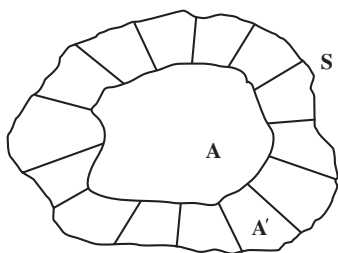
اعمال روی پیشامدها

دیدیم که پیشامدهای یک فضای نمونه‌ای زیرمجموعه‌هایی مانند A و B و C و ... از آن فضا

هستند و بنابراین اعمالی چون اجتماع ($\cup$)، اشتراک ($\cap$) یا تفاضل ($-$) بین مجموعه‌ها و نیز متمم یک مجموعه مانند A یعنی A' در پیشامدها نیز قابل تعریف و تعبیر است که به ذکر آن‌ها می‌پردازیم:

متمم یک پیشامد: اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی و $A \subseteq S$ پیشامدی در این فضای نمونه‌ای باشد، متمم پیشامد A را با A' نمایش می‌دهیم و تعبیر آن چنین است که «پیشامد A' زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.»

در واقع دو پیشامد A و A' کل فضای نمونه‌ای S را تشکیل می‌دهند. به شکل زیر توجه کنید.



تذکر: با توجه به تعریف متمم یک پیشامد

نتایج زیر حاصل می‌شوند:

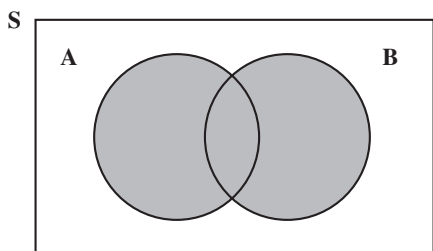
الف) $A \cup A' = S$

ب) $A \cap A' = \emptyset$

ج) $n(A') = n(S) - n(A)$

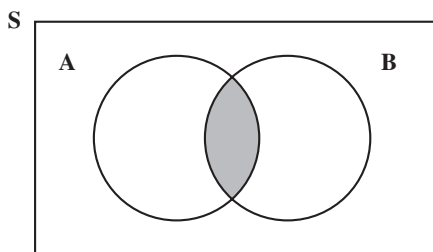
اجتماع دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد

از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A یا پیشامد B یا هر دو رخ دهند. در شکل مقابل پیشامد $A \cup B$ مشخص شده است.



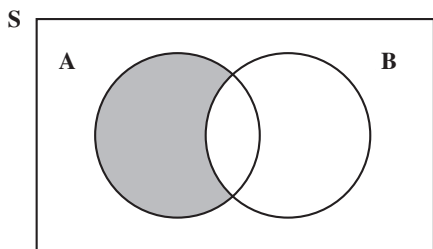
اشتراک دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد

از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می‌دهد که هم پیشامد A و هم پیشامد B رخ دهند. در شکل مقابل پیشامد $A \cap B$ مشخص شده است.



تفاضل دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد

در فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A - B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد. در شکل مقابل پیشامد $A - B$ مشخص شده است.



پیشامدهای ناسازگار: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \cap B = \emptyset$ در این صورت آن‌ها را دو پیشامد ناسازگار می‌نامیم. در واقع اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند با هم رخ نمی‌دهند.

مثال: دو تاس را با هم می‌اندازیم (یا تاسی را دو بار می‌اندازیم) و پیشامدهای A و B و C را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

پیشامد آن که عدد رو شده تاس اول ۴ باشد $A =$

پیشامد آن که مجموع اعداد دو تاس ۷ باشد $B =$

پیشامد آن که اعداد رو شده متمایز باشند $C =$

هر یک از پیشامدهای $A \cup B$ و $A \cap B$ و C' و $A - B$ و $A - C$ را مشخص کنید.

حل: ابتدا مجموعه‌های A و B و C را مشخص می‌کنیم.

$$A = \{(4,1), (4,2), \dots, (4,6)\} \rightarrow n(A) = 6$$

$$B = \{(1,6), (6,1), (5,2), (2,5), (3,4), (4,3)\} \rightarrow n(B) = 6$$

$$C = \{(2,1), (1,2), (2,3), (3,2), (2,4), (4,2), \dots, (5,6), (6,5)\} \rightarrow n(C) = 30$$

پیشامد آن که اعداد رو شده دو تاس با هم برابر باشند $C' =$

$$C' = \{(1,1), (2,2), \dots, (6,6)\}$$

$$A \cup B = \{(1,6), (6,1), (5,2), (2,5), (3,4), (4,3), (4,1), (4,2), (4,4), (4,5), (4,6)\}$$

$A \cup B$ یعنی عدد رو شده تاس اول ۴ یا مجموع اعداد دو تاس ۷ باشد)

$$A \cap B = \{(4,3)\}$$

$A \cap B$ یعنی عدد رو شده تاس اول ۴ و مجموع اعداد دو تاس ۷ باشد)

$$A - B = \{(4,1), (4,2), (4,4), (4,5), (4,6)\}$$

$A - B$ یعنی عدد رو شده تاس اول ۴ باشد و مجموع اعداد دو تاس ۷ نباشد)

$$A - C = A \cap C' = \{(4,4)\}$$

$A - C$ یعنی عدد رو شده تاس اول ۴ باشد و اعداد دو تاس متمایز نباشند)

حالا می‌خواهیم امکان به وقوع پیوستن هر پیشامد تصادفی مانند A در یک فضای نمونه‌ای

چون S را اندازه‌گیری کنیم یا اصطلاحاً احتمال وقوع هر پیشامد را محاسبه کنیم.

فرض کنید در یک جعبه ۴ مهره قرمز و ۲ مهره آبی (۴ مهره قرمز با شماره‌های ۱ تا ۴ و ۲ مهره

آبی با شماره‌های ۱ و ۲) موجود است. اگر به تصادف ۱ مهره از این جعبه خارج کنیم با توجه به این که مهره‌های قرمز در جعبه بیشتر از مهره‌های آبی هستند، واضح است که شانس خارج شدن مهره قرمز از شانس خارج شدن مهره آبی بیشتر باشد، حال اگر A را پیشامد خارج شدن مهره قرمز و B را پیشامد خارج شدن مهره آبی تعریف کنیم و کسر حاصل از تقسیم تعداد مهره‌های آبی به تعداد کل مهره‌ها را P(A) و کسر حاصل از تقسیم مهره‌های قرمز به تعداد کل مهره‌های جعبه را P(B) بنامیم، خواهیم داشت :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید $P(A) = 2P(B)$ و این که شانس رخداد پیشامد A دو برابر شانس رخداد پیشامد B باشد، با توجه به دو برابر بودن تعداد مهره‌های قرمز نسبت به مهره‌های آبی از قبل پیش‌بینی می‌شد، یعنی تقسیم تعداد حالت‌های مطلوب بر تعداد کل حالت‌های ممکن $\left(\frac{n(A)}{n(S)}\right)$ عددی را به دست می‌دهد که با انتظار و توقع ما مطابقت دارد و همین فرمول $\left(P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}\right)$ در فضاهای قابل شمارش^۱ به عنوان فرمول احتمال به کار می‌رود.

احتمال رخداد پیشامد A

احتمال رخداد پیشامد A از فضای نمونه‌ای S را با P(A) نشان می‌دهیم و برای محاسبه P(A) کافی است تعداد اعضای A یعنی n(A) را بر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای یعنی n(S) تقسیم کنیم. عدد حاصل یعنی P(A) عددی حقیقی است که شانس رخداد پیشامد A را اندازه‌گیری می‌کند.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن}}$$

از آن جا که A پیشامدی در فضای S است، طبق تعریف داریم :

$$A \subseteq S \Rightarrow 0 \leq n(A) \leq n(S)$$

اگر طرفین نامساوی‌های اخیر را n(S) تقسیم کنیم خواهیم داشت،

$$\frac{0}{n(S)} \leq \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

۱- فضای قابل شمارش به فضا یا مجموعه‌ای گفته می‌شود که تعداد اعضای آن را با شمارش به دست می‌آوریم.

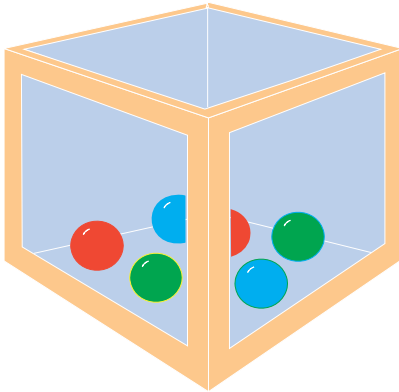
هم چنین با توجه به تعریف احتمال داریم :

$$P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$$

$$P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

توجه دارید که هر چقدر تعداد اعضای A بیشتر باشد، کسر $\frac{n(A)}{n(S)}$ بزرگتر و به عدد یک نزدیک تر بوده و اصطلاحاً می‌گوییم احتمال رخداد پیشامد A بیشتر است.

تمرین



فرض کنید در یک جعبه ۱۲ مهره آبی و ۶ مهره قرمز و ۲ مهره سبز وجود داشته باشد. اگر از این جعبه ۱ مهره به تصادف خارج کنیم، احتمال آبی بودن، قرمز بودن و سبز بودن مهره خارج شده را محاسبه کرده و اعداد حاصل را با حدسی که قبل از محاسبه این احتمالات، زده بودید، مقایسه کنید.

قانون جمع احتمالات

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند داریم :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

که تساوی فوق از تقسیم طرفین تساوی $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ (که به اصل شمول معروف است)، بر $n(S)$ به دست می‌آید، و به آن قانون جمع احتمالات گفته می‌شود.

احتمال پیشامد متمم: اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S و A' متمم آن باشد، در

این صورت :

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A') - P(A \cap A')$$

$$\Rightarrow P(S) = P(A) + P(A') - P(\emptyset)$$

$$\Rightarrow 1 = P(A) + P(A') \Rightarrow P(A) = 1 - P(A')$$

احتمال پیشامدهای ناسازگار

قبلاً گفتیم که اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \cap B = \emptyset$ در این صورت A و B را دو پیشامد ناسازگار و اگر $A \cap B \neq \emptyset$ ، آن‌ها را سازگار می‌نامیم، به نکته زیر توجه کنید.
نکته: با توجه به قانون جمع احتمالات، اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، چون $A \cap B = \emptyset$ و $P(\emptyset) = 0$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

در حالت کلی‌تر، اگر $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی دو به دو ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند نیز داریم:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

مثال ۱: وقتی تاسی را می‌اندازیم، اگر پیشامد A را «رو شدن عدد زوج» و پیشامد B را «رو شدن عدد فرد» و C را پیشامد «رو شدن عدد اول» تعریف کنیم، یعنی $A = \{2, 4, 6\}$ و $B = \{1, 3, 5\}$ و $C = \{2, 3, 5\}$ در این صورت A و B ناسازگارند ولی A و C سازگار و B و C نیز سازگارند.



مثال ۲: خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان این خانواده را مشخص کرده و احتمال آن را محاسبه کنید که: الف) حداقل ۲ فرزند این خانواده دختر باشند. ب) فقط ۱ فرزند در این خانواده پسر باشد.

حل: فضای نمونه‌ای به صورت زیر است:

$$S = \{(د, د, د), (د, د, پ), (د, پ, د), (د, پ, پ), (پ, د, د), (پ, د, پ), (پ, پ, د), (پ, پ, پ)\}$$

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

الف) اگر A را پیشامد «حداقل ۲ فرزند دختر» تعریف کنیم (یا دو دختر یا هر سه دختر) در

$$S = \{(د, د, د), (د, د, پ), (د, پ, د), (پ, د, د)\} \quad \text{این صورت:}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ب) اگر C را پیشامد «فقط ۱ پسر» تعریف کنیم، در این صورت :

$$C = \{(پ,د,د), (د,پ,د), (د,د,پ)\} \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{3}{8}$$

مثال ۳: از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ۲ مهره زرد می‌باشد، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که :

الف) هر سه سبز باشند ب) هر سه هم‌رنگ باشند ج) فقط ۲ مهره آبی باشد د) حداقل ۱ مهره آبی باشد ه) حداکثر ۲ مهره سبز باشد.

حل: فضای نمونه‌ای این پدیده تصادفی مجموعه شامل همه حالت‌های ممکن در انتخاب ۳ مهره از بین ۱۱ مهره موجود در جعبه است که تعداد اعضای آن برابر است با :

$$n(S) = \binom{11}{3} = \frac{11!}{(11-3)! \times 3!} = 165$$

$$\text{الف) } A : \text{پیشامد هر سه سبز} \Rightarrow n(A) = \binom{5}{3} = 10 \Rightarrow P(A) = \frac{10}{165} = \frac{2}{33}$$

ب) B: پیشامد هر سه هم‌رنگ (یا هر سه سبز یا هر سه آبی)

$$\Rightarrow n(B) = \binom{5}{3} + \binom{4}{3} = 14 \Rightarrow P(B) = \frac{14}{165}$$

ج) C: پیشامد فقط ۲ مهره آبی (۲ مهره آبی و ۱ مهره غیرآبی)

$$\Rightarrow n(C) = \binom{4}{2} \times \binom{7}{1} = 42 \Rightarrow P(C) = \frac{42}{165} = \frac{14}{55}$$

د) D: پیشامد حداقل ۱ مهره آبی (هر سه آبی یا دو آبی و یک غیرآبی یا یک آبی و دو غیرآبی)

$$\Rightarrow n(D) = \binom{4}{1} \times \binom{7}{2} + \binom{4}{2} \times \binom{7}{1} + \binom{4}{3} = 4 \times 21 + 6 \times 7 + 4$$

$$\Rightarrow n(D) = 130 \Rightarrow P(D) = \frac{130}{165} = \frac{26}{33}$$

روش ساده‌تر برای حل قسمت (د) آن است که از پیشامد متمم استفاده کنیم. متمم پیشامد

«حداقل ۱ مهره آبی» یعنی D'، پیشامد «هیچ مهره‌ای آبی» است که معنی آن هر سه غیرآبی بوده و

$$n(D') = \binom{7}{3} = 35$$

$$P(D') = \frac{35}{165} = \frac{7}{33}, \quad P(D) = 1 - P(D') = 1 - \frac{7}{33} = \frac{26}{33}$$

پیشامد «حداکثر ۲ مهره سبز»: E (هـ)

$$E' : \text{پیشامد «هر سه مهره سبز»} \Rightarrow n(E') = \binom{5}{3} = 10$$

$$P(E') = \frac{10}{165} = \frac{2}{33}, \quad P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{2}{33} = \frac{31}{33}$$

مثال ۴: دو تاس را با هم می‌اندازیم، مطلوب است احتمال آن که:

الف) اعداد رو شده هر دو تاس زوج باشند. (ب) اعداد رو شده هر دو تاس مثل هم باشند.

ج) مجموع اعداد رو شده دو تاس ۸ یا اعداد رو شده هر دو تاس زوج باشند. (د) مجموع اعداد رو شده دو تاس کمتر از ۱۰ باشد. (هـ) مجموع اعداد رو شده دو تاس مضرب ۴ باشد.

حل: با توجه به این که دو تاس را همواره دو شیئی متمایز (تاس آبی و تاس قرمز) در نظر می‌گیریم، فضای نمونه‌ای این پدیده تصادفی دارای $6 \times 6 = 36$ عضو است.

$$\text{الف)} \quad A = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$$

$$n(A) = 9 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ب)} \quad B = \{(1,1), (2,2), \dots, (6,6)\} \Rightarrow n(B) = 6, \quad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\text{ج)} \quad \left\{ \begin{array}{l} C : \text{پیشامد مجموع دو تاس ۸} \Rightarrow C = \{(2,6), (6,2), (5,3), (3,5), (4,4)\} \\ D : \text{پیشامد هر دو تاس زوج} \Rightarrow D = \{(2,2), \dots, (6,4), (6,6)\} \end{array} \right.$$

پیشامد «مجموع اعداد رو شده دو تاس ۸ یا اعداد رو شده هر دو تاس زوج» یعنی پیشامد

$C \cup D$ و طبق قانون جمع احتمالات داریم:

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = \frac{5}{36} + \frac{9}{36} - \frac{3}{36} = \frac{11}{36}$$

$$(C \cap D) = \{(2,6), (6,2), (4,4)\}$$

د) E : مجموع دو تاس کمتر از ۱۰

مجموع دو تاس بزرگتر یا مساوی ۱۰: E'

$$E' = \{(6,6), (6,5), (5,6), (6,4), (4,6), (5,5)\} \Rightarrow P(E') = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\text{و)} \quad P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

پیشامد مجموع دو تاس مضرب ۴ : F (هـ)

در بین اعداد ۲ تا ۱۲ که مجموع دو تاس می‌تواند هریک از این اعداد باشد، مضارب ۴ عبارتند از ۴ و ۸ و ۱۲ بنابراین :

$$F = \{(2,2), (1,3), (3,1), (2,6), (6,2), (5,3), (3,5), (4,4), (6,6)\}$$

$$n(F) = 9, \quad P(F) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

تمرین

۱- کدام یک از پدیده‌های زیر تصادفی است

(الف) انداختن یک تاس که روی هر ۶ وجه آن عدد ۱ حک شده باشد.

(ب) انداختن دو تاس سالم با هم

(ج) به دنیا آمدن یک نوزاد در ماه خرداد

۲- هریک از اعداد فرد و طبیعی کوچک‌تر از ۱۸ را روی یک کارت نوشته و یکی از این کارت‌ها را به تصادف برمی‌داریم ؛

(الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

(ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت بر ۳ بخش‌پذیر باشد را مشخص کنید.

(ج) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول یا زوج باشد را مشخص کنید.

۳- خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است، مطلوب است :

(الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای

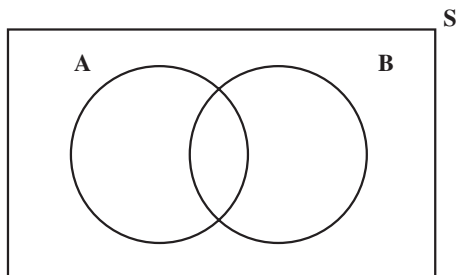
(ب) پیشامد A که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

(ج) پیشامد B که در آن حداقل یک فرزند پسر باشد.

(د) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر از تعداد فرزندان پسر بیشتر باشد.

(هـ) هریک از پیشامدهای $A \cap B$ و $A - C$ و B' را مشخص کنید، آیا پیشامدهای A و C

ناسازگارند؟



۴- با توجه به شکل مقابل پیشامد

$(A - B) \cup (B - A)$ را علامت بزنید. (این

پیشامد را «فقط A رخ دهد یا فقط B رخ دهد»

تعریف می‌کنیم.)

۵- تمام اعداد دو رقمی را که با ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ۵ می توان ساخت، روی کارت های متمایزی نوشته و در یک کیسه قرار می دهیم و سپس یکی از این کارت ها را به تصادف خارج می کنیم مطلوب است :

الف) فضای نمونه ای این پدیده تصادفی

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۴ باشد.

ج) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، کوچک تر از ۴۰ باشد.

د) پیشامدهای $(A \cup B)$ و $(A \cap B)$

۶- در تمرین ۵ مطلوب است احتمال آن که :

الف) عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

ب) عدد روی کارت مضرب ۳ یا مضرب ۴ باشد.

ج) عدد روی کارت مضرب ۳ باشد و مضرب ۴ نباشد.

۷- از جعبه ای که حاوی ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب خراب است، ۳ سیب به تصادف برمی داریم، مطلوب است احتمال آن که :

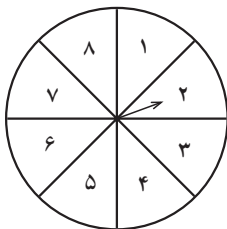
الف) هر سه سیب سالم باشند.

ب) دو سیب، سالم و یکی خراب باشد.

ج) تعداد سیب های سالم از تعداد سیب های خراب بیشتر باشد.

۸- عقربه ای مطابق شکل زیر و به تصادف پس از به حرکت در آمدن روی یکی از ۸ ناحیه

شکل می ایستد و عددی را نشان می دهد. چقدر احتمال دارد :



الف) عقربه عددی اول را نشان دهد.

ب) عقربه عددی اول یا فرد را نشان دهد.

ج) عقربه روی عدد مضرب ۳ بایستد.

پیشامدهای مستقل

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S بوده و رخداد و یا عدم رخداد هریک تأثیری در رخداد دیگری نداشته باشد، این دو پیشامد را مستقل از هم می‌نامیم. به عنوان مثال به دنیا آمدن فرزندان در یک خانواده پیشامدهای مستقل از هم می‌باشند و یا انداختن دو تاس آبی و قرمز را در نظر بگیرید و پیشامد A را رو شدن عدد زوج در تاس آبی و پیشامد B را رو شدن عدد اول در تاس قرمز فرض کنید، در این صورت دو پیشامد A و B مستقل از هم می‌باشند زیرا A رخ بدهد یا رخ ندهد پیشامد B می‌تواند رخ دهد.

قانون ضرب احتمالات برای دو پیشامد مستقل

اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند، $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ و برعکس اگر تساوی اخیر برقرار باشد دو پیشامد A و B مستقل خواهند بود. توجه داشته باشید که قانون ضرب احتمالات برای هر چند پیشامد که دو به دو مستقل باشند برقرار است.

مثال ۱: خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است، مطلوب است احتمال آن که:

الف) فرزندان، به صورت یک در میان پسر و دختر (یا دختر و پسر) باشند.

ب) هر ۳ فرزند پسر باشند.

ج) فرزند سوم دختر باشد.

حل: جنسیت فرزندان در یک خانواده پیشامدهای مستقل از هم می‌باشند، بنابراین می‌توان

برای حل این مثال از قانون ضرب احتمالات استفاده کرد:

$$A = \{(د, پ, د), (د, پ, پ), (پ, د, پ), (پ, د, د)\} \text{ الف}$$

$$n(S) = 2^3 = 8, \quad n(A) = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{روش اول}$$

$$P(A) = P\{(پ, د, پ), (پ, د, د)\} + P\{(د, پ, د), (د, پ, پ)\} \quad \text{روش دوم}$$

$$\Rightarrow P(A) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

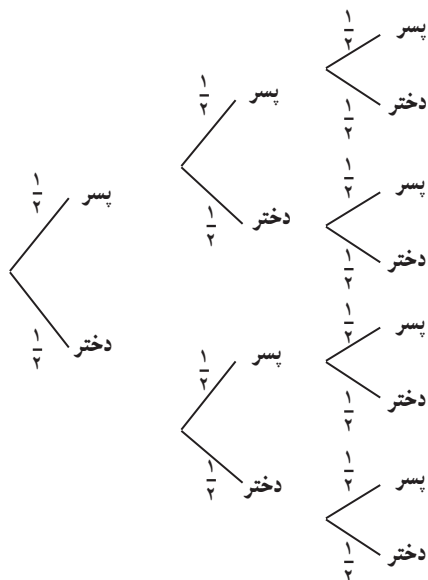
$$B: \text{پیشامد هر ۳ فرزند پسر} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$C: \text{پیشامد فرزند سوم دختر} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{2}$$

توجه دارید که پیشامد جنسیت فرزند سوم با جنسیت فرزندان قبل از خود مستقل است.

تمرین

به نمودار درختی این پدیده دقت کنید و جواب‌های سه قسمت این مثال را از روی نمودار به دست آورید.



مثال ۲: آزمایش‌های انجام شده روی دو شخص A و B نشان می‌دهد که احتمال بهبود شخص A پس از عمل جراحی پیوند کلیه ۸۰٪ و احتمال بهبود شخص B پس از عمل جراحی پیوند کلیه ۶۰٪ است. اگر این دو نفر تحت عمل پیوند کلیه قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد: الف) هر دو نفر سلامتی خود را به دست آورند.

ب) حداقل یکی از این دو نفر بهبود یابد.

حل: پیشامدهای بهبودی هریک از این دو نفر مستقل از هم می‌باشد بنابراین:

پیشامد بهبودی هر دو نفر: C (الف)

$$P(C) = \frac{80}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25} \text{ یا } 48\%$$

$$\text{ب) } \begin{cases} A_1: A \text{ پیشامد بهبودی شخص} \\ B_1: B \text{ پیشامد بهبودی شخص} \end{cases}$$

$$P(A_1 \cup B_1) = P(A_1) + P(B_1) - P(A_1 \cap B_1)$$

$$\Rightarrow P(A_1 \cup B_1) = \frac{80}{100} + \frac{60}{100} - \frac{12}{25} = \frac{7}{5} - \frac{12}{25} = \frac{23}{25} \text{ یا } 92\%$$

مثال ۳: احتمال این که شخصی گروه خونی A^+ داشته باشد ۲۵٪ است و احتمال این که او ناراحتی قلبی داشته باشد ۲۰٪ است و احتمال این که گروه خونی او A^+ یا ناراحتی قلبی داشته باشد ۴۰٪ است چقدر احتمال دارد این شخص هم ناراحتی قلبی داشته باشد و هم گروه خونی او A^+ باشد؟

حل:

روش اول: طبق قانون جمع احتمالات اگر A و B را به ترتیب داشتن گروه خونی A^+ و داشتن ناراحتی قلبی تعریف کنیم، در این صورت داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ \Rightarrow \frac{40}{100} = \frac{25}{100} + \frac{20}{100} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{5}{100}$$

روش دوم: دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند، بنابراین:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{25}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{500}{10000} = \frac{5}{100}$$

مثال ۴: چقدر احتمال دارد در یک تیم والیبال (تیم ۶ نفره الف) همه در ماه خرداد متولد شده باشند؟ (ب) هیچ دو نفری در یک ماه متولد نشده باشند؟

حل: الف) احتمال به دنیا آمدن یک نفر در یک ماه خاص مانند خرداد، برابر است با $\frac{1}{12}$ و چون متولد شدن افراد در ماه‌های سال پیشامدهای مستقل از هم می‌باشند در این صورت احتمال به دنیا آمدن هر ۶ نفر در ماه خرداد طبق قانون ضرب احتمالات، برابر است با:

$$P(A) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{12}\right)^6$$

ب) اگر فرض کنیم B پیشامد آن باشد که هیچ دو نفری از این ۶ نفر، ماه تولد یکسان نداشته باشد، در این صورت برای نفر اول از این ۶ نفر، هر ۱۲ ماه مطلوب است و نفر دوم در هر ماهی به جز ماه تولد نفر اول می‌تواند متولد شود و نفر سوم در هر ماهی به جز ماه تولد دو نفر قبل و... و برای نفر ششم هر ماه، جز ماه تولد ۵ نفر قبل، مطلوب است بنابراین:

$$P(B) = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{385}{1728}$$

تمرین: چقدر احتمال دارد در یک کلاس ۲۵ نفری روز تولد هیچ دو نفری یکسان نباشد؟

مثال ۵: ۶ نفر که دو نفر آن‌ها برادر یکدیگرند به تصادف در یک ردیف می‌ایستند، چقدر احتمال دارد، الف) دو برادر کنار هم قرار گرفته باشند ب) دو برادر در اول و آخر صف واقع شده باشند.

حل: فضای نمونه‌ای عبارت است از کل حالت‌هایی که ۶ نفر می‌توانند در یک ردیف، کنار هم قرار بگیرند که این تعداد حالت برابر است با $n(S) = 6! = 720$ حال اگر پیشامد کنار هم قرار گرفتن دو برادر را A و پیشامد واقع شدن دو برادر در دو طرفِ صف را B فرض کنیم خواهیم داشت:

الف) دو برادر را کنار هم قرار داده و ۱ نفر فرض می‌کنیم و با ۴ نفر دیگر ۵ نفر می‌شوند که به ۵! طریق کنار هم قرار می‌گیرند و خودِ برادرها نیز به ۲! طریق می‌توانند در عین حال که کنار هم هستند با هم جابه‌جا شوند، پس:

$$n(A) = 5! \times 2!$$

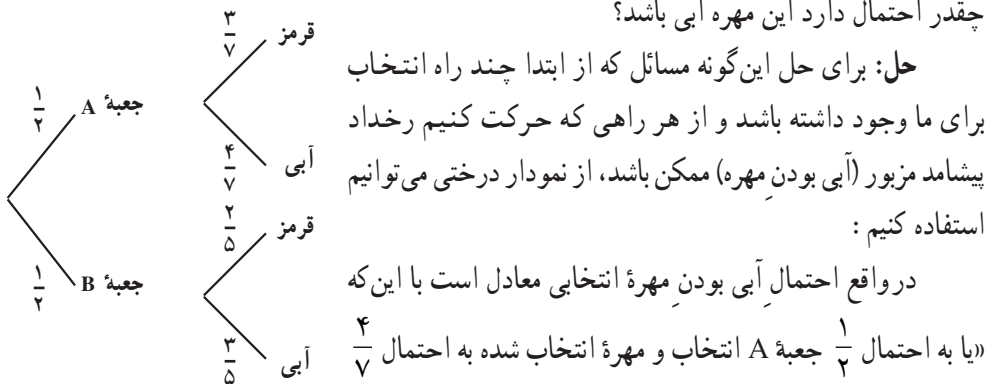
$$\Rightarrow P(A) = \frac{5! \times 2!}{6!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ب) اگر ۶ جایگاه برای این شش نفر در نظر بگیریم در جایگاه اول از سمت چپ هریک از دو برادر می‌توانند قرار بگیرند و جایگاه ششم برادر دیگر و ۴ جایگاه بین آن‌ها توسط ۴ نفر دیگر به ۴! طریق ممکن می‌تواند تغییر کند، لذا:

$$n(B) = 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 2 \times 4!$$

$$P(B) = \frac{2 \times 4!}{6!} = \frac{2}{6 \times 5} = \frac{1}{15}$$

مثال ۶: در جعبه A سه مهره قرمز، ۴ مهره آبی و در جعبه B، ۲ مهره قرمز و ۳ مهره آبی وجود دارد، یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب کرده و ۱ مهره به تصادف از آن جعبه خارج می‌کنیم، چقدر احتمال دارد این مهره آبی باشد؟



آبی است و یا به احتمال $\frac{1}{2}$ جعبه B انتخاب و مهره انتخابی از آن به احتمال $\frac{3}{5}$ آبی است»

$$P(\text{آبی}) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{41}{70}$$

مثال ۷: تاسی را سه بار می‌اندازیم مطلوب است احتمال آن که :

الف) هر سه عدد رو شده مثل هم باشند.

ب) هر سه عدد رو شده متمایز باشند. (هیچ دو عددی مثل هم نباشند)

ج) مجموع اعداد رو شده سه تاس بزرگ‌تر از ۱۶ باشد.
حل:

$$\text{الف) } A = \{(1,1,1), (2,2,2), \dots, (6,6,6)\} \rightarrow n(A) = 6, n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

ب) برای این که اعداد رو شده سه تاس متمایز باشند، تاس اول هر عددی می‌تواند باشد که برای آن ۶ حالت ممکن است و تاس دوم هر عددی به جز عدد رو شده در تاس اول می‌تواند باشد یعنی ۵ حالت دارد و برای تاس سوم هر عددی به جز دو عدد رو شده در تاس‌های اول و دوم یعنی ۴ حالت موجود است و لذا طبق اصل ضرب به $6 \times 5 \times 4 = 120$ طریق امکان دارد سه تاس متمایز باشند، بنابراین :

$$P(B) = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$$

$$\text{ج) } C = \{(6,6,6), (6,6,5), (6,5,6), (5,6,6)\} \rightarrow n(C) = 4$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{4}{216} = \frac{1}{54}$$

(مجموع اعداد رو شده سه تاس از عدد ۳ تا ۱۸ می‌تواند تغییر کند و مجموع اعداد رو شده بزرگ‌تر از ۱۶ یعنی مجموع دو تاس یا ۱۷ و یا ۱۸ باشد.)

مثال ۸: تاسی را دو بار می‌اندازیم و دو پیشامد A و B را در حالت‌های زیر تعریف می‌کنیم

در هر حالت مستقل بودن یا نبودن دو پیشامد A و B را بررسی کنید :

$$\text{الف) } \begin{cases} \text{پیشامد آن که عدد رو شده تاس اول ۵ باشد : } A \\ \text{پیشامد آن که مجموع اعداد رو شده دو تاس ۱۱ باشد : } B \end{cases}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} \text{پیشامد آن که عدد رو شده تاس اول ۴ باشد : } A \\ \text{پیشامد آن که مجموع اعداد رو شده دو تاس ۷ باشد : } B \end{cases}$$

حل: الف) با توجه به تعریف دو پیشامد A و B داریم :

$$A = \{(\omega, 1), \dots, (\omega, 6)\} \rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$B = \{(\omega, 6), (\omega, 5)\} \rightarrow n(B) = 2 \Rightarrow P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$A \cap B = \{(\omega, 6)\} \rightarrow n(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

و چون $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ پس A و B مستقل از هم نیستند.

در این حالت توجه دارید که طبق تعریف نیز به همین نتیجه می‌رسیم زیرا اگر A رخ ندهد (عدم رخداد A) یعنی عدد رو شده تاس اول ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ بیاید، در ۴ حالت اول، پیشامد B یعنی مجموع اعداد رو شده برابر ۱۱ نمی‌تواند رخ بدهد.

ب) در این قسمت نیز مشابه (الف) داریم :

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad B = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$$

$$A \cap B = \{(4, 3)\}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = P(A) \times P(B)$$

پس A و B مستقل از یکدیگر بوده و با توجه به تعریف نیز همین نتیجه به دست می‌آید زیرا اگر A رخ دهد، B می‌تواند رخ دهد و اگر A رخ ندهد (عدد رو شده تاس اول ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۵ یا ۶ بیاید در هر حالت B یعنی مجموع اعداد رو شده برابر ۷ می‌تواند رخ دهد.

تمرین

۱- یک تاس و یک سکه را با هم می‌اندازیم اولاً فضای نمونه‌ای این پدیده را تشکیل دهید (مجموعه S را مشخص کنید) و سپس احتمال آن را حساب کنید که عدد رو شده تاس عدد اول و سکه پشت بیاید.

۲- در کیسه‌ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره سبز و ۲ مهره قرمز وجود دارد، سه مهره به تصادف و بی‌دری و با جایگذاری از این کیسه خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد مهره اول آبی، دومی سبز و سومی آبی باشد؟ اگر این عمل را بدون جایگذاری انجام دهیم چقدر احتمال دارد مهره اول آبی و دومی سبز و سومی آبی باشد؟

۳- خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است، مطلوب است احتمال آن که :

الف) ۲ فرزند این خانواده پسر باشد. ب) حداقل ۲ فرزند خانواده پسر باشد.

ج) تعداد فرزندان پسر بیشتر از تعداد فرزندان دختر باشد.

۴- ۵ نفر را در نظر می‌گیریم، چقدر احتمال دارد :

الف) هر ۵ نفر در یک روز از هفته متولد شده باشند.

ب) هیچ دو نفری در یک روز از هفته متولد نشده باشند.

۵- احتمال آن که فرزندی در خانواده A با چشم‌هایی به رنگ روشن متولد شود 20% و احتمال

آن که نوزادی در خانواده B با چشم‌هایی به رنگ روشن متولد شود 75% است. چقدر احتمال دارد

حداقل یکی از این دو نوزاد با چشم‌هایی به رنگ روشن متولد شوند؟

(راهنمایی: این دو پیشامد مستقل از هم بوده و $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ است.)

۶- در کیسه‌ای ۳ مهره سیاه و ۴ مهره قرمز و ۳ مهره آبی وجود دارد از این کیسه ۳ مهره به

تصادف خارج می‌کنیم، مطلوب است احتمال آن که :

الف) هیچ دو مهره‌ای همرنگ نباشند.

ب) حداقل دو مهره همرنگ باشند.

ج) هیچ مهره‌ای قرمز نباشد.

۷- احتمال آن که شخص A تا 20° سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند 6% و احتمال آن که شخص

B تا 20° سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند 7% است، چقدر احتمال دارد :

الف) هر دو، تا 20° سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کنند.

ب) حداقل یکی از آن‌ها تا 20° سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا نکند.

۸- می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز کلاس دوم و ۷ دانش‌آموز کلاس سوم یک تیم ۳ نفره

به تصادف انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد :

الف) هیچ دانش‌آموز کلاس دوم در تیم نباشد.

ب) تعداد دانش‌آموزان کلاس سوم در تیم انتخابی از تعداد دانش‌آموزان کلاس دوم بیشتر باشد.

۹- دو تاس را با هم می‌اندازیم، مطلوب است احتمال آن که :

الف) حاصلضرب اعداد رو شده دو تاس مضرب ۵ باشد.

ب) اعداد رو شده مضرب ۳ نباشند.

ج) مجموع اعداد رو شده دو تاس ۷ یا هر دو فرد باشند.

د) مجموع اعداد رو شده دو تاس بزرگ‌تر از ۵ باشد.

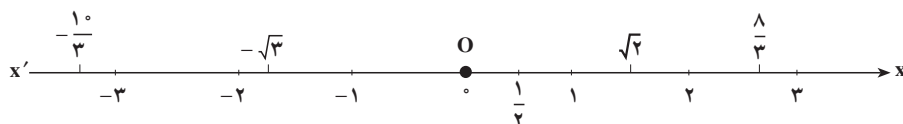
ه) هر دو تاس بزرگ‌تر از ۲ باشند. (و) مجموع اعداد رو شده دو تاس مضرب ۳ باشد.

فصل دوم

تابع

یادآوری و تکمیل

می‌دانیم که هر عدد حقیقی متناظر با یک نقطه از محور مختصات و هر نقطه از محور مختصات، نظیر یک عدد حقیقی است. بدین ترتیب که مبدأ O را همتا یا نظیر عدد صفر گرفت؛ آنگاه، اگر x یک عدد حقیقی مثبت باشد، نقطه‌ای از محور را که به فاصله x از O و در سمت راست O (سوی مثبت) قرار دارد نظیر عدد x و چنانچه x یک عدد حقیقی منفی باشد (که در این صورت $-x$ مثبت است) نقطه‌ای از محور را که به فاصله $-x$ از O و در سمت چپ آن است نظیر عدد x اختیار کرد. بدین گونه به هر عدد حقیقی یک نقطه از محور، و تنها یکی، و به هر نقطه از محور یک عدد حقیقی یکتا نسبت داده می‌شود. بنابراین نقاط یک محور را می‌توانیم با اعداد حقیقی مشخص کنیم. به این جهت محور را گاهی خط حقیقی می‌نامند و برای یک عدد حقیقی و نقطه نظیر آن یک نماد به کار می‌برند و عدد حقیقی x را نقطه x نیز می‌گویند.



بازه

در ریاضیات ۲ با مثال‌هایی از بازه آشنا شده‌اید و می‌دانید که مثلاً بازه $۲- و ۶$ مجموعه همه اعداد حقیقی x بین $۲-$ و ۶ یعنی $۲ < x < ۶$ است که به صورت $(۲, ۶)$ نشان داده می‌شود.

$$(۲, ۶) = \{x \in \mathbb{R} \mid ۲ < x < ۶\}$$

به طور کلی اگر a و b دو عدد حقیقی و $a < b$ باشد:

۱- مجموعه همه اعداد حقیقی x را که از a بزرگ‌تر و از b کوچک‌تر باشند بازه a و b می‌نامند و آن را به صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

۲- اجتماع بازه باز (a, b) و دو نقطه a و b را بازه بسته a و b می نامند و آن را چنین می نویسند :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

۳- اجتماع (a, b) و نقطه b را بازه نیم باز از چپ (یا نیم بسته از راست) می نامند و چنین نشان

می دهند :

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

به همین ترتیب بازه نیم باز از راست (یا نیم بسته از چپ) تعریف می شود. به علاوه بازه های بیکران را به شکل زیر تعریف می کنند :

$$\{x \in \mathbb{R} | x \geq a\} = [a, +\infty) \quad \text{۴- بازه نیم باز } a \text{ و } +\infty :$$

$$\{x \in \mathbb{R} | x > a\} = (a, +\infty) \quad \text{۵- بازه باز } a \text{ و } +\infty :$$

$$\{x \in \mathbb{R} | x \leq a\} = (-\infty, a] \quad \text{۶- بازه نیم باز } -\infty \text{ و } a :$$

$$\{x \in \mathbb{R} | x < a\} = (-\infty, a) \quad \text{۷- بازه باز } -\infty \text{ و } a :$$

به طور خلاصه داریم :

$$x \in (a, b) \Leftrightarrow a < x < b$$

$$x \in [a, b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$$

$$x \in [a, b) \Leftrightarrow a \leq x < b$$

$$x \in (a, b] \Leftrightarrow a < x \leq b$$

$$x \in [a, +\infty) \Leftrightarrow x \geq a$$

$$x \in (a, \infty) \Leftrightarrow x > a$$

$$x \in (-\infty, a] \Leftrightarrow x \leq a$$

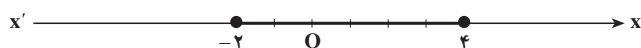
$$x \in (-\infty, a) \Leftrightarrow x < a$$

نمایش هندسی بازه ها

اگر نقاط a و b را روی محور اختیار کنیم هریک از بازه های تعریف شده بالا را می توان به وسیله یک پاره خط یا یک نیم خط، باز یا بسته، از محور نشان داد. نقطه هایی را که به بازه متعلق نیستند با دایره های تو خالی روی محور مشخص می کنند.

مثال ۱: بازه های داده شده را روی محور به شکل زیر نشان می دهیم :

$$۱) \quad [-2, 4] = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 4\}$$



$$۲) \quad (-۲, ۴] = \{x \in \mathbb{R} | -۲ < x \leq ۴\}$$

A number line with points labeled -۲, ۰, and ۴. An open circle is at -۲ and a closed circle is at ۴. The segment between them is shaded.

$$۳) \quad [-۲, ۴) = \{x \in \mathbb{R} | -۲ \leq x < ۴\}$$

A number line with points labeled -۲, ۰, and ۴. A closed circle is at -۲ and an open circle is at ۴. The segment between them is shaded.

$$۴) \quad (-۲, ۴) = \{x \in \mathbb{R} | -۲ < x < ۴\}$$

A number line with points labeled -۲, ۰, and ۴. Open circles are at both -۲ and ۴. The segment between them is shaded.

$$۵) \quad [۴, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq ۴\}$$

A number line with points labeled ۰ and ۴. A closed circle is at ۴, and the line is shaded to the right.

$$۶) \quad (۴, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > ۴\}$$

A number line with points labeled ۰ and ۴. An open circle is at ۴, and the line is shaded to the right.

$$۷) \quad (-\infty, -۲] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -۲\}$$

A number line with points labeled -۲ and ۰. A closed circle is at -۲, and the line is shaded to the left.

$$۸) \quad (-\infty, -۲) = \{x \in \mathbb{R} | x < -۲\}$$

A number line with points labeled -۲ and ۰. An open circle is at -۲, and the line is shaded to the left.

برای آشنایی بیشتر با مفهوم بازه و عملیات روی آن‌ها، در زیر چند مثال نمونه را همراه با جواب آن‌ها آورده‌ایم:

۱- عبارتهای زیر را در صورت امکان ساده کنید:

الف) $[-۴, ۷] \cap (-۲, ۴)$

ب) $[-۴, ۷] \cup (-۲, ۴)$

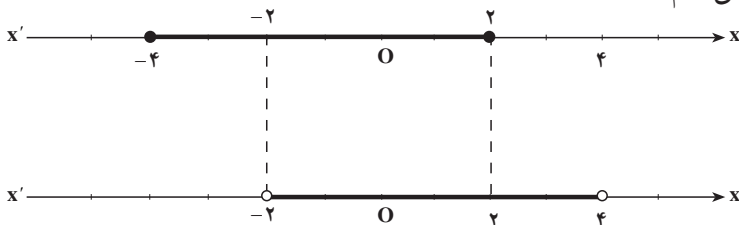
پ) $[-۴, ۷] \cap [۳, +\infty)$

ت) $[-۴, ۷] \cup [۳, +\infty)$

جواب:

الف) ابتدا نمودار هندسی هر بازه را روی محور مشخص می‌کنیم، سپس ناحیه مشترک دو

بازه را پیدا می‌کنیم:



با توجه به نمودار هندسی بازه‌ها ملاحظه می‌کنیم که اشتراک آن‌ها بازه $[-2, 2]$ است. باید توجه داشت که اگر نقطه‌های پایانی اشتراک دو بازه به هر دو بازه تعلق داشته باشند (مانند ۲) در این صورت بازه در آن نقطه بسته و در حالتی که نقطه‌های پایانی اشتراک دو بازه حداکثر متعلق به یکی از بازه‌ها باشند (مانند -۲) آن‌گاه بازه در آن نقطه باز است.

چنانچه با همین روند ادامه دهیم، جواب‌های قسمت‌های دیگر را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

ب) $[-4, 4]$ پ) $\emptyset$ ت) $[-4, 4] \cup [3, +\infty)$

۲- مجموعه جواب هریک از نامعادله‌های زیر را روی محور اعداد حقیقی مشخص کنید و آن را به صورت یک بازه نشان دهید:

الف) $0 < x - 1 < 2$

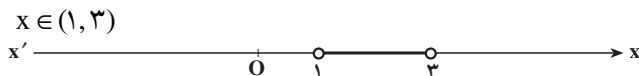
ب) $-1 \leq x + 2 \leq 6$

پ) $\frac{x+1}{2} \geq 2$

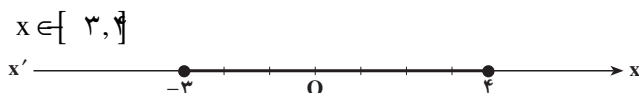
ت) $\frac{2x-1}{3} \leq 1$

جواب:

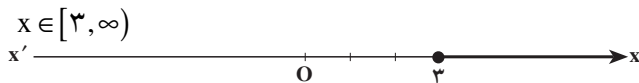
الف) $0 < x - 1 < 2 \Rightarrow 1 < x < 3$



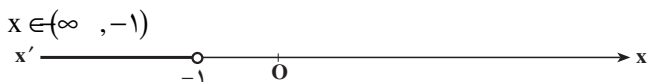
ب) $-1 \leq x + 2 \leq 6 \Rightarrow -3 \leq x \leq 4$



پ) $\frac{x+1}{2} \geq 2 \Rightarrow x+1 \geq 4 \Rightarrow x \geq 3$



ت) $\frac{2x-1}{3} \leq 1 \Rightarrow 2x-1 \leq 3 \Rightarrow x \leq 1$



۳- مجموعه‌های زیر را به صورت بازه نمایش دهید.

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 3\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 6\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

جواب:

$$A = (-1, 3] \quad B = [-1, 3) \quad C = (-\infty, 6) \quad D = [-2, +\infty)$$

۴- بازه‌های زیر را به وسیله مجموعه نمایش دهید.

$$\text{الف)} [3, 4] \quad \text{ب)} (-3, 7] \quad \text{پ)} (-\infty, 1] \quad \text{ت)} [2, +\infty)$$

جواب:

$$\text{الف)} A = \{x \in \mathbb{R} | 3 \leq x \leq 5\} \quad \text{ب)} B = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x \leq 7\}$$

$$\text{پ)} C = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\} \quad \text{ت)} D = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 2\}$$

تمرین

۱- با استفاده از تعریف بازه، عبارت‌های زیر را در صورت امکان، ساده کنید.

$$\text{الف)} (-2, 5] \cup [3, 6) \quad \text{ب)} (-\infty, 0] \cap [-4, 4]$$

$$\text{پ)} (0, +\infty) \cap (-\infty, 3] \quad \text{ت)} [-3, 4] \cup (2, 3]$$

۲- بازه‌های زیر را روی محور نمایش دهید.

$$\text{الف)} [2, +\infty) \quad \text{ب)} (2, +\infty) \quad \text{پ)} [-3, 2]$$

$$\text{ت)} (-2, 2) \quad \text{ث)} \left[-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) \quad \text{ج)} (-\infty, -1]$$

۳- مجموعه‌های زیر را به وسیله بازه نمایش دهید.

$$\text{الف)} A = \{x \in \mathbb{R} | 2 < x \leq 6\} \quad \text{ب)} B = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$$

$$\text{پ)} C = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -2\} \quad \text{ت)} D = \{x \in \mathbb{R} | -6 < x \leq -1\}$$

۴- بازه‌های زیر را به وسیله مجموعه نمایش دهید.

$$\text{الف)} [3, 7] \quad \text{ب)} [0, +\infty) \quad \text{پ)} (0, +\infty)$$

$$\text{ت)} [-4, -1) \quad \text{ث)} (-\infty, 0] \quad \text{ج)} [-3, 2]$$

۵- اگر $A = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 3\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$ و $C = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$ باشد

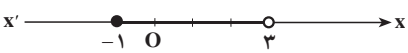
بازه‌هایی را که با مجموعه‌های زیر تعریف شده‌اند مشخص کنید:

$$\text{الف)} A \cup B \quad \text{ب)} A \cap B \quad \text{پ)} A \cup B \cup C$$

$$\text{ت)} A \cap C \quad \text{ث)} B \cap C \quad \text{ج)} (A \cup B) \cap C$$

$$\text{چ)} (A \cap B) \cap C \quad \text{ح)} B \cup C$$

۶- در جدول زیر، خانه‌های خالی را با نماد مجموعه، نماد بازه و نمودار مناسب، پر کنید.

نمودار	نماد مجموعه	نماد بازه
		$[-1, 2]$
	$\{x \in \mathbb{R} 2 < x < 4\}$	
		
	$\{x \in \mathbb{R} -2 < x \leq 3\}$	

۷- مجموعه جواب هریک از نامعادله‌های زیر را تعیین کنید و روی محور نمایش دهید.

الف) $2x - 3 < 0$ ب) $2x - 4 \geq 0$ پ) $\frac{x+1}{2} > 2x - 1$

ت) $0 \leq x + 2 < 3$ ث) $-2 \leq \frac{x}{2} - 1 \leq 2$ ج) $-1 \leq \frac{-2x+1}{3} < 4$

معادلات و نامعادلات گویا

معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

کسرهایی که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای باشند، عبارت‌های گویا می‌نامند. برای مثال عبارت‌های زیر همگی عبارت‌های گویا هستند.

$$\frac{x+1}{x-2} - \frac{3x}{x+5}, \quad \frac{2x^2+x-1}{x+2}, \quad 3x - \frac{1}{x+3}$$

مقدار یک عبارت گویا وقتی با معنی است که مخرجش صفر نباشد. یعنی درحالتی که مخرج یک عبارت گویا صفر شود، آن‌گاه مقدار عبارت گویا تعریف نشده است.

عبارت گویای $\frac{3x}{2} - \frac{1}{x+3}$ به‌ازای $x = -3$ تعریف نشده است، زیرا با قرار دادن $x = -3$

در آن مخرج کسر دوم برابر با صفر شده و در این حالت، کسر تعریف نشده است.

معادله‌هایی که در آن‌ها عبارت‌های گویا وجود داشته باشند، معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

می‌نامند. برای حل این معادله‌ها، ابتدا همه عبارت‌های جبری را به یک طرف معادله منتقل می‌کنیم،

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \text{ نظیر ای معادله به دست آمده می‌نویسیم}$$

می‌رسیم. از قبل می‌دانیم کسری برابر با صفر است که صورت آن برابر با صفر باشد، در نتیجه معادله $P(x) = 0$ را حل می‌کنیم. جواب‌های به دست آمده از این معادله نباید مخارج هیچ‌یک از کسرها را صفر کنند (چرا؟) بنابراین از بین جواب‌های به دست آمده آن‌هایی را قبول می‌کنیم که مخارج هیچ‌یک از کسرها را صفر نکنند و همچنین در شرایط مسأله صدق کنند.

قبل از این که چند معادله شامل عبارت‌های گویا را حل کنیم، بهتر است مخارج مشترک‌گیری کسرها را بیان کنیم. مخارج مشترک بین دو یا چند کسر همان کوچک‌ترین مضرب مشترک بین مخارج آنها است و برای محاسبه ک.م.م. مخارج کسرها، کافی است در صورت امکان مخارج هر کسر را تجزیه کنیم، سپس حاصل ضرب عوامل مشترک با نمای بزرگتر در عوامل غیر مشترک را به دست آوریم.

$$\text{مثال ۱: معادله } \frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3} \text{ را حل کنید.}$$

ابتدا عبارت‌های جبری را به یک طرف معادله می‌بریم:

$$\frac{x-2}{x-4} - \frac{x+1}{x+3} = 0$$

اکنون مخارج مشترک را محاسبه کرده و عملیات جبری را انجام می‌دهیم.

$$\text{مخرج کسر اول} = (x-4)$$

$$\text{مخرج کسر دوم} = (x+3)$$

$$\text{مخرج‌ها} = (x-4)(x+3) = \text{ک.م.م.}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{(x-2)(x+3) - (x+1)(x-4)}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + x - 6 - x^2 + 3x + 4}{(x-4)(x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4x - 2}{(x-4)(x+3)} = 0$$

$$P(x) = 0 \text{ ملاحظه می‌کنیم که به معادله ای نظیر } \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \text{ رسیدیم، بنابراین با حل معادله}$$

سعی می‌کنیم جواب‌های معادله را پیدا کنیم.

$$4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

چون $x = \frac{1}{4}$ مخرج کسرهای $\frac{x-2}{x-4}$ و $\frac{x+1}{x+3}$ را صفر نمی‌کند، پس قابل قبول است و $x = \frac{1}{4}$ جواب این معادله است.

مثال ۲: معادله $\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$ را حل کنید.

ابتدا عبارت‌های جبری را به یک طرف معادله می‌بریم، سپس مخرج مشترک را به دست می‌آوریم.

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} - \frac{x-1}{x-2} = 0$$

$$\text{مخرج کسر اول} = x^2-2x = x(x-2)$$

$$\text{مخرج کسر دوم} = x$$

$$\text{مخرج کسر سوم} = x-2$$

$$\text{مخرج‌ها} = \text{ک.م.م.} = x(x-2)$$

بنابراین داریم:

$$\frac{x^2-2x+2-(x-2)(1+x)-x(x-1)}{x(x-2)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2+4}{x(x-2)} = 0 \Rightarrow -x^2+4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2, x=-2$$

چون $x=2$ مخرج کسرهای $\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x}$ ، $\frac{x-1}{x-2}$ را صفر می‌کند، جواب قابل قبول نیست و

فقط $x=-2$ جواب این معادله و قابل قبول است. از آن‌جا که جواب معادله در خود معادله صدق می‌کند، با قرار دادن $x=-2$ در معادله، به یک رابطه درست به صورت زیر می‌رسیم:

$$\frac{(-2)^2-2(-2)+2}{(-2)^2-2(-2)} - \frac{1+(-2)}{-2} = \frac{-2-1}{-2-2} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

تمرین: هریک از معادله‌های زیر را حل کنید:

$$۱) \frac{2x+4}{x+2} = 1$$

$$۲) \frac{x+5}{3x+15} = \frac{1}{3}$$

$$۳) \frac{۳x-۲}{x} + \frac{۲x+۵}{x+۳} = ۵$$

$$۴) \frac{۲x+۳}{۲x-۲} - \frac{۵}{x^2-۱} = \frac{۲x-۳}{۲x+۲}$$

$$۵) \frac{۱}{x+۱} - \frac{۱}{x} = \frac{۱}{x-۱} - \frac{۱}{x-۲}$$

$$۶) \frac{x+۱}{x-۱} - \frac{x-۱}{x+۱} = ۳x(1 - \frac{x-۱}{x+۱})$$

$$۷) \frac{۲x+۳}{x-۱} - \frac{۲x-۳}{x+۱} = \frac{۱۰}{x^2-۱}$$

$$۸) \frac{۳}{۳x^2-۳x-۲۸} = \frac{۵}{۵x^2-x-۲۰}$$

۹- به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=۲$ است.

۱۰- به ازای چه مقدار k ، معادله $\frac{۴-t}{۲-۲t} = \frac{۳t^2+k}{(t^2+۱)^2-۶۸}$ دارای جواب $t=-۳$ است.

نامعادله‌های شامل عبارت‌های گویا

وقتی نوعی دارو در عضله دست راست یک بیمار تزریق می‌شود، غلظت دارو (برحسب میلی گرم در هر میلی لیتر) t ساعت بعد از تزریق در عضله دست چپ، به طور تقریبی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$C = \frac{۰/۱۲t}{t^2+۲}$$

می‌خواهیم بدانیم که چند ساعت بعد از تزریق، غلظت دارو در عضله دست چپ برابر با $۰/۰۴$ میلی گرم در میلی لیتر یا بیشتر است؟ برای حل این مسئله داریم:

$$C \geq ۰/۰۴ \Rightarrow \frac{۰/۱۲t}{t^2+۲} \geq ۰/۰۴$$

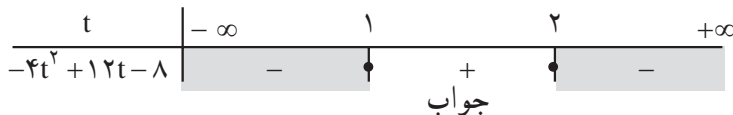
چنانچه دو طرف معادله را در عدد ۱۰۰ ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{۱۲t}{t^2+۲} \geq ۴ \Rightarrow \frac{۱۲t}{t^2+۲} - ۴ \geq ۰ \Rightarrow \frac{۱۲t - ۴t^2 - ۸}{t^2+۲} \geq ۰$$

اکنون عبارت $P = \frac{-۴t^2+۱۲t-۸}{t^2+۲}$ را تعیین علامت می‌کنیم، چون مخرج کسر همواره

مثبت است یعنی همواره $t^2 + 2 > 0$ ، پس علامت P بستگی به علامت صورت کسر دارد، بنابراین کافی است صورت کسر را تعیین علامت کنیم.

$$-4t^2 + 12t - 8 = 0 \quad -4(t^2 - 3t + 2) = 0 \Rightarrow -4(t-1)(t-2) = 0 \Rightarrow t=1 \text{ یا } t=2$$



با توجه به جدول ملاحظه می‌کنیم، برای این که $C \geq 0$ باید $1 \leq t \leq 2$ یعنی در فاصله یک تا دو ساعت بعد از تزریق، غلظت دارو در عضله دست چپ بیمار برابر با 0.4 میلی گرم در هر میلی لیتر یا بیشتر است.

نامعادله‌هایی که در آن‌ها عبارت‌های گویا وجود داشته باشند را نامعادله‌های شامل عبارت‌های گویا می‌نامند. برای حل این نامعادله‌ها، ابتدا همه عبارت‌های جبری را به یک طرف نامعادله منتقل می‌کنیم، سپس با مخرج مشترک‌گیری و ساده کردن عبارت‌های جبری به دست آمده به نامعادله‌هایی

نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ یا $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ یا $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ یا $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ می‌رسیم (که در آن‌ها صورت و مخرج

کسر چندجمله‌ای‌های بر حسب متغیر x هستند)، سپس برای یافتن مجموعه جواب هریک از نامعادله‌های بالا، برای مثال $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ ، عبارت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را در یک جدول تعیین علامت می‌کنیم و در این حالت قسمت‌هایی از جدول تعیین علامت که به ازای آن‌ها عبارت فوق در آن‌ها مثبت یا صفر هستند، مجموعه جواب نامعادله است.

مثال ۱: نامعادله $\frac{x+2}{2x-1} \leq \frac{1}{x-2}$ را حل کنید.

$$\frac{x+2}{2x-1} - \frac{1}{x-2} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+2)(x-2) - (2x-1)}{(2x-1)(x-2)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{(2x-1)(x-2)} \leq 0$$

اکنون عبارت $P = \frac{x^2 - 2x - 3}{(2x-1)(x-2)}$ را تعیین علامت می‌کنیم؛ برای این منظور جواب‌های

صورت و مخرج کسر را در صورت وجود محاسبه می‌کنیم:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x=3, x=-1$$

$$(2x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x=2$$

جدول تعیین علامت عبارت P را تشکیل می دهیم :

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	2	3	$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$	+	•	-	-	-	+
$(2x-1)(x-2)$	+	+	•	-	+	+
P	+	•	-	+	-	+

جواب تعریف نشده جواب تعریف نشده جواب

با توجه به جدول ملاحظه می کنیم که عبارت P برای $x \in [-1, \frac{1}{2}) \cup (2, 3]$ دارای علامت

منفی یا صفر است، در نتیجه داریم :

$$\text{مجموعه جواب} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < \frac{1}{2} \text{ یا } 2 < x \leq 3 \right\}$$

مثال ۲: نامعادله $\frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 3x + 2} < 1$ را حل کنید.

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{x^2 + x - 2 - x^2 + 3x - 2}{x^2 - 3x + 2} < 0 \Rightarrow \frac{4x - 4}{x^2 - 3x + 2} < 0$$

عبارت $P = \frac{4x - 4}{x^2 - 3x + 2}$ را تعیین علامت می کنیم، برای این منظور جواب های صورت و

مخرج کسر را در صورت وجود پیدا می کنیم :

$$4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = 2$$

جدول تعیین علامت عبارت P را تشکیل می دهیم :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$4x - 4$	-	•	+	+
$x^2 - 3x + 2$	+	•	-	+
P	-	•	-	+

جواب تعریف نشده جواب تعریف نشده جواب

باید توجه داشت که در عبارت P به ازای $x=1$ مخرج کسر صفر می شود که در این حالت کسر تعریف نشده است. با توجه به جدول ملاحظه می کنیم که عبارت P برای $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2)$ دارای علامت منفی است، در نتیجه داریم:

$$\{x \in \mathbb{R} | x < 1 \text{ یا } 1 < x < 2\} = \text{مجموعه جواب}$$

تمرین: هریک از نامعادله های زیر را حل کنید.

$$۱) 1 - \frac{1}{x} < x + 1$$

$$۲) \frac{6 - x^2}{x} > 1$$

$$۳) \frac{2x-1}{x} > 1$$

$$۴) \frac{x^2-2}{x} < 1$$

$$۵) \frac{x+1}{x} - \frac{x}{x-1} \leq 2$$

$$۶) \left| \frac{1-x}{2x-5} \right| > 1$$

$$۷) \frac{1}{2x^2+x+1} \geq \frac{1}{x^2+1}$$

$$۸) 2x-3 - \frac{1}{x-5} < x-4 - \frac{1}{x-5}$$

به ازای چه مقادیری از x عبارت های جبری زیر قابل محاسبه اند؟

$$۹) \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$۱۰) \sqrt[4]{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}}$$

$$۱۱) \sqrt{\frac{2x^2+x-6}{3x^2-7x-6}} - 5x\sqrt{16-x^2}$$

۱۲- وقتی یک نوع کالای مرغوب و جدید به بازار می آید، فروش هفتگی آن کالا به طور معمول برای یک دوره زمانی افزایش و سپس کاهش می یابد. فرض کنید بازار فروش S هزار واحد کالا، t هفته بعد از معرفی، از رابطه زیر به دست آید:

$$S = \frac{200t}{t^2 + 100}$$

چه موقع فروش هفتگی کالا ۸ هزار واحد یا بیشتر در هر هفته است؟

محاسبه نسبت های مثلثاتی (α β)

در ریاضی ۲ با نسبت ها و توابع مثلثاتی آشنا شدیم و منحنی نمایش تغییرات بعضی از توابع

مثلثاتی را رسم کردیم. دیدیم اگر α یک زاویه دلخواه باشد، آن گاه :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ و } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ و } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

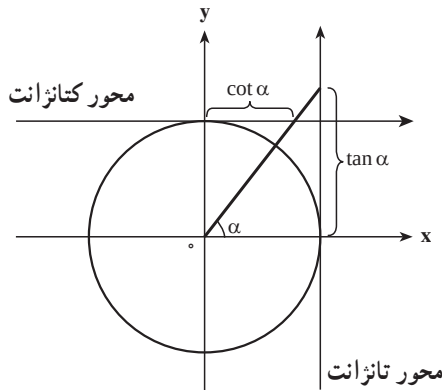
یکی دیگر از نسبت های مهم مثلثاتی، کتانژانت است که به صورت زیر تعریف می شود :

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}$$

از این تعریف می توان نتیجه گرفت که در زاویه هایی که مقدار تانژانت ناصفر است، مقدار کتانژانت قابل تعریف است، از طرفی داریم :

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \Rightarrow \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

از رابطه اخیر نتیجه می شود که تانژانت و کتانژانت قابل تعریف برای یک زاویه، همواره هر دو هم علامت می باشند، در نتیجه علامت کتانژانت در دایره مثلثاتی مانند علامت تانژانت است.



مثال ۱:

$$\text{الف) } \cot 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ب) } \cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

مثال ۲: اگر $\sin^2 \alpha \cot \alpha < 0$ در این صورت انتهای کمان α در کدام ناحیه دایره مثلثاتی

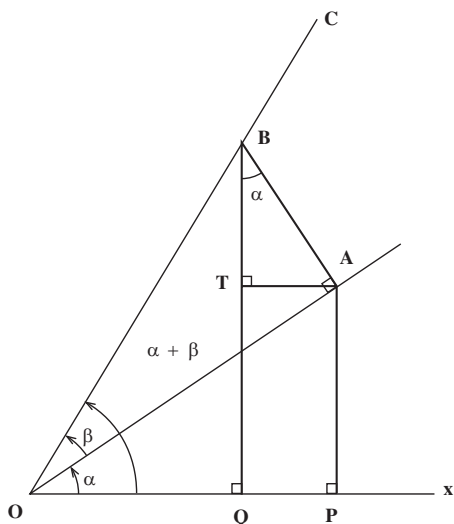
واقع است؟

حل: با توجه به تعریف کتانژانت داریم :

$$\sin^2 \alpha \cot \alpha < 0 \Rightarrow \sin^2 \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} < 0 \Rightarrow \sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$$

برای این که نابرابری اخیر برقرار باشد، باید $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ دارای علامت‌های متفاوت باشند، در نتیجه انتهای کمان α ، در ربع دوم $(\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0)$ یا در ربع چهارم $(\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0)$ واقع است.

محاسبه برخی نسبت‌های مثلثاتی $(\alpha \pm \beta)$ بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α و β



فرض کنید نیم خط OA با محور OX زاویه α و با زاویه β بسازد. از A بر OA عمودی خارج می‌کنیم تا OC را در نقطه B قطع کند. از A عمود AP و از B عمود BQ را بر OX رسم می‌کنیم و نیز از A عمود AT را بر BQ فرود می‌آوریم. زاویه ABT برابر α است و داریم:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \frac{\overline{BQ}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BT} + \overline{TQ}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BT} + \overline{AP}}{\overline{OB}} \\ &= \frac{\overline{BA} \cos \alpha}{\overline{OB}} - \frac{\overline{OA} \sin \alpha}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{OB}} \cos \alpha - \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \sin \alpha \\ &= \sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} \quad (1)$$

با قرار دادن $\alpha \pm \beta$ نتیجه زیر نیز به دست می‌آید:

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha} \quad (2)$$

به طریق مشابه ثابت می‌شود که:

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \quad (3)$$

با قرار دادن $\alpha \neq \beta$ نتیجه زیر نیز حاصل می‌شود :

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \quad (4)$$

اگر در رابطه (4) به جای $\sin^2 \alpha$ قرار دهیم $1 - \cos^2 \alpha$ ؛ خواهیم داشت :

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

در نتیجه :

$$\cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha + 1 \quad (5)$$

و اگر در رابطه (4) به جای $\cos^2 \alpha$ قرار دهیم $1 - \sin^2 \alpha$ ؛ خواهیم داشت :

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 1 + \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 1 + 2 \sin^2 \alpha$$

در نتیجه :

$$\cos^2 \alpha - 1 + 2 \sin^2 \alpha \quad (6)$$

مثال ۱: عبارت مثلثاتی $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}$ را ساده کنید.

حل:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + (2 \cos^2 \alpha - 1)} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

چنانچه در رابطه‌های (۱) و (۳) $-\beta$ را جایگزین β کنیم، فرمول‌های زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

با فرض این که $\cos(\alpha - \beta) \neq 0$ ، از تعریف تانژانت داریم :

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}$$

چنانچه $\cos \alpha \cos \beta \neq 0$ ، با تقسیم صورت و مخرج کسر سمت راست بر $\cos \alpha \cos \beta$ خواهیم داشت :

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

بنابراین :

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

با قرار دادن $\alpha \pm \beta$ نتیجه زیر به دست می آید :

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

مثال ۲:

الف) $\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ)$

$$\begin{aligned} &= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

ب) $\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ)$

$$\begin{aligned} &= \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

ج) $\tan 75^\circ = \tan(30^\circ + 45^\circ)$

$$\begin{aligned} &= \frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

د) $\cot 75^\circ = \frac{1}{\tan 75^\circ} = \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 3}$

هـ) $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ)$

$$\begin{aligned} &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

مثال ۳: درستی تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin(x - \frac{\pi}{6}) + \cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0$

حل:

$$\begin{aligned}\text{طرف چپ تساوی} &= (\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6}) + (\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3}) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 0\end{aligned}$$

$$\text{ب) } \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$$

حل:

$$\begin{aligned}\text{طرف چپ تساوی} &= \sin a \cos b + \cos a \sin b + \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ &= \sin a \cos b + \sin a \cos b = 2 \sin a \cos b\end{aligned}$$

$$\text{ج) } \cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$$

حل:

$$\begin{aligned}\cos^4 x - \sin^4 x &= (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= (\cos 2x) \times 1 = \cos 2x\end{aligned}$$

مثال ۴: فرض کنید $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ و $\tan \beta = \frac{3}{4}$ در زاویه‌های α و β حاده باشند، عبارت‌های

زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \sin(\alpha + \beta) \quad \text{ب) } \cos 2\beta \quad \text{ج) } \tan 2\alpha$$

حل: الف) برای محاسبه $\sin(\alpha + \beta)$ نیاز به نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس برای زاویه‌های حاده α و β داریم:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{12}{13}$$

چون α زاویه‌ای حاده است، پس انتهای کمان α در ربع اول دایره مثلثاتی است، پس $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ در نتیجه $\cos \alpha = \frac{12}{13}$.

$$\frac{1}{\cos^2 \beta} = 1 + \tan^2 \beta = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 \beta = \frac{16}{25} \xRightarrow{\beta \text{ حاده}} \cos \beta = \frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{9}{25} \xRightarrow{\beta \text{ حاده}} \sin \beta = \frac{3}{5}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} + \frac{12}{13} \times \frac{3}{5} = \frac{56}{65}$$

$$\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25} \quad (\text{ب})$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad (\text{ج})$$

از آن جا که $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ و $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ ، خواهیم داشت :

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{12}$$

در نتیجه :

$$\tan^2 \alpha = \frac{2 \times \frac{5}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{\frac{10}{12}}{\frac{119}{144}} = \frac{120}{119}$$

تمرین

۱- نسبت های مثلثاتی زوایای 15° و $22/5^\circ$ را محاسبه کنید.

۲- فرض کنید $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ و $\tan \beta = \frac{5}{12}$ و α و β حاده باشند، عبارت های زیر را محاسبه کنید.

$$\sin(\alpha - \beta), \cos(\alpha - \beta), \tan(\alpha - \beta)$$

۳- فرض کنید $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ و $\sin \beta = \frac{15}{17}$ و α حاده و β منفرجه باشد، عبارت های زیر را محاسبه کنید.

$$\sin(\alpha - \beta), \cos(\alpha - \beta), \cot(\alpha - \beta)$$

$$\sin^2 \alpha, \cos^2 \alpha, \tan^2 \beta$$

۴- عبارت های زیر را ساده کنید.

$$\sin(x + \frac{\pi}{3}), \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}), \tan(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})$$

۵- درستی برابری های زیر را ثابت کنید.

$$\text{الف) } \sin(\frac{3\pi}{4} - x) = -\cos x$$

$$\text{ب) } \cos(\frac{\pi}{4} + \theta) = -\sin \theta$$

$$\text{ج) } \cos(\alpha \pm \beta) - \cos(\alpha \mp \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\text{د) } \sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x = \sin x$$

$$\text{هـ) } \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{و) } \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

$$\text{ز) } 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{ح) } \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{ط) } \frac{2}{\tan \alpha + \cot \alpha} = \sin 2\alpha$$

$$\text{ی) } \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}$$

$$\text{ک) } \cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} = 2 \cot x$$

تابع

تاریخچه تابع

برای نخستین بار مفهوم تابع با عنوان «مقدار متغیر» در قرن هفدهم میلادی در کارهای رنه دکارت (۱۶۵۰-۱۶۵۹م) ریاضیدان فرانسوی و در نوشته‌های هندسی پدید آمد. دکارت در کتاب هندسه خود مفهوم تابع را به عنوان «تغییر عرض در نتیجه تغییر طول» بررسی می‌کند. در قرن هجدهم یوهان برنولی (۱۶۶۷-۱۷۴۸) دیدگاه جدید و به اصطلاح تحلیلی را نسبت به تابع مطرح می‌کند، او می‌گوید:

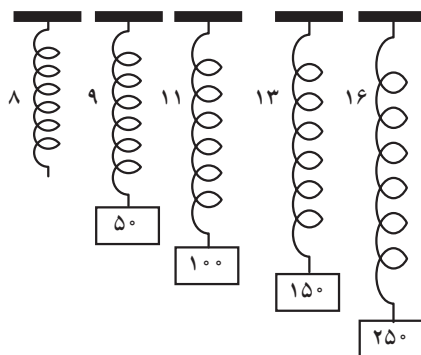
«تابع به عنوان دستوری است که مقدار یک متغیر را با مقدار متغیر دیگر در نظر می‌گیرد.»

در سال ۱۷۴۸ لئونارد اولر (۱۷۸۳-۱۷۰۷م) شاگرد یوهان برنولی نماد f را برای تابع در نظر گرفت و آن را از دیدگاه تحلیلی به این صورت مطرح می‌کند:

«تابع یک متغیر، عبارت است از یک عبارت تحلیلی که به نحوی از این مقدار متغیر و از عددها یا مقدارهای ثابت تشکیل شده است.» بالاخره، پس از طی دو قرن یوهان پیتر گوستاو لوژن دیریکله (۱۸۵۹-۱۸۰۵م) ریاضی دان آلمانی در اواسط قرن نوزدهم، تعریف امروزی تابع را به صورتی روشن بیان می کند :

« y تابعی از متغیر x در بازه $a \leq x \leq b$ است، به شرطی که برای هر مقدار x از این بازه، مقدار مشخص و منحصر به فردی مانند y متناظر با آن وجود داشته باشد.»

همان طور که می دانید تابع عملی است که روی عناصر یک مجموعه عمل می کند و عنصری در یک مجموعه را نظیر می سازد. به عنوان مثال (۱) به شکل و جدول زیر توجه کنید.



وزن (P)	۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۵۰
طول (l)	۸	۹	۱۱	۱۳	۱۶

این جدول اندازه طول یک فنر را، که تابعی است از مقدار وزنی که به آن آویخته شده است، نشان می دهد (وزن بر حسب گرم و طول بر حسب سانتی متر). وزن را با p و طول را با l مشخص می کنیم. مثلاً اگر $p = ۱۰۰$ گرم باشد $l = ۱۱$ سانتی متر است. به طوری که دیده می شود به هر p تنها یک l وابسته می گردد. بدین ترتیب جدول بالا رابطه میان دو کمیت p و l را به صورت یک عمل نظیر سازی که به اعداد سطر بالا اعداد سطر پایین نظیر می شوند، نشان می دهد.

مجموعه عناصری که یک تابع روی آن ها عمل می کند، دامنه تابع نام دارد. در این مثال دامنه تابع بازه $[۰, M]$ است که M حداکثر وزنی است که می توان به آن فنر آویزان نمود تا فنر پاره نشود.

مثال ۲: تابع $f(x) = ۳x - ۱$ را با دامنه $\left\{-۱, -\frac{۱}{۳}, ۰, \frac{۱}{۳}, ۱, ۲\right\}$ در نظر بگیرید. توجه کنید که

در ارائه هر تابعی، دامنه آن نیز باید ارائه شود. می‌خواهیم f را به وسیله جدول و هم چنین به صورت مجموعه زوج‌های مرتب نمایش دهیم.

حل: مقادیر $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(-1) = 3(-1) - 1 = -3 - 1 = -4$$

$$f(-\frac{1}{3}) = 3(-\frac{1}{3}) - 1 = -1 - 1 = -2$$

$$f(0) = 3(0) - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$f(\frac{1}{3}) = 3(\frac{1}{3}) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$f(1) = 3(1) - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$f(2) = 3(2) - 1 = 6 - 1 = 5$$

جدول زیر مقادیر $f(x)$ متناظر با مقادیر x را نشان می‌دهد:

x	-1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	2
$y = f(x)$	-4	-2	-1	0	2	5

اکنون برای مشخص کردن تابع به صورت زوج‌های مرتب، مجموعه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$f = \{(x, f(x)) | x \in D_f\}$$

$$f = \{(-1, -4) \text{ و } (-\frac{1}{3}, -2) \text{ و } (0, -1) \text{ و } (\frac{1}{3}, 0) \text{ و } (1, 2) \text{ و } (2, 5)\}$$

مثال ۳: تابع $f(x) = 2x + 3$ را با دامنه $\{-2, -1, 0, 1\}$ در نظر می‌گیریم. f را به وسیله زوج‌های

مرتب و نمودار نمایش دهید.

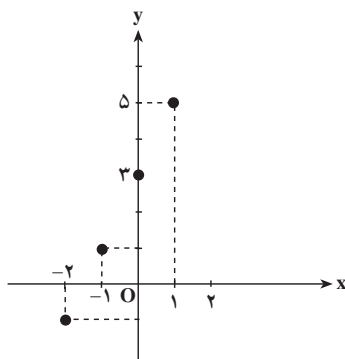
حل: داریم:

$$f(-2) = -4 + 3 = -1$$

$$f(-1) = -2 + 3 = 1$$

$$f(0) = 0 + 3 = 3$$

$$f(1) = 2 + 3 = 5$$



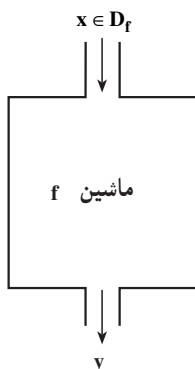
$$f = \{(-2, -1) \text{ و } (-1, 1) \text{ و } (0, 3) \text{ و } (1, 5)\}$$

به طوری که در مثال‌های قبل دیده می‌شود، $f(x)$ علاوه بر این که مقدار تابع f را معین می‌کند، قانون این تابع را نیز مشخص می‌نماید و به هر عضو از دامنه تابع تنها یک عضو از بُرد را نسبت می‌دهد. اگر تابع f به عضوی از دامنه، مانند x ؛ عنصر y از بُرد تابع را نسبت دهد، می‌نویسیم:

$$y = f(x)$$

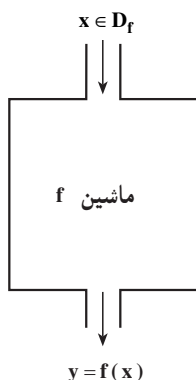
در این کتاب، دامنه و برد تابع‌هایی که با آن‌ها سروکار داریم مجموعه اعداد حقیقی یا بخشی از اعداد حقیقی است. تابع f را که دامنه و بردش اعداد حقیقی باشد یعنی $D_f \subseteq \mathbb{R}$ و $R_f \subseteq \mathbb{R}$ تابع حقیقی با مقادیر حقیقی می‌نامند. اگر دامنه یک تابع مانند f مجموعه A و مقادیر تابع اعداد حقیقی باشند می‌نویسیم:

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$



تابع به عنوان ماشین

در ابتدای این بخش، تاریخ پیدایش و تکمیل مفهوم و تعریف امروزی تابع بیان شد، با کمی دقت در آن، مشخص می‌شود که تصور ذهنی مشترک همه ریاضیدان‌ها از تعریف تابع این است که تابع مانند یک ماشین عمل می‌کند، به طوری که x از دامنه تابع را در ورودی ماشین می‌گیرد و تنها یک مقدار y را در خروجی ظاهر می‌کند، پس می‌توان مدل مقابل را برای تابع در نظر گرفت:



چون ماشین f روی x عملی را انجام می‌دهد، می‌توان حاصل آن عمل روی x را با $f(x)$ نمایش داد، بنابراین در خروجی ماشین می‌توان به جای y از $f(x)$ استفاده کرد.

مقادیر x که متعلق به دامنه تابع هستند، از طریق ورودی به ماشین راه پیدا می‌کنند، سپس درون ماشین f طبق دستور یا قاعده‌ای که از قبل مشخص شده است، مقدار منحصر به فرد $y = f(x)$ ساخته می‌شود.

باید توجه داشت که معمولاً از x برای نشان دادن متغیر، از f برای نشان دادن تابع و از y یا $f(x)$ برای نشان دادن مقدار تابع استفاده می‌کنیم.

اکنون می‌توان مثال صفحه ۳۹ را که درباره طول فنر و وزنه آویخته شده به آن است را با توجه

به آنچه که دیدیم، با نمادهای :

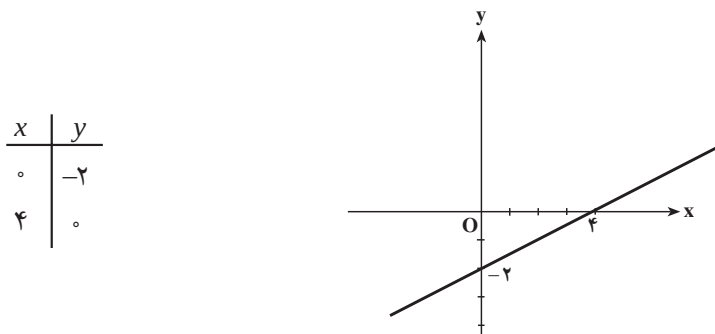
$$\begin{cases} f: D_f \rightarrow \mathbb{R} \\ p \mapsto f(p) \quad \text{یا} \quad f = \{(p, f(p)) | p \in D_f\} \end{cases}$$

نیز نشان داد. بنابراین تابع f را به وسیله جدول، نمودار یا یکی از شکل‌های بالا می‌توان نمایش داد. آشکار است که تعریف f به هر صورت که باشد به هر p تنها یک l وابسته می‌کند. مثلاً همه نمادهایی که برای تعریف تابع به کار برده‌ایم به $p=15^\circ$ تنها مقدار $l=13$ را نسبت می‌دهند.

از آنجا که تابع $f: x \mapsto y$ و مجموعه زوج‌های مرتب که f را مشخص می‌کند، و مقدار تابع یعنی $f(x)$ و معادله $y = f(x)$ ، همگی به‌طور یکسان بستگی میان x و y را معین می‌کنند، پس از این، متناسب با موقعیت، ما از $f(x)$ و $y = f(x)$ نیز به‌عنوان تابع نام می‌گیریم^۱. اما گاهی بیان یک تابع به‌صورت یک قانون $f(x)$ مشکل و یا عملاً غیرممکن است، که در این صورت برای تجسم تابع از جدول و نمودار استفاده می‌شود.

مثال ۴: تابع حقیقی $\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{3}x - 2 \end{cases}$ را با دامنه $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم. داریم و $f(0) = -2$ و

$f(4) = 0$ و نمودار آن خط گذرنده بر دو نقطه $(0, -2)$ و $(4, 0)$ است.



نکته: هر نقطه که مختصاتش در معادله $y = f(x)$ صدق کند بر نمودار تابع f قرار دارد؛ و برعکس، اگر نقطه‌ای بر نمودار تابع f واقع باشد مختصاتش در معادله بالا صدق خواهد کرد. البته اگر دامنه تابع را یک بازه، مثلاً $[0, 4]$ در نظر بگیریم، نمودار تابع فقط پاره‌خطی خواهد بود که بین دو نقطه $(0, -2)$ و $(4, 0)$ رسم می‌شود.

۱- تعریف تابع به وسیله مجموعه زوج‌های مرتب و با استفاده از مفاهیم مجموعه‌ها روشن‌تر و دقیق‌تر و از نظر صوری نیز جالب است. اما چنین تعریفی نه صورت شهودی دارد و نه از توصیفی برخوردار است، و به‌کاربردن آن در بسیاری از موارد غیرعملی است.

مثال ۵: تابع $f(x) = 2x + 1$ با دامنه $[-1, 1]$ داده شده است. کدام یک از نقاط زیر متعلق به نمودار آن می‌باشند؟

$$A(2, 5) \text{ و } B(0, 1) \text{ و } C(-\frac{1}{2}, 0) \text{ و } D(-1, -1) \text{ و } E(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

حل: داریم:

$$A(2, 5): 2 \notin D_f \quad : \quad A \notin (f) \text{ (نمودار)}$$

$$B(0, 1): f(0) = 2(0) + 1 = 1 \quad : \quad B \in (f) \text{ (نمودار)}$$

$$C(-\frac{1}{2}, 0): f(-\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2}) + 1 = 0 \quad : \quad C \in (f) \text{ (نمودار)}$$

$$D(-1, -1): f(-1) = 2(-1) + 1 = -1 \quad : \quad D \in (f) \text{ (نمودار)}$$

$$E(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}): f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2}) + 1 = 2 \quad : \quad E \notin (f) \text{ (نمودار)}$$

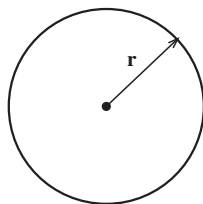
مثال ۶: تابع خطی $f(x) = ax + b$ با دامنه $\mathbb{R}$ را به گونه‌ای مشخص نمایید که $f(1) = 3$ و $f(-1) = 1$.

حل: داریم:

$$\begin{aligned} f(1) &= a(1) + b = a + b \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ -a + b = 1 \end{cases} \\ f(-1) &= a(-1) + b = -a + b \Rightarrow \\ \hline 2b &= 4 \Rightarrow b = 2, a = 1 \\ f(x) &= x + 2 \end{aligned}$$

مثال ۷: مساحت (A) دایره‌ای به شعاع r (شکل ۱) از دستور زیر به دست می‌آید:

$$A = \pi r^2 \quad (\pi \simeq 3/1416)$$



شکل ۱

به‌طور معمول این فرمول را با نماد تابعی به صورت $A(r) = \pi r^2$ می‌نویسیم تا مشخص شود، مساحت دایره A، وابسته به شعاع دایره r است. هرچه شعاع بزرگتر شود، مساحت بزرگتر می‌شود. دامنه این تابع بازه $(0, +\infty)$ است.

مثال ۸: اگر یک سنگ ریزه از بالای برجی به طرف پایین رها شود و شتاب جاذبه زمین $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ باشد، در این صورت فاصله پیموده شده d از موقع رها شدن پس از t ثانیه، از رابطه زیر به دست می آید:

$$d(t) = 4.9t^2$$

همان طور که ملاحظه می کنید فاصله پیموده شده d تابعی از t است. دامنه این تابع بازه $[0, t_1]$ است که t_1 زمان رسیدن سنگ ریزه به زمین است.

مثال ۹: انرژی پایه در بدن به مقدار انرژی گفته می شود که برای تأمین سوخت دستگاه های غیرارادی درون بدن مانند قلب، ریه، کلیه، دستگاه گوارش، دستگاه تنفس، غدد درون ریز و مانند این استفاده می شود.

به طور معمول $\frac{2}{3}$ از انرژی دریافتی بدن از غذاها، صرف تأمین فعالیت های پایه و $\frac{1}{3}$ دیگر برای تأمین سوخت فعالیت های فیزیکی روزانه است. برای مثال، مقدار کالری لازم برای یک کارمند در یک شبانه روز از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$3^\circ \times \text{وزن بدن برحسب کیلوگرم} = \text{مقدار انرژی لازم برای بدن}$$

چنانچه وزن کارمندی 80 کیلوگرم باشد، برای تأمین انرژی موردنیاز خود به $2400 = 80 \times 30$ کالری در یک شبانه روز احتیاج دارد. بنابراین اگر این شخص روزانه بیش از 2400 کالری دریافت کند، آن گاه دچار اضافه وزن شده و اگر کمتر از 2400 کالری دریافت کند، سبب کاهش وزن می شود. ولی اگر همان 2400 کالری را دریافت کند وزن او ثابت باقی می ماند. با توجه به فرمول مقدار انرژی لازم برای بدن، ملاحظه می کنیم که مقدار این انرژی تابعی از وزن انسان است. هرچه وزن بیشتر باشد، مقدار انرژی مصرفی لازم برای بدن بیشتر و هرچه وزن کمتر باشد، مقدار انرژی مصرفی لازم برای بدن نیز کمتر می شود، دامنه این تابع بازه $[x_1, x_2]$ است که x_1 کمترین وزن انسان ها و x_2 بیشترین وزن انسان ها است.

مثال ۱۰: یکی از روش های مرسوم سنجش وزن ایده آل افراد، استفاده از شاخص توده بدنی یا BMI^1 است که از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$BMI = \frac{\text{وزن برحسب کیلوگرم}}{\text{مجدور طول قد برحسب متر}}$$

^۱ – Body Mass Index

پس از محاسبه BMI یکی از حالت‌های زیر برای هر فرد اتفاق می‌کند.

شخص لاغر است و کمبود وزن دارد $\Rightarrow BMI < 19$

شخص وزن طبیعی دارد و در محدوده سلامت وزنی است $\Rightarrow 19 \leq BMI < 25$

شخص اضافه وزن دارد $\Rightarrow 25 \leq BMI < 30$

شخص چاق و وضعیت بحرانی دارد. $\Rightarrow BMI \geq 30$

با این روش، وضعیت وزنی هر فردی مشخص می‌شود و افرادی که اضافه وزن دارند، با یک رژیم مناسب می‌توانند به محدوده سلامت وزنی برسند. اما وزن ایده‌آل چیست؟ در پاسخ به این سؤال باید بگوییم که وزن ایده‌آل با سن شما رابطه مستقیم دارد، زیرا با افزایش سن به طور طبیعی میزان چربی ذخیره‌ای بدن بالا می‌رود و BMI افزایش می‌یابد. به همین جهت متخصصان علوم تغذیه به کمک جدول سن، BMI مناسب گروه سنی افراد مختلف را به صورت زیر تعیین می‌کنند.

BMI	گروه سنی
۲۲	۱۹-۲۴
۲۳	۲۵-۳۴
۲۴	۳۵-۴۴
۲۵	۴۵-۵۴
۲۶	۵۵-۶۴
۲۷	۶۵ به بالا

پس از یافتن BMI مناسب با گروه سنی هر فرد، وزن ایده‌آل طبق فرمول زیر محاسبه می‌شود:

مجدور قد برحسب متر $\times BMI =$ وزن ایده‌آل برحسب کیلوگرم

اکنون که وزن ایده‌آل خود را دانستید، معلوم می‌شود که چه قدر اضافه وزن یا چه قدر کمبود

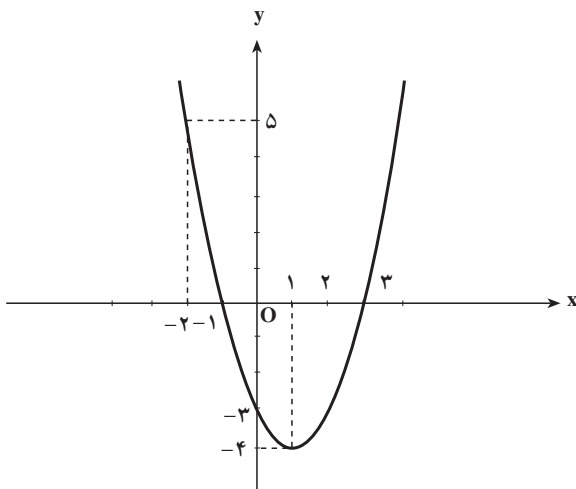
وزن دارید.

با دقت در فرمول وزن ایده‌آل درمی‌یابیم که وزن ایده‌آل تابعی از طول قد هر فرد است، هم چنین چون وزن ایده‌آل از حاصل ضرب BMI در مجدور قد برحسب متر به دست می‌آید، مشخص می‌شود که وزن ایده‌آل تابعی از BMI و در نتیجه گروه سنی هر فرد می‌شود. در این فرمول طول قد و BMI متغیرهایی مستقل و وزن ایده‌آل متغیری وابسته به آن‌ها است.

در سال گذشته با تابع خطی که ضابطه آن به صورت $y = ax + b$ است آشنا شدید، همچنین رسم نمودار برخی از توابع درجه دوم را به کمک انتقال تابع با ضابطه $f(x) = x^2$ مطالعه کردید. به نمودار تابع درجه دوم با ضابطه $y = ax^2 + bx + c$ سهمی می‌گوییم. در زیر رسم نمودار یک تابع درجه دوم را به کمک نقطه‌یابی مشاهده می‌کنید.

مثال ۱۱: نمودار تابع $\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$ را رسم کنید.

حل: می‌دانیم که نمودار تابع بالا یک سهمی است. با توجه به آن که $f(x) = (x-1)^2 - 4$ با انتقال سهمی $y = x^2$ به اندازه یک واحد به راست و ۴ واحد به پایین، نمودار این تابع رسم می‌شود.



معادله کلی سهمی به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ است.

مثال ۱۲: معادله یک سهمی را بیابید که از نقاط $(0, -1)$ ، $(1, 0)$ ، $(2, 3)$ بگذرد.

حل: داریم:

$$f(0) = 0 + 0 + c \Rightarrow -1 = c$$

$$f(1) = a(1)^2 + b(1) + c \Rightarrow 0 = a + b - 1 \Rightarrow a + b = 1$$

$$f(2) = a(2)^2 + b(2) + c \Rightarrow 3 = 4a + 2b - 1 \Rightarrow 4a + 2b = 4$$

پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 0$$

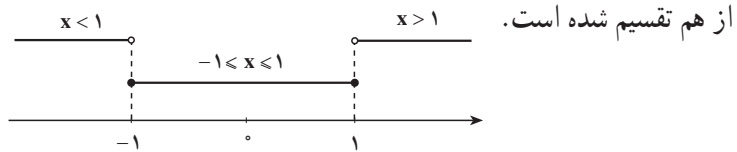
که از آن نتیجه می‌شود :

$$f(x) = x^2 - 1$$

تابع چندضابطه‌ای

هرگاه دامنهٔ یک تابع را به چند مجموعهٔ جدا از هم تقسیم کنیم، به طوری که اجتماع آن مجموعه‌ها برابر با دامنهٔ تابع باشد و روی هر مجموعه ضابطه‌ای متمایز تعریف کنیم، در این صورت یک تابع چندضابطه‌ای به دست می‌آید.

مثال ۱۳: دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر با $\mathbb{R}$ است. دامنه این تابع به صورت زیر، به سه مجموعهٔ جدا



روی هر مجموعه، ضابطه‌ای به صورت زیر تعریف شده است :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ -2x & x < -1 \end{cases}$$

در این حالت $f(x)$ را تابعی سه ضابطه‌ای می‌گوییم.

مثال ۱۴: نمودار تابع سه ضابطه‌ای مثال قبل را رسم کنید.

برای رسم نمودار این تابع باید نمودار هر ضابطه را در محدودهٔ اعتبارش رسم کنیم. به همین

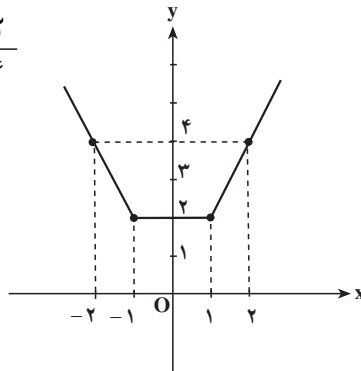
منظور، $f(x) = 2x$ را برای $x > 1$ ، $f(x) = 2$ را برای $-1 \leq x \leq 1$ و $f(x) = -2x$ را برای $x < -1$

رسم می‌کنیم :

$$f(x) = 2x ; \begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline y & 2 & 4 \end{array}$$

$$f(x) = 2 ; \begin{array}{c|cc} x & -1 & 1 \\ \hline y & 2 & 2 \end{array}$$

$$f(x) = -2x ; \begin{array}{c|cc} x & -1 & -2 \\ \hline y & 2 & 4 \end{array}$$



توجه: نمودار هر ضابطه از تابع را رسم کردیم و روی هر نمودار، قسمت‌هایی که در محدوده اعتبار آن ضابطه است را پررنگ کردیم. ملاحظه می‌کنیم که عرض هر نقطه روی نمودار این تابع سه ضابطه‌ای، همواره بزرگتر یا برابر با ۲ است.

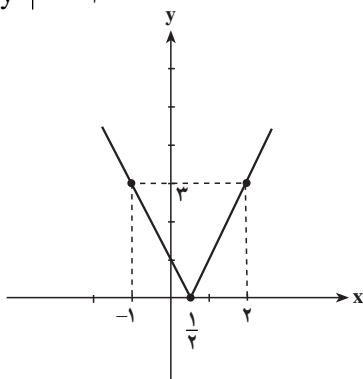
مثال ۱۵: نمودار تابع $f(x) = |2x - 1|$ را رسم کنید.

می‌دانیم که اگر $2x - 1 \geq 0$ آن‌گاه $f(x) = 2x - 1$ و در حالتی که $2x - 1 < 0$ خواهیم داشت: $f(x) = -(2x - 1)$ در نتیجه ابتدا این تابع را به صورت چند ضابطه می‌نویسیم، سپس آن را رسم می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & 2x - 1 \geq 0 \\ -2x + 1 & 2x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 1 & x \geq \frac{1}{2} \\ -2x + 1 & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = 2x - 1 \quad \begin{array}{c|c} x & \frac{1}{2} \quad 2 \\ \hline y & 0 \quad 3 \end{array} \quad (x \geq \frac{1}{2})$$

$$f(x) = -2x + 1 \quad \begin{array}{c|c} x & \frac{1}{2} \quad -1 \\ \hline y & 0 \quad 3 \end{array} \quad (x < \frac{1}{2})$$



مثال ۱۶: تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & x \geq 0 \\ 1 - 2x & x < 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

حاصل $f(x^2 + 1)$ ، $f(-\sqrt{2})$ و $f(-\frac{1}{4}x^2 - 1)$ را به دست آورید.

حل: چون همواره $x^2 + 1 > 0$ ، بنابراین از ضابطه اول برای محاسبه $f(x^2 + 1)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x^2 + 1) = -(x^2 + 1)^2 + 1 = -(x^4 + 2x^2 + 1) + 1 = -x^4 - 2x^2$$

چون $-\sqrt{2} < 0$ ، بنابراین برای محاسبه $f(-\sqrt{2})$ از ضابطه دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(-\sqrt{2}) = 1 - 2(-\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$$

چون $-\frac{1}{4}x^2 \leq 0$ ، بنابراین $-\frac{1}{4}x^2 - 1 < 0$. در نتیجه برای محاسبه $f(-\frac{1}{4}x^2 - 1)$ از ضابطه

دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(-\frac{1}{4}x^2 - 1) = 1 - 2(-\frac{1}{4}x^2 - 1) = 1 + x^2 + 2 = x^2 + 3$$

مثال ۱۷: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ x - 1 & x < 0 \end{cases}$ داده شده است.

الف - $f(-1)$ و $f(0)$ و $f(\frac{1}{4})$ و $f(1)$ و $f(2)$ را محاسبه نمایید.

ب - نمودار تابع را رسم کنید.

حل: داریم:

$$f(-1) = -1 - 1 = -2$$

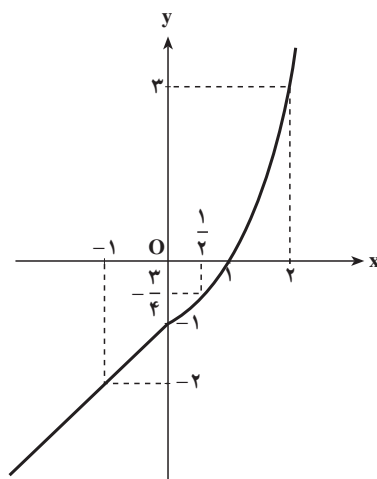
$$f(0) = (0)^2 - 1 = -1$$

$$f(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4})^2 - 1 = \frac{1}{16} - 1 = -\frac{15}{16}$$

$$f(1) = (1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$f(2) = (2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

x	...	-1	0	$\frac{1}{4}$	1	2
y		-2	-1	$-\frac{15}{16}$	0	3



نمودار تابع f با توجه به دامنه‌اش قسمتی از سهمی به معادله $y = x^2 - 1$ و قسمتی از خط به معادله $y = x - 1$ است.

تمرین

۱- اگر تابع $y = f(x) = \frac{3}{2x^2 + 1}$ با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، برابری‌های زیر را کامل کنید:

$$f(0) = \dots, \quad f(\sqrt{2}) = \dots, \quad f(\frac{1}{4}) = \dots, \quad f(2x) = \dots$$

۲- اگر تابع $f(x) = x^2 - 4$ با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، مقادیر زیر را حساب کنید.

$$f(3), f(5), f(f(3))$$

۳- تابع f به صورت
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} + x & x \geq 1 \\ f(x) = \sqrt{x} - x & x < 1 \end{cases}$$
 تعریف شده است. برابری‌های زیر را کامل کنید.

$$f(\sqrt{2}-1) = \dots, f(3-\sqrt{2}) = \dots, f(-\sqrt{2}) = \dots$$

$$f(0) = \dots, f(f(-1)) = \dots$$

۴- کدام یک از مجموعه‌های زیر یک تابع را مشخص می‌کند.

$$۱) \{(\sqrt{-1}, 4), (2, 3), (0, 1), (-1, 0)\}$$

$$۲) \{(-1, 2)\}$$

$$۳) \{(0, 0), (2, 1), (3, 2), (-1, 0), (2, -2)\}$$

$$۴) \{(1, 1), (2, 3), (-1, -1), (-2, 5)\}$$

۵- معادله خطی را مشخص کنید که محور x ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{3}{4}$ - قطع کند و از نقطه

$(1, 5)$ بگذرد.

۶- اگر تابع $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{0\}$ باشد مقادیر زیر را محاسبه نمایید :

$$f(1) \text{ و } f(-1) \text{ و } f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ و } f\left(\frac{-1}{x}\right) \text{ و } f(\sqrt{x})$$

۷- اگر $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ، $f(-\frac{1}{x})$ را به دست آورید و درستی تساوی $f(x) \times f(-\frac{1}{x}) = -1$ را

بررسی نمایید. $(x \neq \pm 1, 0)$

۸- اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، a و b و c را طوری بیابید که این سهمی محور y ها را در

نقطه‌ای به عرض ۳ و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کند و از نقطه $A(2, 3)$ نیز بگذرد.

$$۹- \text{تابع } f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & x < 0 \\ x + 4 & x \geq 0 \end{cases} \text{ را در نظر بگیرید.}$$

الف- $f(-2)$ و $f(-1)$ و $f(0)$ و $f(1)$ و $f(2)$ را محاسبه کنید و در یک جدول مرتب نمایید.

ب- نمودار تابع را رسم کنید.

۱۰- دو تابع $y = x^2 + ax - 3b$ و $y = -x + b$ با دامنه $\mathbb{R}$ داده شده‌اند، a و b را طوری

محاسبه کنید که نمودارهای این دو تابع روی محور x ها در نقطه‌ای به طول ۱ همدیگر را قطع کنند.
۱۱- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < 2 \\ x + 3 & x \geq 2 \end{cases} & \text{ب)} f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & x < 2 \\ 2x - 1 & x \geq 2 \end{cases} \\ \text{ج)} f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases} & \text{د)} f(x) = -3 \left| \frac{1}{3}x + 6 \right| \end{array}$$

روش محاسبه دامنهٔ تعریف ضابطه‌ها

در توابع حقیقی با مقادیر حقیقی گاهی اوقات دامنهٔ تابع داده نمی‌شود و فقط ضابطه تابع ارائه می‌شود. در این صورت طبق قرارداد دامنهٔ تابع مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی است که برای آن‌ها ضابطه تعریف شده باشد.

مثال ۱: تابع $f(x) = x^2 + 3$ داده شده است، دامنهٔ تابع را به دست آورید.

حل: تابع بالا چنان است که هر عدد حقیقی x را به توان ۲ می‌رساند و ۳ را به آن می‌افزاید و عدد معین $x^2 + 3$ را می‌دهد. مثلاً برای $x = 2$ ، $7 = 3 + (2)^2$ و برای $x = -3$ ، $12 = 3 + (-3)^2$ ، پس این تابع برای همهٔ اعداد حقیقی x تعریف شده است. بنابراین $D_f = \mathbb{R}$.

مثال ۲: تابع $f(x) = x^3 - 2x - 5$ داده شده است، دامنهٔ آن را معین کنید.

حل: چون برای هر عدد حقیقی x_0 ، $f(x_0) = x_0^3 - 2x_0 - 5 \in \mathbb{R}$

پس این تابع نیز برای همهٔ مقادیر x_0 ، متعلق به مجموعهٔ اعداد حقیقی، تعریف شده است یعنی: $D_f = \mathbb{R}$.

به طور کلی دامنهٔ تابع‌های چندجمله‌ای که به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ یا $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + 1$ ، $n \in \mathbb{W}$ نمایش داده می‌شود، مجموعهٔ اعداد حقیقی است. یعنی: $D_f = \mathbb{R}$ زیرا در چند جمله‌ای‌ها برای همهٔ مقادیر x متعلق به $\mathbb{R}$ ، $f(x)$ قابل محاسبه است.

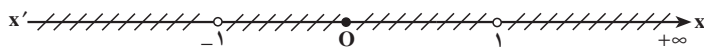
مثال ۳: دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$ را تعیین کنید.

حل: می‌دانیم که اگر $x^2 - 1$ صفر باشد کسر بالا تعریف نشده است و هرگاه $x^2 - 1$ ناصفر باشد $f(x)$ تعریف شده است. اما داریم:

$$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$$

پس این تابع برای همه اعداد حقیقی x جز $x=1$ و $x=-1$ تعریف شده است. بنابراین دامنه تابع به صورت زیر است:

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \quad \text{یا} \quad D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$



مثال ۴: دامنه تابع $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ را مشخص کنید.

حل: چون x^2+1 هیچ گاه صفر نمی شود پس کسر بالا برای همه مقادیر x تعریف شده است، بنابراین دامنه تابع $\mathbb{R}$ است.

به طور کلی در توابع کسری به صورت $y = f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله ای هستند (توابع کسری گویا) دامنه، مجموعه همه اعداد حقیقی به غیر از ریشه های $q(x)$ است یعنی:

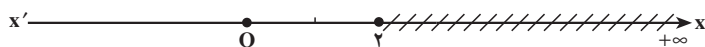
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$$

مثال ۵: دامنه تابع $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x-3}$ عبارت است از:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{3, -1\}$$

مثال ۶: تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ برای همه اعداد حقیقی x به طوری که $x-2 \geq 0$ تعریف شده است ولی برای $x-2 < 0$ تعریف نشده است. بنابراین داریم:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x-2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} = [2, +\infty)$$



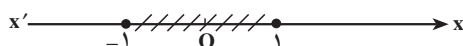
مثال ۷: تابع $f: x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ برای $1-x^2 \geq 0$ تعریف شده است. بنابراین:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1-x^2 \geq 0\}$$

که با توجه به جدول:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1-x^2$		$-$	$+$	$-$

$$D_f = [-1, 1]$$



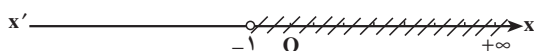
خواهیم داشت:

مثال ۸: تابع $g(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 1}$ برای همه اعداد حقیقی x تعریف شده است. زیرا فرجه رادیکال فرد است و عبارت زیر رادیکال چندجمله‌ای است، پس $D_g = \mathbb{R}$.

مثال ۹: تابع $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ برای مقادیری از x که $\sqrt{x+1}$ معین و مخالف با صفر باشد، تعریف شده است.

پس، از یک طرف مخرج کسر باید مخالف با صفر باشد، یعنی $x+1 \neq 0$ یا $x \neq -1$ ، و از طرف دیگر عبارت زیر رادیکال، با توجه به فرجه زوج آن، باید نامنفی باشد، یعنی $x+1 > 0$. بنابراین داریم:

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} \mid x+1 > 0\} = (-1, +\infty)$$



به طور کلی دامنه توابع گنگ به صورت $f(x) = \sqrt[k]{p(x)}$ و $g(x) = \sqrt[k+1]{p(x)}$ عبارت‌اند از:

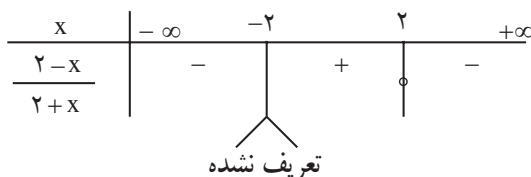
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_p, p(x) \geq 0\} \quad D_g = D_p$$

مثال ۱۰: دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$ عبارت است از:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2-x}{2+x} \geq 0 \text{ و } 2+x \neq 0\}$$

$$2-x=0 \Rightarrow x=2$$

$$2+x=0 \Rightarrow x=-2$$



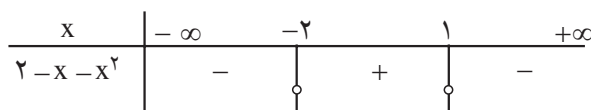
تعریف نشده

$$D_f = (-2, 2]$$

پس:

مثال ۱۱: دامنه تابع‌های $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$ و $g(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{x-1}}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$2-x-x^2 \geq 0 \Rightarrow (2+x)(1-x) \geq 0$$



پس:

$$D_f = [-2, 1]$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\}$$

و به همین ترتیب:

مثال ۱۲: دامنه تابع های $f(x) = \log_2(x-1)$ و $g(x) = \log \frac{x+1}{1-x}$ را به این صورت معین

می کنیم :

بنابر تعریف لگاریتم، دامنه تابع f مقادیری از x است که برای آن ها $x-1 > 0$ یا $x > 1$.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | x-1 > 0\} = (1, +\infty) \quad \text{پس:}$$

و دامنه تابع g مقادیری از x است که $\frac{x+1}{1-x} > 0$. بنابراین :

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} | \frac{x+1}{1-x} > 0 \text{ و } 1-x \neq 0\} = (-1, 1)$$

مثال ۱۳: دامنه توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ و $h(x) = \tan x$ و $p(x) = \cot x$ را

تعیین کنید.

حل: دامنه تابع های f و g مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است، زیرا برای هر عدد حقیقی x مقادیر

f و g معین است.

دامنه تابع h به صورت زیر است :

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi - \frac{\pi}{2}\}$$

زیرا داریم: $h(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و چون باید داشته باشیم $\cos x \neq 0$ پس $x \neq k\pi - \frac{\pi}{2}$ ، سرانجام

دامنه تابع p به صورت $D_p = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi\}$ است زیرا داریم: $p(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ و چون باید

$\sin x \neq 0$ باشد، پس $x \neq k\pi$.

مثال ۱۴: دامنه تابع $f(x) = \sin \sqrt{x}$ و $g(x) = \tan 2x$ به صورت زیر به دست می آید.

$$D_f = \{x | \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty)$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} | 2x \neq k\pi - \frac{\pi}{2}\} = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\}$$

تمرین

۱- دامنه هریک از توابع زیر را به دست آورده و آن ها را به صورت بازه نمایش دهید.

$$f(x) = 2x^2 - 3x \quad g(x) = x(x+2)(x-1) \quad h(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} \quad g(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2}} \quad h(x) = \frac{2x+5}{x^2 - 2x}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{\frac{2-x}{1-x}} & g(x) &= \sqrt[3]{\frac{2}{x+1}} & h(x) &= \frac{2x}{\sqrt[3]{x+1}} \\
 f(x) &= \log(x^2-1) & g(x) &= \log(4-x^2) & h(x) &= \log(2-x)^2 \\
 f(x) &= \sqrt{x^2+x-2} & g(x) &= \frac{|x|}{x} & h(x) &= \frac{x^2-9}{x-3} \\
 f(x) &= x\sqrt{x-3}
 \end{aligned}$$

۲- دامنهٔ توابع مثلثاتی زیر را به دست آورید :

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad g(x) = \cos \frac{1}{x}, \quad k(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

۳- دامنهٔ تابع های داده شده را به صورت بازه بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 2 \\ 3x, & x < 0 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} x, & -3 < x \leq 2 \\ 3x-4, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

عملیات روی توابع

۱- مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و خارج قسمت دو تابع حقیقی

توابع حقیقی $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = 2x$ و $h(x) = x^2 + 2x - 1$ را در نظر می گیریم.

مقادیر $f(-1)$ و $f(2)$ و $g(-1)$ و $g(2)$ و $h(-1)$ و $h(2)$ و $f(-1) + g(-1)$ و $f(2) + g(2)$ را محاسبه می کنیم و جدول زیر را تشکیل می دهیم.

x	-1	2
f(x)	$(-1)^2 - 1 = 0$	$(2)^2 - 1 = 3$
g(x)	$2(-1) = -2$	$2(2) = 4$
f(x) + g(x)	$0 - 2 = -2$	$3 + 4 = 7$
h(x)	$(-1)^2 + 2(-1) - 1 = -2$	$(2)^2 + 2(2) - 1 = 7$

به طوری که دیده می شود :

$$f(-1) = 0, g(-1) = -2, f(-1) + g(-1) = 0 + (-2) = -2, h(-1) = -2$$

$$f(2) = 3, g(2) = 4, f(2) + g(2) = 3 + 4 = 7, h(2) = 7$$

هم چنین دو تابع $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = \frac{1}{4}x - 1$ را در نظر گرفته سپس

$h(x) = f(x) + g(x)$ را محاسبه و جدول صفحهٔ بعد را کامل می کنیم :

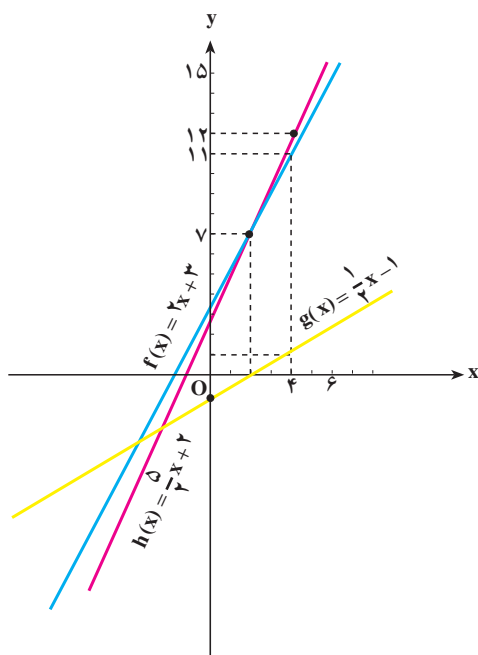
$$h(x) = 2x + 3 + \frac{1}{4}x - 1 = \frac{5}{4}x + 2 \quad \text{داریم :}$$

x	۲	۴	۶
f(x)	۴+۳=۷	۸+۳=۱۱	۱۲+۳=۱۵
g(x)	۱-۱=۰	۲-۱=۱	۳-۱=۲
f(x)+g(x)	۷+۰=۷	۱۱+۱=۱۲	۱۵+۲=۱۷
$h(x) = \frac{5}{2}x + 2$	۵+۲=۷	۱۰+۲=۱۲	۱۵+۲=۱۷

به طوری که دیده می شود: $f(2)=7$ و $g(2)=0$ و $f(2)+g(2)=7$ و $h(2)=7$ است. در جدول های قبل مشاهده می شود که مقادیر $f(x)+g(x)$ و $h(x)$ برای x های مورد نظر با یکدیگر برابرند. این مطلب ما را به تعریف تابع جدید $h = f + g$ ، که مجموع دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ می باشد، رهنمون می سازد یعنی:

$$y = h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

در شکل زیر نمودار تابع های f و g و h مثال بالا را رسم کرده ایم. ملاحظه می شود که برای همه x های مورد نظر اندازه های به دست آمده بر روی نمودار با اعداد به دست آمده در جدول سازگار است.



تمرین

مقدار هر یک از توابع $f(x)=x$ و $g(x)=x^2-1$ و $h(x)=x(x^2-1)$ را برای $x=-1$ و $x=0$ و $x=1$ محاسبه کنید و با تشکیل جدولی مقادیر به دست آمده برای $f(x) \times g(x)$ را با $h(x)$ مقایسه نمایید. آیا از روی آن می توانید تعریفی برای حاصل ضرب دو تابع نتیجه بگیرید؟

همان‌طور که دیده‌ایم، در توابع حقیقی مقدار تابع برای هر مقدار از دامنه، عددی حقیقی است. بنابراین همان‌گونه که در اعداد حقیقی، چهار عمل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم تعریف می‌شود برای توابع نیز می‌توان مجموعه، تفاضل، حاصل ضرب و خارج قسمت تعریف کرد.

تعریف: دو تابع حقیقی f و g را در نظر می‌گیریم و دامنه آن‌ها را یکسان می‌کنیم، یعنی دامنه آن‌ها را مجموعه $D = D_f \cap D_g$ قرار می‌دهیم. فرض کنید x متعلق به D باشد، در این صورت:

الف - مجموعه دو تابع f و g را با نماد $f + g$ نشان می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

ب - تفاضل دو تابع f و g را با نماد $f - g$ نشان می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

ج - حاصل ضرب دو تابع را با نماد $f.g$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f.g)(x) = f(x) \times g(x)$$

د - تقسیم دو تابع f و g را با نماد $\frac{f}{g}$ نشان می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$$

دامنه همه توابع تعریف شده در بالا $D_f \cap D_g$ است مگر در حالت (د) که باید جواب‌های $g(x) = 0$ را از دامنه مشترک حذف کرد.

مثال ۱: اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = x^2 - 1$ داریم:

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R} \quad \text{برای مجموعه، تفاضل و حاصل ضرب}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + x + x^2 - 1 = 2x^2 + x - 1$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 + x - x^2 + 1 = x + 1$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = (x^2 + x)(x^2 - 1) = x^4 + x^3 - x^2 - x$$

$$\text{و برای } \frac{f}{g}:$$

$$D = \mathbb{R} - \{x | g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{x | x^2 - 1 = 0\} = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \frac{x}{x - 1}$$

$$(f+g)(-2) = 2(-2)^2 + (-2) - 1 = 5 \quad \text{پس:}$$

$$(f-g)(-2) = -2 + 1 = -1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}$$

$$(f.g)(1) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

$\frac{f}{g}$ در $x=1$ تعریف نشده است. بنابراین $\left(\frac{f}{g}\right)(1)$ را نمی‌توان تشکیل داد.

مثال ۲: اگر $f(x) = 2x + 4$ و $g(x) = x^2 - 3$ ، برای جمع، تفریق و ضرب دو تابع داریم:

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R}, \quad D = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x + 4 + x^2 - 3 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 2x + 4 - x^2 + 3 = -x^2 + 2x + 7$$

$$(f.g)(x) = f(x)g(x) = (2x+4)(x^2-3) = 2x^3 - 6x + 4x^2 - 12$$

$$= 2x^3 + 4x^2 - 6x - 12$$

$$D = \mathbb{R} - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{x \mid x^2 - 3 = 0\} \quad \text{و برای تقسیم دو تابع:}$$

$$D = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\} \quad \text{پس:}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x+4}{x^2-3}$$

مثال ۳: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ باشد دامنه و قانون تابع‌های $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را چنین

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}, \quad D_g = \mathbb{R} - \{1\} \quad \text{حساب می‌کنیم:}$$

$$D_{f-g} = (\mathbb{R} - \{0\}) \cap (\mathbb{R} - \{1\}) = \mathbb{R} - \{0, 1\} \quad \text{داریم:}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1-x^2-x}{x(x-1)} = \frac{-x^2-1}{x(x-1)}$$

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \left\{x \mid g(x) = 0\right\} = D_f \cap D_g - \left\{x \mid \frac{x+1}{x-1} = 0\right\}$$

$$D_{f/g} = \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x} \div \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x(x+1)}$$

مثال ۴: اگر $P(x) = x+1$ و $h(x) = \sqrt{x-1}$ باشد داریم:

$$D_P = \mathbb{R}, \quad D_h = \{x \mid x-1 \geq 0\} = [1, +\infty)$$

$$D_{p.h} = \mathbb{R} \cap [1, +\infty) = [1, +\infty) \quad (p.h)(x) = (x+1)\sqrt{x-1}$$

$$D_{p/h} = [1, +\infty) - \{x \mid \sqrt{x-1} = 0\} = (1, +\infty)$$

$$\left(\frac{P}{h}\right)(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$$

مثال ۵: در صورتی که $f(x) = 3x-1$ و $g(x) = \frac{x+1}{3x-1}$ داریم:

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\} \Rightarrow D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) = 3x-1 \pm \frac{x+1}{3x-1} = \begin{cases} \frac{9x^2 - 5x + 2}{3x-1} = (f+g)(x) \\ \frac{9x^2 - 7x}{3x-1} = (f-g)(x) \end{cases}$$

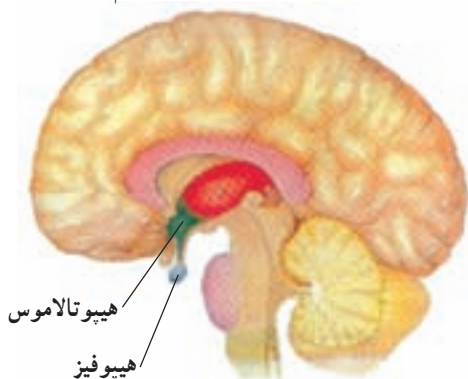
$$(f.g)(x) = (3x-1)\left(\frac{x+1}{3x-1}\right) = x+1$$

$$D_{f/g} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\} - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}, -1\right\}$$

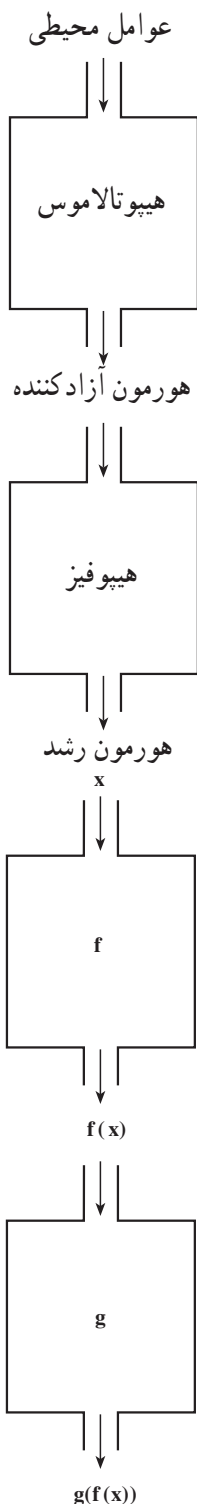
$$\left(\frac{f}{g}\right).(x) = (3x-1) \div \left(\frac{x+1}{3x-1}\right) = \frac{(3x-1)^2}{x+1}$$

۲- ترکیب دو تابع حقیقی

هیپوتالاموس بخشی از مغز است که تنظیم محیط درون بدن را انجام می‌دهد. اگر گرسنه یا تشنه می‌شویم یا دمای بدنمان افزایش یا کاهش می‌یابد، همگی با فرماندهی هیپوتالاموس انجام می‌شود،



برای مثال هیپوتالاموس با تأثیر از عوامل محیطی و شرایط درون بدن، ملکولی به نام «هورمون آزادکننده هورمون رشد» را به درون خون ترشح می‌کند. پس از رسیدن این ملکول به غده هیپوفیز که بر سطح زیرین مغز چسبیده است، غده هیپوفیز به آزادسازی هورمون رشد در خون می‌پردازد. هورمون رشد از راه خون به بافت استخوان می‌رسد و بر سلول‌های آن اثر می‌گذارد و باعث رشد استخوان می‌شود.



بنابراین رشد استخوان تابعی از «هورمون رشد» و هورمون رشد تابعی از «هورمون آزادکننده هورمون رشد» است، در نتیجه رشد استخوان از ترکیب این دو تابع به دست می آید. چنانچه تابع را به عنوان یک ماشین در نظر بگیریم کار هیپوتالاموس و هیپوفیز را می توان به صورت روبه رو نشان داد :

اکنون اگر عمل هیپوتالاموس بر عوامل محیطی و شرایط درون بدن را با f و عمل غده هیپوفیز را با g نمایش دهیم، ترکیب دو تابع f و g را به صورت روبه رو خواهیم داشت :

پیش از تعریف ترکیب دو تابع به مثال‌های زیر توجه کنید :

مثال ۱: اگر $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = 2x + 1$ ، می‌خواهیم مقادیر $g(\circ)$ و $g(\frac{1}{3})$ و $g(2x)$

و سپس $f(1)$ و $f(2)$ و $f(2x+1)$ و $f(4x+1)$ را محاسبه کنیم.

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}$$

داریم :

$$g(\circ) = 2(\circ) + 1 = 1, \quad g(\frac{1}{3}) = 2(\frac{1}{3}) + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$g(2x) = 2(2x) + 1 = 4x + 1$$

$$f(1) = (1)^2 - 2(1) = 1 - 2 = -1, \quad f(2) = (2)^2 - 2(2) = 4 - 4 = 0$$

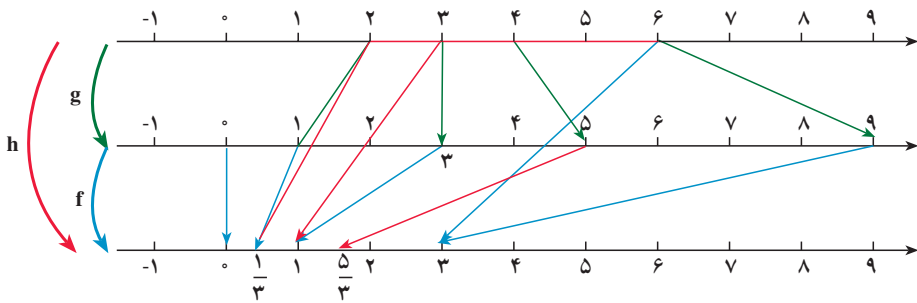
$$f(2x+1) = (2x+1)^2 - 2(2x+1) = 4x^2 - 1$$

$$f(4x+1) = (4x+1)^2 - 2(4x+1) = 16x^2 + 8x + 1 - 8x - 2 = 16x^2 - 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h: [2, 8] \rightarrow \mathbb{R} \\ h(x) = \frac{2}{3}x - 1 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} g: [2, 8] \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = 2x - 3 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} f: [0, 9] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \frac{1}{3}x \end{array} \right\}$$

مثال ۲: توابع

را در نظر می‌گیریم و نمودار و جدول آن‌ها را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم :



$\begin{array}{c} \xrightarrow{g} \quad \xrightarrow{f} \end{array}$		
x	$2x - 3$	$\frac{1}{3}(2x - 3) = \frac{2}{3}x - 1$
2	1	$\frac{1}{3}$
3	3	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
6	9	3

$$h(2) = \frac{1}{3}$$

$$h(3) = 1$$

$\vdots$

$$h(6) = 3$$

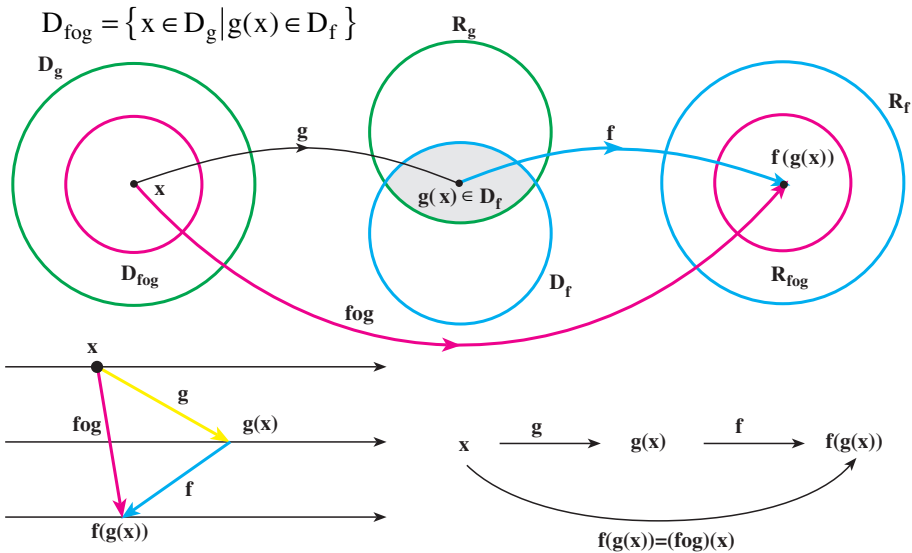
به طوری که دیده می شود :

$$x \xrightarrow{g} 2x - 3 = y \xrightarrow{f} f(y) = f(2x - 3) = \frac{2}{3}x - 1 = h(x) \Rightarrow h(x) = f(g(x))$$

یعنی $h: x \mapsto \frac{2}{3}x - 1$ تابعی است که نخست بر روی x مانند تابع g عمل می کند و آن را به $g(x) = 2x - 3$ تبدیل می نماید، آنگاه بر $g(x) = 2x - 3$ مانند تابع f عمل می نماید و آن را به $\frac{1}{3}(2x - 3)$ تبدیل می کند.

تابع h را که به این ترتیب به دست می آید ترکیب دو تابع f و g می نامند. اینک به بیان تعریف کلی زیر می پردازیم :

تعریف: ترکیب دو تابع g و f تابعی است که آن را با نماد $f \circ g$ نشان می دهیم (بخوانید اف اُجی) و به صورت $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ یا $f \circ g: x \mapsto f(g(x))$ تعریف می کنیم، دامنه این تابع همهٔ عدهای حقیقی x متعلق به D_g است به طوری که $g(x)$ متعلق به D_f باشد یعنی :



مثال ۱: اگر $f(x) = x^2$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ ، داریم :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x$$

توجه کنید که دامنهٔ تابع $(f \circ g)(x) = x$ ، $\mathbb{R}$ نیست زیرا :

$$D_f = \mathbb{R} , D_g = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\} = [0, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in [0, +\infty) | \sqrt{x} \in \mathbb{R}\}$$

پس :

اما $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$ برقرار است؛ زیرا $x \in [0, +\infty)$.

بنابراین داریم:

$$D_{f \circ g} = [0, +\infty)$$

$$(f \circ g)(x) = x, \quad x \in [0, +\infty)$$

مثال ۲: دو تابع $f(x) = x - 2$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ داده شده‌اند. دامنهٔ تابع‌های $f \circ g$ و $g \circ f$ را

محاسبه نمایید و سپس توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را تشکیل دهید.

حل:

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = [-1, +\infty)$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 2 \in [-1, +\infty)\}$$

$$x - 2 \in [-1, +\infty) \Rightarrow x - 2 \geq -1 \Rightarrow x \geq 1$$

$$D_{g \circ f} = [1, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [-1, \infty) \mid \sqrt{x+1} \in \mathbb{R}\} = [-1, +\infty)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)+1} = \sqrt{x-2+1} = \sqrt{x-1}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) - 2 = \sqrt{x+1} - 2$$

مثال ۳: تابع $f(x) = \frac{1}{3}x - 3$ داده شده است تابع $f \circ f$ را تشکیل دهید.

حل:

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_{f \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3}x - 3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1}{3}f(x) - 3 = \frac{1}{3}(\frac{1}{3}x - 3) - 3$$

$$(f \circ f)(x) = \frac{1}{9}x - 1 - 3 = \frac{1}{9}x - 4$$

مثال ۴: اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = x - 2$ ، جدول زیر همهٔ عملیات تعریف شده روی این دو

تابع را نشان می‌دهد.

عمل	تابع	قانون تابع	دامنه
+	$f + g$	$(f + g)(x) = x^2 + x - 2$	$D_f \cap D_g$
-	$f - g$	$(f - g)(x) = x^2 - x + 2$	$D_f \cap D_g$
$\times$	$f \cdot g$	$(fg)(x) = x^2(x - 2)$	$D_f \cap D_g$
$\div$	$\frac{f}{g}$	$(\frac{f}{g})(x) = \frac{x^2}{x-2}; \quad x \neq 2$	$D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$
o	fog	$(f \circ g)(x) = (x - 2)^2$	$\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$
	gof	$(g \circ f)(x) = x^2 - 2$	$\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

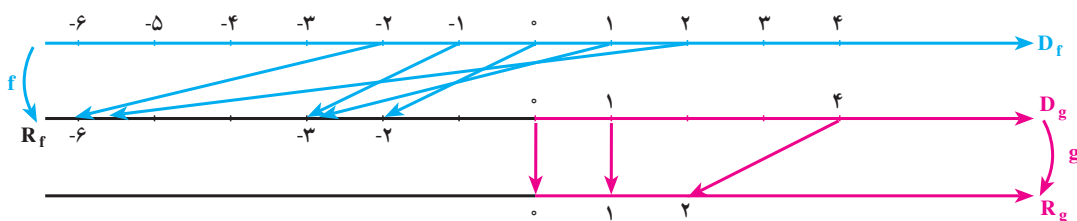
توجه: به طوری که دیده می شود $(g \circ f)(x) = x^2 - 2$ و $(f \circ g)(x) = (x - 2)^2$ و چون

$$f \circ g \neq g \circ f \text{ پس در حالت کلی } x^2 - 2 \neq (x - 2)^2$$

در برخی از موارد ترکیب دو تابع ممکن نیست به مثال زیر توجه کنید.

مثال: دو تابع $g: x \rightarrow \sqrt{x}$, $x \geq 0$ و $f: x \rightarrow -x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$ داده شده اند، نمودار زیر

نشان می دهد که ترکیب $g \circ f$ ممکن نیست زیرا $D_g \cap R_f = \emptyset$



تمرین: آیا در مثال بالا ترکیب دو تابع به صورت $f \circ g$ ممکن است؟

مثال: دو تابع $f(x) = \frac{2}{x}$ و $g(x) = \frac{1}{1-x^2}$ داده شده اند. عملیات روی این دو تابع را می توان

نظیر جدول قبل مشخص کرد.

عمل	تابع	قانون تابع	دامنه
+	$h = f + g$	$h(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x^2}$	$\mathbb{R} - \{0, -1, +1\}$
-	$h = f - g$	$h(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{1-x^2}$	$\mathbb{R} - \{0, -1, +1\}$
.	$h = f \cdot g$	$h(x) = \frac{2}{x} \times \frac{1}{1-x^2} = \frac{2}{x(1-x^2)}$	$\mathbb{R} - \{0, -1, +1\}$
$\div$	$h = \frac{f}{g}$	$h(x) = \frac{2}{x} \div \frac{1}{1-x^2} = \frac{2(1-x^2)}{x}$ $g(x) \neq 0$	$\mathbb{R} - \{0, -1, +1\}$
$\div$	$h = \frac{g}{f}$	$h(x) = \frac{1}{1-x^2} \div \frac{2}{x} = \frac{x}{2(1-x^2)}$ $f(x) \neq 0$	$\mathbb{R} - \{0, -1, +1\}$
o	$h = f \circ g$	$h(x) = f(g(x)) = \frac{2}{\frac{1}{1-x^2}} = 2(1-x^2)$	$\{x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \mid \frac{1}{1-x^2} \in \mathbb{R} - \{0\}\} = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$
o	$h = g \circ f$	$h(x) = g(f(x)) = \frac{1}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2-4}$	$\{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{2}{x} \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}\} = \mathbb{R} - \{0, \pm 2\}$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ باشد، تابع $P(x) = f(x) + g(x)$ را به دست آورید.

$$D_f = \{x \mid 1-x \geq 0\} = (-\infty, 1] \quad \text{داریم:}$$

$$D_g = \{x \mid x-1 \geq 0\} = [1, +\infty)$$

$$D_P = D_f \cap D_g = \{1\}, \quad P(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-1} \quad \text{پس:}$$

$$P = \{(1, 0)\} \quad \text{یا } P(1) = 0, \quad \text{بنابراین}$$

تمرین

۱- توابع f و g داده شده اند، تابع های $f \pm g$ و $f \circ g$ و $\frac{f}{g}$ و دامنه های آنها را به دست آورید.

$$f(x) = x^2 + 2, \quad g(x) = 4x + 2$$

$$f(x) = \frac{2x-3}{5}, \quad g(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$f(x) = 2x^2 - x, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \sqrt{x-1}, \quad g(x) = x-1$$

$$f(x) = \frac{x+3}{x-3}, \quad g(x) = \frac{x-3}{x+3}$$

$$f(x) = \sin 2x, \quad g(x) = \sin x$$

$$f(x) = \tan x, \quad g(x) = \cot x$$

$$۲- \text{توابع } f(x) = -2 \text{ و } g(x) = x^2 + 1 \text{ داده شده اند:}$$

$$\text{الف - توابع } f+g, f-g, f \cdot g, \frac{g}{f} \text{ را تشکیل دهید؛}$$

ب - نمودار تابع های f, g و $f+g$ را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید (بهتر است در ترسیم از رنگ های مختلف استفاده شود).

۳- برای توابع f و g داده شده در زیر، تابع های $f \circ g$ و $g \circ f$ و دامنه های آنها را مشخص نمایید.

$$۱) f(x) = x+2, \quad g(x) = x^2-3$$

$$۲) f(x) = x^2+x, \quad g(x) = \sqrt{4x+1}$$

$$۳) f(x) = \frac{x}{x+1} \quad , \quad g(x) = 2x^2 - x + 1$$

$$۴) f(x) = \cos x \quad , \quad g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$۵) f(x) = x^2 + 2x + 1 \quad , \quad g(x) = |x|$$

۴- اگر $f(x) = x$ و $g(x) = (x+1)^2$ باشد $(g \circ f)(x) - (f \circ g)(x)$ را بیابید.

۵- اگر $f(x) = x + a$ و $g(x) = ax^2 + bx + c$ باشد a و b و c را طوری تعیین کنید که

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 3x + 4 \text{ داشته باشیم}$$

۶- اگر $f(x) = \tan x$ و $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{1+x^2}}$ باشد $g \circ f$ را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

۷- اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ باشد $f \circ f$ را به دست آورید و سپس $f[f(3)]$ را محاسبه نمایید.

حد و پیوستگی

احمد یکی از دانش آموزان درس ریاضی ۳ است. احمد علاقه مند به رسم توابع و تشخیص

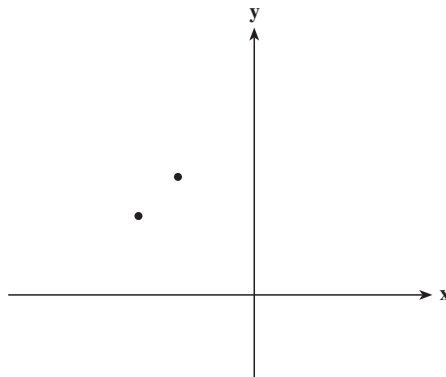
چگونگی نمودار تابع است. یک روز او تصمیم گرفت نمودار تابع $y = f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$ را در

بازه $[-3, 2]$ رسم کند. احمد با استفاده از ماشین حساب با محاسبات تقریبی جدول زیر را تشکیل داد

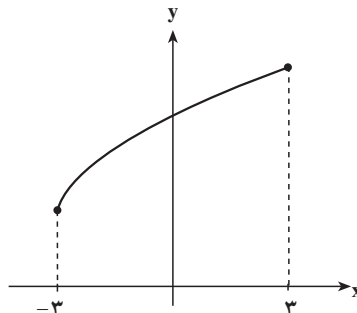
x	-3	-2/5	-2	-1/5	-1	-0/5	0	0/5	1/5	2	2/5	3
y	2	2/7	3	3/22	3/41	3/58	3/73	3/87	4/12	4/23	4/34	4/44

احمد به ازای $x=1$ مقدار تابع را حساب نکرد. چون تابع در این نقطه تعریف نشده است و این

نقطه در دامنه تابع قرار ندارد. او نقاط به دست آمده از نمودار تابع را در صفحه مشخص کرد.



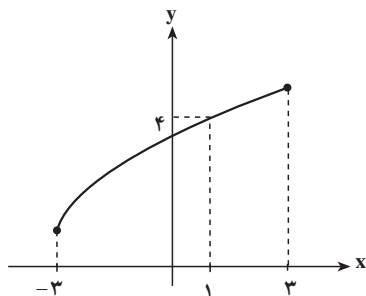
احمد نتیجه گرفت نمودار تابع باید به شکل زیر باشد.



یکی از دوستان احمد گفت این تابع در $x=1$ تعریف نشده است اما این نمودار مقداری برای این تابع در $x=1$ مشخص می‌کند. حتماً در این نتیجه‌گیری اشکالی وجود دارد. احمد برای اطمینان از درستی نتیجه‌گیری خود گفت بهتر است مقادیرهای این تابع در اطراف نقطه $x=1$ را بیشتر بررسی کنیم. اگرچه تابع در $x=1$ تعریف نشده است ولی می‌توانیم برای مقادیرهایی از x نزدیک ۱ مقادیرهای تابع را حساب کنیم و ببینیم آیا مقادیرهای به دست آمده همانند نمودار رسم شده عدد خاصی را نشان می‌دهند؟ این بار احمد جدولی ساخت که مقادیرهای تابع را در نزدیکی‌های نقطه ۱ حساب کند.

x	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	$\rightarrow 1 \leftarrow$	۱/۰۰۰۰۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
y	۳/۹۴	۳/۹۷	۳/۹۹۷	۳/۹۹۹۷	۳/۹۹۹۹۷	$\rightarrow ? \leftarrow$	۴/۰۰۰۰۰۰۲	۴/۰۰۰۰۲	۴/۰۰۰۰۲	۴/۰۰۰۲	۴/۰۲

با محاسبه جدول بالا احمد نتیجه‌گیری کرد که با نزدیک شدن مقادیرهای x به ۱ مقادیرهای $f(x)$ به ۴ نزدیک می‌شوند. نمودار رسم شده برای تابع نیز چنین مطلبی را نشان می‌دهند.



آنچه که احمد برای بررسی این تابع در اطراف نقطه ۱ انجام داد حدگیری نام دارد و می‌گویند حد تابع $y = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$ در نقطه ۱ برابر ۴ است.

موارد بسیاری پیش می‌آید که تابعی مانند $f(x)$ در نقطه‌ای مانند a تعریف نشده باشد ولی ما علاقه‌مند باشیم بدانیم که مقادیرهای تابع برای مقادیرهای x نزدیک a چگونه است. در این حالت باید بررسی کرد که با نزدیک شدن x به a آیا مقادیرهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟

تمرین

۱- تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با قانون $f(x) = x^2 + 3x + 4$ مفروض است.

مقدار $f(x)$ را برای هر x داده شده در جدول‌های صفحه بعد محاسبه کنید (تا چهار رقم اعشار) و نتیجه محاسبه را بنویسید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).



x	...	-3	-2/9	-2/5	-2/1	-2/0.1	-2/0.01	-2/0.001	-2/0.0001	...	→	-2
f(x)	...										→	
x	→	-2										
f(x)	→											

نتیجه: جدول‌های بالا نشان می‌دهند که وقتی x به سمت عدد ... نزدیک می‌شود، تابع $f(x)$ به عدد ... نزدیک می‌شود.

۲- تابع $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با قانون $g(x) = x^2 - 2x$ داده شده است. مقادیر $g(x)$ را برای هر x داده شده در جدول زیر محاسبه کنید (تا چهار رقم اعشار) و نتیجه را بنویسید.

x	...	0	0.1	0.5	0.8	0.9	0.99	0.999	0.9999	...	→	1
g(x)	...										→	
x	→	1										
g(x)	→											

نتیجه: جدول بالا نشان می‌دهد...

۳- تابع $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با قانون $h(x) = -x^2 + 4$ مفروض است. مقدارهای $h(x)$ را برای هر x داده شده در جدول زیر محاسبه کنید (تا چهار رقم اعشار) و نتیجه را بنویسید.

x	...	-1	-0.9	-0.5	-0.3	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	...	→	0
h(x)	...										→	
x	→	0										
h(x)	→											

نتیجه: جدول بالا نشان می‌دهد...

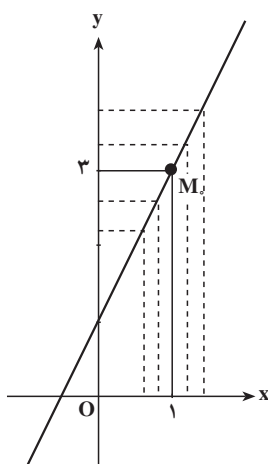
مثال ۱: تابع $f(x) = 2x + 1$ را در نظر می‌گیریم و مقدار این تابع را برای برخی مقادیر x کوچک‌تر از ۱ که به تدریج به عدد ۱ نزدیک می‌شوند، هم‌چنین مقدار این تابع را برای بعضی مقادیر x بزرگ‌تر از ۱ که به تدریج به عدد ۱ نزدیک می‌شوند، محاسبه می‌کنیم.

x	...	0	0.5	0.9	0.99	0.999	...	→	1	←	...	1/0.01	1/0.1	1/1	1/5	2	...
f(x)	...	1	2	2.8	2.98	2.998	...	→	3	←	...	3/0.02	3/0.2	3/2	4	5	...

نمودار تابع $f(x) = 2x + 1$ را رسم می‌کنیم. برای این منظور کافی است دو نقطه از خط را مشخص کنیم:

$$A \left| \begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \end{array} \right.$$

$$B \left| \begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ y=0 \end{array} \right.$$



همان‌طور که از جدول و نمودار دیده می‌شود با نزدیک شدن متغیر x به عدد ۱، مقدار تابع f یعنی $f(x)$ به عدد ۳ نزدیک می‌شود.

مثال ۲: تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ داده شده است. می‌خواهیم:

الف - رفتار این تابع را در نزدیکی $x_0 = 2$ بررسی کنیم؛

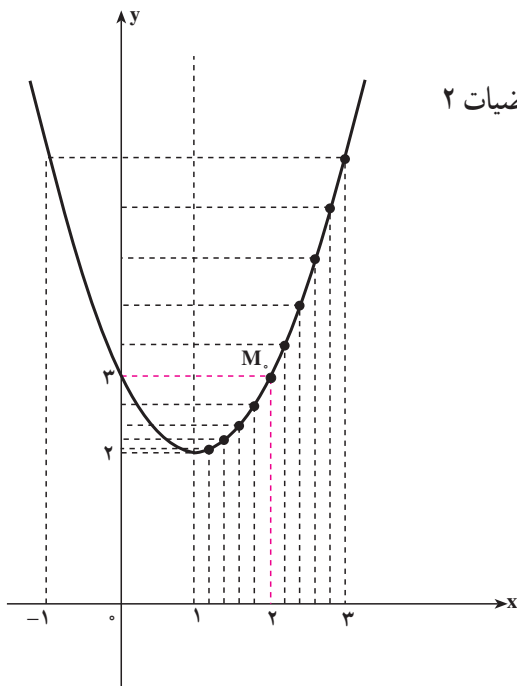
ب - نمودار این تابع را رسم کرده و از روی آن درستی محاسبه قسمت الف را بررسی کنیم.

حل: الف - مقادیر $f(x)$ را برای برخی از مقدارهای x نزدیک به عدد ۲ محاسبه می‌کنیم و در

جدول زیر می‌نویسیم.

x	$\dots$	۱	$1/2$	$1/5$	$1/8$	$1/9$	$1/99$	$1/999$	$\dots \rightarrow$	۲	$\leftarrow \dots$	$2/001$	$2/01$	$2/1$	$2/5$	$2/9$	۳	$\dots$
$f(x)$	$\dots$	۲	$2/04$	$2/25$	$2/64$	$2/81$	$2/98$	$2/998$	$\dots \rightarrow$	۳	$\leftarrow \dots$	$3/002$	$3/02$	$3/2$	$4/25$	$5/61$	۶	$\dots$

به‌طوری که دیده می‌شود، هرگاه x به عدد ۲ نزدیک می‌شود، $f(x)$ به عدد ۳ نزدیک می‌شود.



ب - نمودار تغییرات این تابع در ریاضیات ۲
رسم شده است.

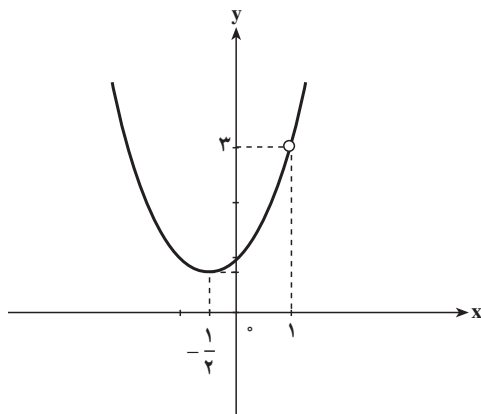
از روی نمودار نیز دیده می شود که وقتی x به عدد ۲ نزدیک می شود، $f(x)$ به عدد ۳ نزدیک می شود.

مثال ۳: تابع f ، با ضابطه $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ ، $x \neq 1$ ، را در نظر می گیریم. می خواهیم رفتار این تابع را در نزدیکی $x_0 = 1$ بررسی کنیم.

حل: مقدارهای $f(x)$ را برای برخی از مقدارهای x نزدیک به عدد ۱ محاسبه می کنیم. این مقادارها در جدول زیر درج شده اند.

x	...	۰/۷۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	...	→	۱	←	...	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱/۲۵	...
$f(x)$	...	۲/۳۱۳	۲/۷۱	۲/۹۷۰	۲/۹۹۷	...	→	۳	←	...	۳/۰۰۳	۳/۰۳۰	۳/۳۱	۳/۸۱۳	...

به طوری که جدول نشان می دهد با نزدیک شدن x به عدد ۱ (از راست یا چپ)، $f(x)$ به عدد ۳ نزدیک می شود.



مثال ۴: تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ را با دامنه $(1, \infty)$ در نظر بگیرید. می‌خواهیم مقدارهای این تابع را در نزدیکی ۱ بررسی کنیم. در جدول زیر مقادیر تقریبی این تابع را به ازای برخی از مقادیر x در نزدیکی ۱ محاسبه کرده‌ایم.

x	۱	$\leftarrow$	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
y	?	$\leftarrow$	۰/۰۰۱	۰/۰۳	۰/۱	۰/۳

همان‌طور که جدول نشان می‌دهد با نزدیک شدن x به ۱ مقدارهای تابع f به صفر نزدیک می‌شوند.

تعریف حد توابع

اگر دامنه تابع f بازه I باشد و نقطه a به گونه‌ای باشد که بتوان از داخل I به a نزدیک شد، یعنی بتوان داخل I نقاطی متمایز از a را یافت که به a نزدیک باشند (به هر میزان که بخواهیم)، آنگاه با نزدیک شدن متغیر x (در بازه I) به نقطه a ممکن است مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی مانند L نزدیک شوند که در این حالت می‌گوییم تابع f در نقطه a حد دارد و حد آن L است و می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

با توجه به مثال‌های صفحات قبل می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2 + 4) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1} = 0$$

مثال ۵: برای تابع $y = 1 + \sqrt{x}$ با دامنه $(0, \infty)$ می‌توان از داخل دامنه این تابع به صفر نزدیک شد و با نزدیک شدن $x \in (0, \infty)$ به صفر، مقدار $1 + \sqrt{x}$ به ۱ نزدیک می‌شود، پس

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{x}) = 1$$

مثال ۶: برای تابع $y = \sqrt{1-x^2}$ با دامنه $(-1, 1)$ می‌توان از داخل دامنه این تابع به -۱ نزدیک شد و با نزدیک شدن $x \in (-1, 1)$ به -۱ مقدارهای $\sqrt{1-x^2}$ به صفر نزدیک می‌شوند، پس

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1-x^2} = 0$$

تمرین

۱- هر یک از جدول‌های زیر را کامل کنید، و حد هر تابع را در نقطه مورد نظر مشخص کنید (برای محاسبه می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$$\lim_{x \rightarrow 1} (-2x + 5) \text{ (الف)}$$

x	...	0	1/2	1/4	1/8	1/16	...	→	1	←	...	1/2	1/4	1/8	1/16	...
f(x)	...	...	...	...	...	...	...	→		←	...	...	...	...	...	...

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x + 3) \text{ (ب)}$$

x	$\dots$	-1	$-o/\Delta$	$-o/1$	$-o/o$	$-o/oo$	$-o/ooo$	$\dots$	$\rightarrow$	o	$\leftarrow$	$\dots$	o/ooo	o/oo	o/o	$o/1$	o/Δ	1	$\dots$
$f(x)$	$\dots$							$\dots$	$\rightarrow$		$\leftarrow$	$\dots$							$\dots$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

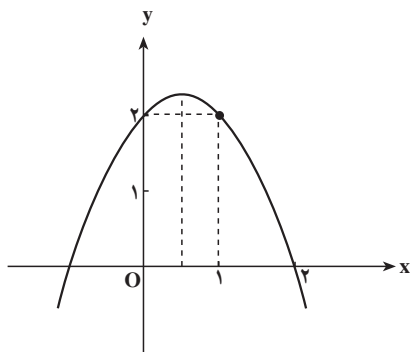
x	...	-2	-1/5	-1/1	-1/0.1	-1/0.01	-1/0.001	...	-1	←...	-0.999	-0.99	-0.9	-0.8	-0.5	...
f(x)	...							...		←...						...

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \quad (ت)$$

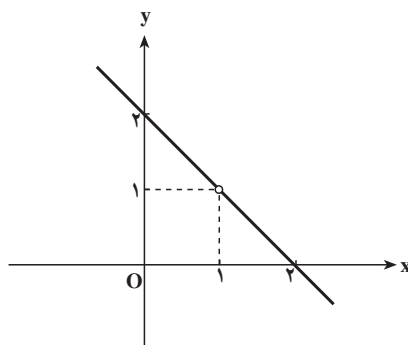
x	...	2	2/5	2/9	2/99	2/999	...	→	3	←	...	3/1001	3/101	3/1	3/5	4	...
f(x)	...							→		←	...						...

۲- با تشکیل جدول، حد تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ را در صفر تعیین کنید.

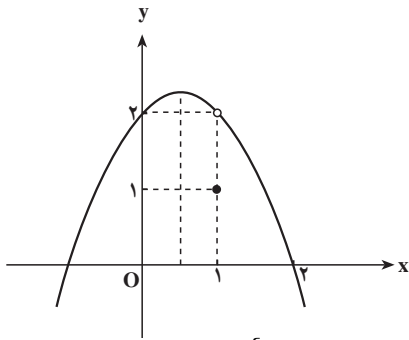
۳- با استفاده از نمودار، حدتوابع زیر را در نقطه داده شده (در صورت وجود) مشخص کنید.



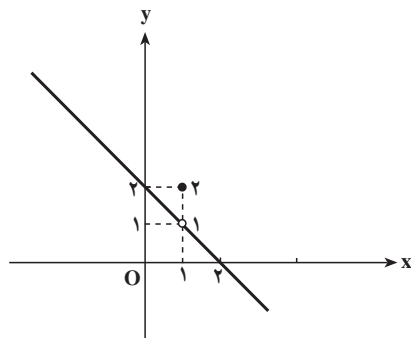
$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + x + 2)$$



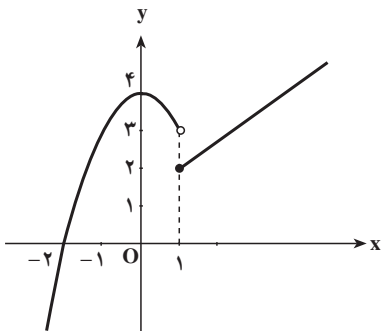
الف) $\lim_{x \rightarrow 1} (-x + 2)$



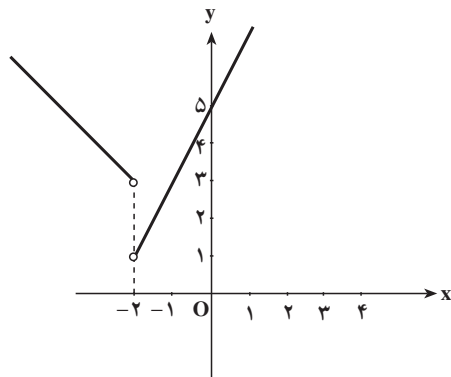
ت) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 2, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$



پ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$



ج) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 1 \\ -x^2 + 4, & x < 1 \end{cases}$



ث) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 5, & x > 2 \\ -x + 1, & x \leq 2 \end{cases}$

نکته: باید توجه کنید که حد تابعی مانند f در نقطه‌ای مانند x_0 ، به معین بودن یا معین نبودن تابع

در x_0 بستگی ندارد. یعنی ممکن است:

(۱) تابع f در x_0 تعریف نشده باشد، اما وقتی x به x_0 نزدیک می‌شود، حد داشته باشد.

(۲) تابع f در x_0 تعریف شده باشد اما وقتی x به x_0 نزدیک می‌شود، تابع حد نداشته باشد.

به علاوه هنگامی که تابع در نقطه x_0 دارای حد است، حد تابع می‌تواند با مقدار تابع برابر باشد

یا نباشد. یعنی ممکن است:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

مثال ۱: می‌خواهیم حد تابع $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{x-3}$, $x \neq 3$ را در $x = 3$ به دست آوریم.

حل: این تابع در $x = 3$ تعریف نشده است. اما وقتی x به عدد ۳ نزدیک می‌شود دارای حد

است، زیرا برای $x \neq 3$ داریم

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = x-2$$

$$\Rightarrow f(x) = x-2, \quad x \neq 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x-2) = 1$$

(قبلاً دیدیم که $\lim_{x \rightarrow 3} (x-2) = 1$ است).

بنابراین دیده می‌شود که تابع فوق در $x = 3$ تعریف نشده است، اما در $x = 3$ دارای حد است.

مثال ۲: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$ داده شده است. می‌خواهیم حد این تابع را در

$x = 2$ تعیین کنیم.

حل: این تابع در $x = 2$ تعریف شده است زیرا $f(2) = 5$ ، و همان‌طور که در مثال ۲ دیده شد،

داریم $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 3) = 3$ پس این تابع در $x = 2$ ، دارای حد است اما حد آن با مقدار تابع در

$x = 2$ برابر نیست ($3 \neq 5$).

مثال ۳: می‌خواهیم حد تابع $f(x) = x^2 + 3x + 4$ را در $x = -2$ تعیین کنیم.

حل: قبلاً دیدیم که $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 3x + 4) = 2$ ؛ از طرفی این تابع در $x = -2$ معین است و

مقدار $f(-2) = (-2)^2 + 3(-2) + 4 = 2$ برابر است با: $f(-2) = (-2)^2 + 3(-2) + 4 = 2$. بنابراین حد تابع در $x = -2$ با

مقدار تابع در $x = -2$ برابر است، یعنی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 3x + 4) = f(-2) = 2$$

مثال ۴: تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 1 \\ 2x + 1, & x < 1 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم حد این

تابع را در عدد ۱ تعیین کنیم.

حل: این تابع در $x = 1$ تعریف شده است. قبلاً دیدیم که وقتی x از طرف راست به عدد ۱

نزدیک می‌شود مقدارهای تابع به ۱- نزدیک می‌شوند و در مثال ۱ دیدیم که وقتی x از طرف چپ به

عدد ۱ نزدیک می‌شود مقدارهای تابع به ۳- نزدیک می‌شوند. چون این دو مقدار با هم مساوی نیستند

پس وقتی x به عدد ۱ نزدیک می‌شود، این تابع دارای حد نیست.

حد راست و حد چپ یک تابع

تعریف: تابع f را که در بازه I شامل x تعریف شده است، مگر احتمالاً در خود x ، در نظر

می گیریم :

الف - اگر x از طرف راست به x_0 نزدیک شود و مقدارهای تابع f به عددی مانند L_1 نزدیک شوند، (یا به بیان دیگر، هرگاه بتوانیم هرچه قدر که بخواهیم $f(x)$ را به L_1 نزدیک کنیم، به شرط آن که x را از طرف راست به اندازه کافی به x_0 نزدیک کرده باشیم)؛ L_1 را حد راست تابع f در x_0 می نامند و می نویسند :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L_1$$

ب - اگر x از طرف چپ به x_0 نزدیک شود و مقدارهای تابع f به عددی مانند L_2 نزدیک شوند، (یا به بیان دیگر، هرگاه بتوانیم هر چه قدر که بخواهیم $f(x)$ را به L_2 نزدیک کنیم به شرط آن که x را از طرف چپ به اندازه کافی به x_0 نزدیک کرده باشیم)؛ L_2 را حد چپ تابع f در x_0 می نامند و می نویسند :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_2$$

از آنچه گذشت نتیجه می شود که اگر x_0 یک نقطه میانی در دامنه f باشد و تابع f در نقطه x_0 حد راست و حد چپ داشته باشد، و این دو حد با هم برابر باشند، تابع در x_0 دارای حد است؛ و برعکس، اگر تابع در یک نقطه حد داشته باشد، در آن نقطه حد راست و حد چپ دارد و این دو حد با هم برابرند.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

اما اگر x_0 یک نقطه انتهایی دامنه تابع f باشد، در این حالت حد چپ یا راست f در x_0 همان حد تابع f در x_0 است. مثلاً در مورد تابع $\sqrt{x}$ با دامنه $(0, \infty)$ حد راست این تابع در صفر و حد این تابع در صفر یکی هستند. فقط در نقاطی که نقاط میانی دامنه یک تابع هستند مفهوم حد تابع و حد راست و چپ تابع با هم متفاوتند.

مثال ۱: تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ داده شده است، می خواهیم وجود حد راست و حد چپ این تابع را در ۲ بررسی کنیم.

حل: دیدیم که اگر x از طرف راست به ۲ نزدیک شود مقدارهای تابع بالا به ۳ نزدیک می شوند یعنی $L_1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 2x + 3) = 3$ حد راست تابع؛ و در صورتی که x از چپ به ۲ نزدیک

شود مقدارهای تابع به ۳ نزدیک می شوند. یعنی $L_2 = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 2x + 3) = 3$ حد چپ تابع.

چون حد راست و حد چپ این تابع در ۲ با هم برابرند ($L_1 = L_2 = 3$)، تابع در نقطه $x = 2$

دارای حد است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 3) = 3$$

مثال ۲: تابع $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 1 \\ x^2+2x-6, & x < 1 \end{cases}$ داده شده است می‌خواهیم وجود حد این تابع را در ۱ بررسی کنیم.

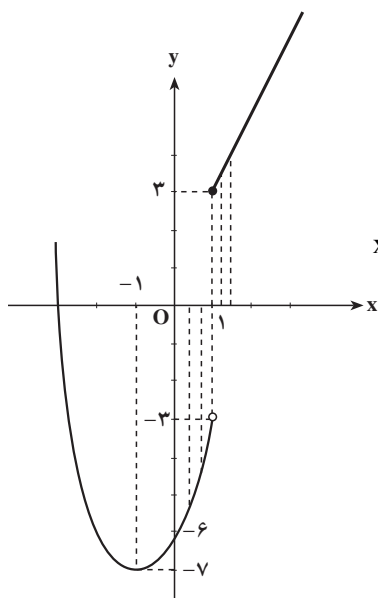
چون وقتی x از طرف راست به ۱ نزدیک می‌شود داریم $x > 1$ ، حد راست این تابع از $f(x) = 2x+1$ محاسبه می‌شود بنابراین:

$$\text{حد راست} = L_1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+1) = 3 \quad (\text{قبلاً محاسبه شد})$$

و چون وقتی x از طرف چپ به ۱ نزدیک می‌شود داریم $x < 1$. پس حد چپ از $f(x) = x^2 + 2x - 6$ به دست می‌آید یعنی:

$$\text{حد چپ} = L_2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2x - 6) = -3$$

به‌طوری که دیده می‌شود حد چپ و حد راست این تابع در نقطه $x=1$ با هم برابر نیستند $(L_1 = 3 \neq L_2 = -3)$ ، پس این تابع در $x=1$ حد ندارد. نمودار تابع نیز درستی محاسبه بالا را نشان می‌دهد.



$$x < 1 \Rightarrow$$

x	-4	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	2	-3	-6	-7	-6	-3

$$x \geq 1 \Rightarrow y = 2x + 1, \quad \begin{matrix} 1 \\ +1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ \end{matrix}$$

قضیه‌های حد

محاسبهٔ حد تابع‌ها با استفاده از تعریف، به روشی که در مثال‌ها دیده شد (نزدیک کردن متغیر به x_0 و محاسبهٔ $f(x)$ و تشکیل جدول)، معمولاً طولانی است. به این علت از قضیه‌هایی که در مورد حد توابع وجود دارد و آن‌ها را بدون اثبات می‌پذیریم استفاده می‌کنیم.

قضیهٔ ۱: حد تابع ثابت $f(x) = k$ (ک عددی است حقیقی و ثابت) در هر عدد دلخواه x_0 ،

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} k = k \text{ یعنی } k \text{ مقدار ثابت } k \text{ است.}$$

مثال: اگر $f(x) = 5$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 5 = 5, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} 5 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} 5 = 5, \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} 5 = 5$$

قضیهٔ ۲: حد تابع $f(x) = x$ (تابع همانی) در هر نقطه x_0 برابر با x_0 است یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x = 3, \quad \lim_{x \rightarrow -1} x = -1$$

مثال:

قضیهٔ ۳: اگر دو تابع f و g دامنه یکسانی داشته باشند و در نقطه x_0 دارای حد باشند و

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \text{ ، آنگاه}$$

الف - مجموع این دو تابع یعنی $f(x) + g(x)$ در x_0 ، حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1 + l_2$$

یعنی، حد مجموع دو تابع (با دامنه یکسان) برابر است با مجموع حدهای آن دو تابع.

ب - تفاضل این دو تابع یعنی $f(x) - g(x)$ در x_0 ، حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1 - l_2$$

یعنی حد تفاضل دو تابع (با دامنه یکسان) برابر است با تفاضل حدهای آن دو تابع.

پ - حاصل ضرب این دو تابع یعنی $f(x).g(x)$ در x_0 ، حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x).g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x). \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1.l_2$$

یعنی، حد حاصل ضرب دو تابع (با دامنه یکسان) برابر است با حاصل ضرب حدهای آن دو تابع.

ت - خارج قسمت این دو تابع یعنی $\frac{f(x)}{g(x)}$ در x_0 ، به شرط $l_2 \neq 0$ ، حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}, \quad l_2 \neq 0$$

یعنی، حد خارج قسمت دو تابع (با دامنه یکسان)، به شرط صفر نبودن حد مخرج، برابر است با خارج قسمت حدهای آن دو تابع.

نکته: قضیه‌های الف و پ را می‌توان به تعدادی متناهی از توابع تعمیم داد یعنی:

- ۱- حد مجموع چند تابع برابر است با مجموع حدهای آن‌ها.
 - ۲- حد حاصل ضرب چند تابع برابر است با حاصل ضرب حدهای آن‌ها.
- از قضیه‌های بالا نتیجه‌های زیر به دست می‌آید.

۱- اگر حد تابع f در نقطه x_0 برابر با l و k عدد ثابتی باشد

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (k) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k \cdot l$$

مثلاً چون $\lim_{x \rightarrow 1} (2x+1) = 3$ پس $\lim_{x \rightarrow 1} 4(2x+1) = 4(3) = 12$

۲- حد تابع $f(x) = x^n$ (n عدد صحیح و مثبت) در x_0 برابر است با x_0^n یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$$

مثال: حد تابع $f(x) = x^3$ در $x = 2$ برابر است با $2^3 = 8$ یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x)^3 = (2)^3 = 8$$

۳- اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = l^n$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$ (به شرط آن که $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک بازه شامل x_0 تعریف شده باشد).

مثال: دیدیم که $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 3) = 3$ پس $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 3)^4 = 3^4 = 81$

و $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 2x + 3} = \sqrt{3}$

۴- حد تابع چندجمله‌ای $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + 1$ (n عدد صحیح و مثبت).

به کمک نتیجه‌های بالا و قضیه حد مجموع چند تابع، ثابت می‌شود که حد تابع چندجمله‌ای

$f(x)$ در x_0 برابر است با $f(x_0)$ یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + 1)$$

$$= ax_0^n + bx_0^{n-1} + cx_0^{n-2} + \dots + 1 = f(x_0)$$

مثال: داریم:

$$۱) \lim_{x \rightarrow 2} (f(x) = 2x + 1) = f(2) = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 2} (f(x) = x^2 - 2x + 3) = f(2) = 2^2 - 2(2) + 3 = 4 - 4 + 3 = 3$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + x^2 + 2x - 1) = (2)^3 + (2)^2 + 2(2) - 1 = 15$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 2} (-2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 6x + 1) = -2(2)^4 + 3(2)^3 + 5(2)^2 - 6(2) + 1 \\ = -32 + 24 + 20 - 12 + 1 = 1$$

۵- حد تابع گویای کسری - حد تابع $q(x) = \frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots + 1}{a'x^n + b'x^{n-1} + \dots + 1}$ ، m و n عددهای صحیح و مثبت) در x برابر است با مقدار آن تابع در نقطه x_0 (به شرط آن که x_0 ریشهٔ مخرج کسر نباشد).

مثال ۱: داریم:

$$۱) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 1}{3x - 5} = \frac{2(-1) + 1}{3(-1) - 5} = \frac{-2 + 1}{-3 - 5} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 1}{2x + 5} = \frac{(-2)^2 - (-2) - 1}{2(-2) + 5} = \frac{5}{1} = 5$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - x^2 + 5}{-2x^2 + 3x - 1} = \frac{2(2)^3 - (2)^2 + 5}{-2(2)^2 + 3(2) - 1} = \frac{17}{-3} = \frac{-17}{3}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)^2}{2x^2 - x - 5} = \frac{(-2+2)^2}{2(-2)^2 - (-2) - 5} = \frac{0}{5} = 0$$

مثال ۲: دو تابع $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2 - 2x$ داده شده‌اند، می‌خواهیم:

الف - حد تابع f را در ۱ بیابیم.

ب - حد تابع g را در ۱ به دست آوریم.

پ - تابع‌های $f(x) + g(x)$ و $f(x) - g(x)$ ، $f(x).g(x)$ و $\frac{f(x)}{g(x)}$ را تعیین و حد هر یک از این توابع را در ۱ پیدا کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 2(1) + 1 = 3$$

داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x) = (1)^2 - 2(1) = -1$$

$$f(x) + g(x) = 2x + 1 + x^2 - 2x = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = (1)^2 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \Rightarrow 2 = 3 + (-1) \Rightarrow 2 = 2$$

$$f(x) - g(x) = 2x + 1 - (x^2 - 2x) = -x^2 + 4x + 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + 4x + 1) = -(1)^2 + 4(1) + 1 = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \Rightarrow 4 = (3) - (-1) \Rightarrow 4 = 4$$

$$f(x).g(x) = (2x + 1)(x^2 - 2x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (f(x).g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 - 3x^2 - 2x) = 2(1)^3 - 3(1)^2 - 2(1) = -3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} [f(x).g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} f(x). \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \Rightarrow -3 = (3)(-1) \Rightarrow -3 = -3$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x + 1}{x^2 - 2x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{x^2 - 2x} = \frac{2(1) + 1}{(1)^2 - 2(1)} = -3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} \Rightarrow -3 = (3) / -1 \Rightarrow -3 = -3$$

نتایج به دست آمده را در جدول زیر خلاصه می کنیم.

تابع	حد	
$f(x) = 2x + 1$	$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$	
$g(x) = x^2 - 2x$	$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x) = -1$	
$f(x) + g(x) = x^2 + 1$	$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2$	$2 = 3 + (-1)$
$f(x) - g(x) = -x^2 + 4x + 1$	$\lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + 4x + 1) = 4$	$4 = 3 - (-1)$
$f(x).g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x$	$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 - 3x^2 - 2x) = -3$	$-3 = (3).(-1)$
$f(x)/g(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 2x}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x + 1}{x^2 - 2x} \right) = -3$	$-3 = \frac{3}{-1}$

حد تابع‌های ساده مثلثاتی

در مورد حد توابع مثلثاتی قضیه‌های زیر را داریم:

قضیه ۱: تابع $f(x)=\sin x$ در هر نقطه $x_0 \in \mathbb{R}$ دارای حد است و مقدار این حد برابر است با

$$f(x_0) = \sin x_0 \text{ یعنی:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0.$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

قضیه ۲: تابع $f(x)=\cos x$ در هر نقطه $x_0 \in \mathbb{R}$ دارای حد است و مقدار این حد برابر است با

$$f(x_0) = \cos x_0 \text{ یعنی:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0.$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = +1$$

و

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

قضیه ۳: تابع $f(x)=\tan x$ (یا $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$) برای همه مقادیر حقیقی x به جز $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$

که برای آن‌ها داریم $\cos x = 0$ ، دارای حد است و مقدار این حد برابر است با $f(x_0) = \tan x_0$ برای

$$x_0 \neq k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ یعنی:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x_0 \neq k\pi - \frac{\pi}{2}} \tan x = \tan x_0.$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x = \tan \frac{\pi}{4} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \tan x = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

قضیه ۴: تابع $f(x) = \cot x$ (یا $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$) برای همه مقادیر حقیقی x به جز $x = k\pi$ که برای

آنها داریم $\sin x = 0$ ، دارای حد است و مقدار این حد برابر است با $f(x_0) = \cot x_0$ ، $x_0 \neq k\pi$ یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x_0 \neq k\pi} \cot x = \cot x_0.$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{4}} \cot x = \cot \frac{5\pi}{4} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}} x \cot x = \left(\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}} x \right) \left(\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}} \cot x \right) = \left(-\frac{\pi}{6} \right) \left(\cot \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

برای آشنایی بیش تر با دستورهای که گفته شد، حدهای زیر را حساب می کنیم:

$$۱) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x + \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - \sin^2 x}{\cos x + 1} = \frac{2 \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) - \sin^2 \left(-\frac{\pi}{3} \right)}{\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + 1} = \frac{2 \left(\frac{1}{2} \right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (2 \sin x + \cos^2 x) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{7}{4}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} (\tan x + \cot x) = \tan \left(-\frac{\pi}{4} \right) + \cot \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -1 - 1 = -2$$

تمرین

۱- حد چپ و حد راست هر یک از تابع های زیر را در نقطه داده شده به دست آورید و معلوم کنید کدام یک از این توابع دارای حد است.

$$\text{الف) } f(x) = \begin{cases} -3x + 4, & x \geq 1 \\ 2x^2 + x, & x < 1 \end{cases}$$

$$\text{ب) } f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x-1}, & x \geq 2 \\ x^3 + 2, & x < 2 \end{cases}$$

$$\text{پ)} f(x) = \begin{cases} -4x^2 + 3, & x > \frac{1}{4} \\ 2x + 1, & x < \frac{1}{4} \end{cases}$$

$x = \frac{1}{4}$ در نقطه

$$\text{ت)} f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x > 2 \\ x+3, & x \leq 2 \end{cases}$$

$x = -2$ در نقطه

$$\text{ث)} f(x) = \begin{cases} 2 \sin x - 1, & x \geq \frac{\pi}{4} \\ \cos x + 1, & x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$x = \frac{\pi}{4}$ در نقطه

$$\text{ج)} f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+1}, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$$

$x = 0$ در نقطه

۲- حدهای زیر را حساب کنید.

$$\text{الف)} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} (4x - 5)$$

$$\text{ب)} \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \right)$$

$$\text{پ)} \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x - 3)$$

$$\text{ت)} \lim_{x \rightarrow 2} (-2x^3 + 3x^2 - x + 4)$$

$$\text{ث)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x+2}{x-2}$$

$$\text{ج)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2+1}{x^2+x+1}$$

$$\text{ح)} \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(-2x^2+1)^3}{x^2+1}$$

$$\text{خ)} \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x+2}{3x^2+4} \times \frac{\sqrt{x-1}}{x+1} \right)$$

$$\text{د)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (2 \sin x - 1)$$

$$\text{ز)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (\cos x + \sin^2 x + 1)$$

$$\text{ر)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin^2 x + \cos x)$$

$$\text{س)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{\cos x} \right)$$

$$\text{ش)} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \left(\sin \frac{\pi x}{4} \right)$$

$$\text{ح)} \lim_{x \rightarrow 2} \tan \left(\frac{\pi x}{3} \right)$$

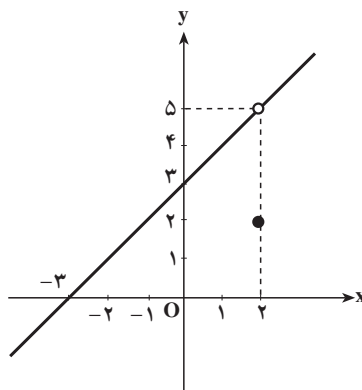
۳- از روی هر نمودار، حد راست و حد چپ تابع را، در نقطه داده شده تعیین کنید و مشخص

نمایید که کدام تابع حد دارد.

الف)
$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

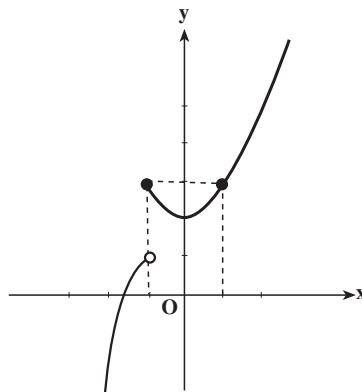
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$



ب)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \geq 1 \\ -x^2 + 2, & x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$



۴- دو تابع f و g به صورت $f(x) = x^2 - x - 2$ و $g(x) = \frac{1}{x-2}$ داده شده‌اند.

الف - حد هر یک از این دو تابع را در ۳ به دست آورید.

ب - تابع‌های $f+g$ و $f-g$ و $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را تعیین و حد هر یک از آن‌ها را در ۳ پیدا کنید.

پ - حد تابع‌های $(f(x))^3$ و $\sqrt[3]{f(x)}$ و $\frac{1}{g(x)}$ و $3g(x)$ را در ۳ تعیین کنید.

۵- اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 4$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -3$ باشد، حد هر یک از تابع‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$

ب) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x))$

پ) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$

ت) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

ث) $\lim_{x \rightarrow x_0} 2\sqrt{f(x)}$

ج) $\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x))^2$

۶- تابع $f(x) = \begin{cases} (a+1)x+3, & x > 2 \\ -2x^2+1, & x \leq 2 \end{cases}$ مفروض است. عدد a را چنان بیابید که در نقطه ۲- تابع حد داشته باشد.

۷- تابع $f(x) = \begin{cases} ax+2b, & x > 3 \\ ax^2+bx+2, & x < 3 \end{cases}$ مفروض است. عددهای a و b را چنان بیابید که $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$.

۸- در صورتی که $f(x+2) = \frac{x+4}{x}$ ، $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ را حساب کنید.

۹- هر یک از حدهای زیر را حساب کنید:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin(x - \frac{\pi}{6}) + \cos 2x + \sin \frac{x}{2}}{2 \tan \frac{x}{2} + \cos^2(x - \frac{\pi}{4})} \quad \text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \sin(x + \frac{\pi}{6}) \right) \quad \text{الف)}$$

توجه: اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ آن گاه حد تابع $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ را در x_0 ، نمی توان با استفاده از قضایای مطرح شده محاسبه نمود (چرا؟). برای تعیین مقدار این حد با توجه به نوع تابع های $f(x)$ و $g(x)$ ، روش های دیگری را می توان اختیار کرد.

مثال: حد تابع $q(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ را در ۲ می توان به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 2) = 4 - 6 + 2 = 0 \quad \text{چون}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 4 - 4 = 0 \quad \text{و}$$

برای یافتن حد تابع $q(x)$ با توجه به این که $x \neq 2$ داریم $x - 2 \neq 0$ و می توان نوشت:

$$q(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

پس:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

قضیه فشردگی: فرض کنید به ازای هر x از بازه‌ای مانند I که شامل نقطه x_0 است، مگر

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

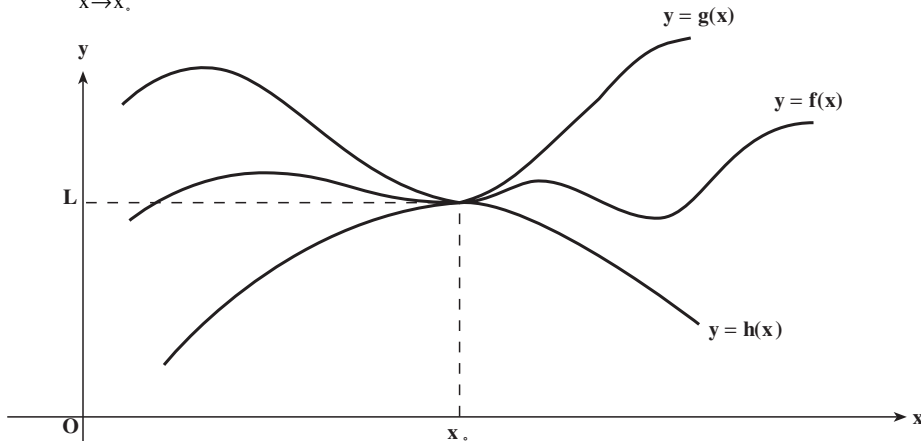
احتمالاً در x_0 داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$$

و

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

آن‌گاه:



$$3 - x^2 \leq f(x) \leq 3 + x^2$$

مثال: فرض کنید به ازای هر $x \neq 0$ داشته باشیم:

حد $f(x)$ را در $x = 0$ تعیین کنید.

$$\text{حل: چون } \lim_{x \rightarrow 0} (3 + x^2) = 3 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} (3 - x^2) = 3$$

بنابراین طبق قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$$

قضیه: اگر x برحسب رادیان باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

اثبات: در دایره‌ای مثلثاتی کمان $\widehat{AM}$ را مساوی

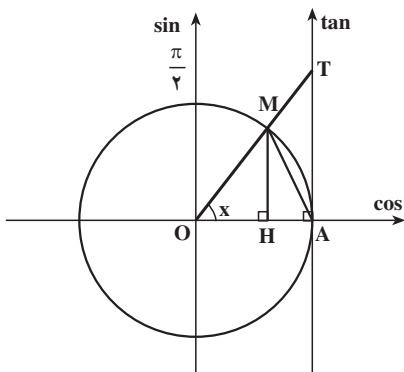
x رادیان ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) در نظر می‌گیریم. تصویر نقطه M

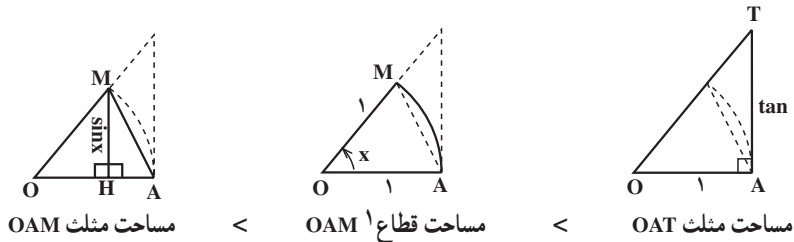
روی محور کسینوس‌ها را H و نقطه برخورد OM با

محور تانژانت‌ها را T می‌نامیم. می‌دانیم که $HM = \sin x$

و $AT = \tan x$ و $OA = 1$ است. با توجه به شکل آشکار

است که:





بنابراین

$$\frac{1}{2} OA \cdot MH < \frac{1}{2} \times 1 \times x < \frac{1}{2} OA \cdot AT$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \sin x < \frac{1}{2} \times 1 \times x < \frac{1}{2} \times 1 \times \tan x$$

$$\sin x < x < \tan x$$

از تقسیم نابرابری‌های بالا بر $\sin x$ که مثبت است خواهیم داشت:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

اما می‌دانیم که اگر a و b دو عدد مثبت و $a > b$ ، داریم $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ؛ اینک چون $\cos x > 0$ و

$\frac{x}{\sin x} > 0$ ، نابرابری‌های بالا را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

اما $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$. پس طبق قضیه فشردگی حد تابع $\frac{\sin x}{x}$ که بین این دو

تابع قرار دارد، برابر ۱ می‌شود. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

در حالتی که $0 < x < \frac{\pi}{2}$ نیز ثابت می‌شود که $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$ ، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

نکته: می‌دانیم که اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq 0$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$. بنابراین از $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

نتیجه می‌شود $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

۱- مساحت قطاع x رادیان در دایره‌ای به شعاع R برابر است با: $S_{\text{قطاع}} = \frac{1}{2} R^2 x$

نتیجه

۱- تابع $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم حد این تابع را در صفر تعیین کنیم.
حل: داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}$$

با توجه به این که $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \times 1 = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

۲- می‌خواهیم حد تابع $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$ را در صفر تعیین کنیم.

تابع $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$ را می‌توان به صورت $f(x) = 2 \times \frac{\sin 2x}{2x}$ نوشت. پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \times \frac{\sin 2x}{2x} \right) = 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2(1) = 2$$

به‌طور کلی ثابت می‌شود که:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan mx}{x} = m \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = m$$

مثال ۱: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \\ &= 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2(1)^2 = 2 \end{aligned}$$

حل: داریم:

مثال ۲: حد $\frac{\tan kx}{\cos kx \sin 2x}$ در $x = 0$ برابر ۲ است. مقدار k را تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan kx}{\cos kx \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\cos^2 kx \sin 2x}$$

حل: داریم:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 kx} \times \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}} \\ &= 1 \times \frac{k}{2} = \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{k}{2} = 2 \Rightarrow k = 4 \end{aligned}$$

مثال ۳: برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(2x - \frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{6}}$ فرض می‌کنیم $x - \frac{\pi}{6} = t$ ، در این صورت

$$2x - \frac{\pi}{3} = 2(x - \frac{\pi}{6}) = 2t$$

خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(2x - \frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{t} = 2$$

تمرین

۱- هریک از حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3x} \sin \frac{3}{2}x$

پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x - \pi)}{x - \frac{\pi}{3}}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \tan 3x}{3x^2}$

ج) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x^2 - a^2}$

ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{4x - \pi}$

ح) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin 2x \sin 3x}{x^3}$

خ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

۲- اگر به ازای هر x داشته باشیم $2 \cos x \leq g(x) \leq 2 - x^2$ ، حد تابع $g(x)$ را در $x = 0$ تعیین کنید.

۳- فرض کنید به ازای $-1 \leq x \leq 1$ داشته باشیم:

$$\sqrt{5 - 2x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{5 - x^2}$$

حد تابع $f(x)$ را در $x = 0$ تعیین کنید.

۴- حد تابع $f(x) = |x|$ را در $x = 0$ تعیین کنید.

نکات زیر در محاسبه برخی از حدها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱- بخش‌پذیری چند جمله‌ای‌ها بر $x - x_0$: اگر چند جمله‌ای $1 + \dots + bx^{n-1} + ax^n$ به

ازای $x = x_0$ برابر صفر شود (x_0 ریشه چندجمله‌ای باشد)، چند جمله‌ای بر $x - x_0$ بخش پذیر است (از این خاصیت برای تجزیه چند جمله‌ای می‌توان استفاده کرد).

مثال ۱: چند جمله‌ای $2x^2 + x - 3$ به ازای $x = 1$ برابر با صفر است، پس این چند جمله‌ای بر $x - 1$ بخش پذیر است.

$$x = 1 \xrightarrow{\text{در چند جمله‌ای}} 2(1)^2 + (1) - 3 = 2 + 1 - 3 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 + x - 3 & x - 1 \\ -2x^2 + 2x & \\ \hline 3x - 3 & \\ -3x + 3 & \\ \hline 0 & \end{array} \Rightarrow 2x^2 + x - 3 = (x - 1)(2x + 3)$$

مثال ۲: چند جمله‌ای $x^3 + 7x^2 + 4x - 12$ به ازای $x = -2$ برابر صفر است، پس بر $x + 2$ بخش پذیر می‌باشد.

$$x = -2 \xrightarrow{\text{در چند جمله‌ای}} (-2)^3 + 7(-2)^2 + 4(-2) - 12 = -8 + 28 - 8 - 12 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 7x^2 + 4x - 12 & x + 2 \\ -x^3 - 2x^2 & \\ \hline 9x^2 + 4x - 12 & \\ -9x^2 - 18x & \\ \hline 22x - 12 & \\ -22x - 44 & \\ \hline -32 & \end{array} \Rightarrow x^3 + 7x^2 + 4x - 12 = (x + 2)(x^2 + 5x - 6)$$

و چون $x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$ ، پس:

$$x^3 + 7x^2 + 4x - 12 = (x + 2)(x + 6)(x - 1)$$

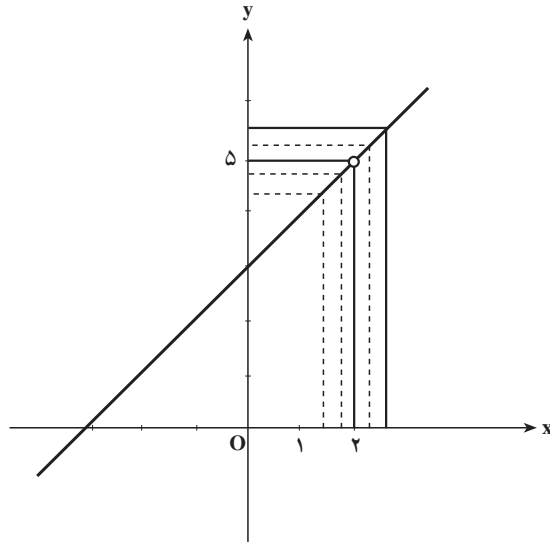
اینک چند نمونه از حدهایی را که به کمک بخش پذیری چند جمله‌ای‌ها بر $x - x_0$ محاسبه می‌شوند در زیر می‌آوریم:

مثال ۱: حد تابع $q(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ را در $x = 2$ تعیین کنید.

حل: چون صورت و مخرج کسر در $x = 2$ برابر صفرند پس بر $x - 2$ بخش پذیرند، یعنی دارای عامل مشترک $x - 2$ می‌باشند، و چون $x \neq 2$ داریم $x - 2 \neq 0$ و می‌توان این عامل مشترک را از صورت و مخرج حذف نمود؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$q(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = x + 3 \quad \text{و} \quad x \neq 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 2 + 3 = 5 \quad \text{و از آنجا:}$$



نمودار تابع $q(x) = x + 3$ ، $x \neq 2$ یا $y = x + 3$ ، $x \neq 2$ نیز نشان می‌دهد که حد تابع

$$q(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} \text{ در } x = 2 \text{ برابر } 5 \text{ است.}$$

$$\text{مثال ۲: حد تابع } q(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 3}{x^2 - x - 2} \text{ را در } x = 1 \text{ به دست آورید.}$$

حل: چون صورت و مخرج کسر در $x = -1$ صفر می‌شوند، پس بر $x + 1$ بخش‌پذیرند و

خواهیم داشت:

$$\frac{2x^3 + x^2 + 2x + 3}{x^2 - x - 2} = \frac{(x+1)(2x^2 - x + 3)}{(x+1)(x-2)} = \frac{2x^2 - x + 3}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 3}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x + 3}{x - 2} = \frac{2(-1)^2 - (-1) + 3}{(-1) - 2} = \frac{6}{-3} = -2$$

۲- گویا کردن کسرها: اگر تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ ، یکی یا هر دو، اصم باشند و حد آن‌ها در

$x = x_0$ برابر صفر باشد، آن‌گاه برای محاسبه حد تابع $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ در $x = x_0$ صورت یا مخرج یا هر

دو را گویا می‌کنیم.

به مثال‌های زیر توجه کنید.

$$\text{مثال ۱: حد تابع } f(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \text{ در } x = 0 \text{ چگونه به دست می‌آید؟}$$

حل: ابتدا با محاسبه مقدار $f(x)$ برای برخی از مقادیر x که به عدد صفر نزدیک می شوند جدول زیر را تشکیل می دهیم.

x	...	-1	-0.9	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	...	0	...	0.001	0.01	0.1	0.5	0.9	1	...
$f(x)$	...	0.2679	0.2659	0.2583	0.2516	0.2502	0.25002	...	0	...	0.2499	0.2498	0.248	0.241	0.237	0.236	...

این جدول نشان می دهد که در $x = 0$ حد تابع $\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ برابر $\frac{1}{4}$ است.

از طرفی چون حد صورت و مخرج کسر بالا در $x = 0$ برابر صفر است پس برای تعیین حد تابع

از گویا کردن صورت کسر استفاده می کنیم. بدین منظور کسر را در $1 = \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}$ ضرب می کنیم.

خواهیم داشت:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{(x+4)-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$f(x) = \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}, \quad x \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}$$

مثال ۲: حد تابع $q(x) = \frac{x^2-9}{3-\sqrt{x+6}}$ در $x = 3$ به صورت زیر به دست می آید.

حل: چون حد صورت و مخرج کسر در $x = 3$ صفر است پس برای تعیین حد تابع، مخرج کسر را گویا می کنیم.

$$\frac{x^2-9}{3-\sqrt{x+6}} = \frac{(x^2-9)(3+\sqrt{x+6})}{(3-\sqrt{x+6})(3+\sqrt{x+6})} = \frac{(x-3)(x+3)(3+\sqrt{x+6})}{3-x}$$

$$= -(x+3)(3+\sqrt{x+6})$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{3-\sqrt{x+6}} = \lim_{x \rightarrow 3} -(x+3)(3+\sqrt{x+6})$$

$$= -(3+3)(3+\sqrt{9}) = -36$$

مثال ۳: حد تابع $q(x) = \frac{2-\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}-3}$ را در $x = 5$ به دست آورید.

حل: برای تعیین حد، هم صورت کسر و هم مخرج کسر را گویا می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\frac{2-\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}-3} &= \frac{(2-\sqrt{x-1})(\sqrt{2x-1}+3)(2+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{2x-1}-3)(\sqrt{2x-1}+3)(2+\sqrt{x-1})} = \frac{(4-x+1)(\sqrt{2x-1}+3)}{(2x-1-9)(2+\sqrt{x-1})} \\ &= \frac{-(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2(x-5)(2+\sqrt{x-1})} = \frac{-(\sqrt{2x-1}+3)}{2(2+\sqrt{x-1})} \quad (x \neq 5) \\ \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2-\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}-3} &= \lim_{x \rightarrow 5} -\frac{\sqrt{2x-1}+3}{2(2+\sqrt{x-1})} = -\frac{\sqrt{10-1}+3}{2(2+\sqrt{5-1})} = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}\end{aligned}$$

تمرین

هریک از حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-5x+4}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$

ث) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2+x^2+x+3}{x^2+2x+1}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$

چ) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2-12}{2-x-x^2}$

ح) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1}$

خ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-2x+1}{2x^2-3x+1}$

د) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+\sqrt{x+6}}{x+2}$

ذ) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{4-x}$

ر) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}}$

ز) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x+5}{\sqrt{3x+16}-1}$

ژ) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+\sqrt{x+18}}{\sqrt{3x+7}-1}$

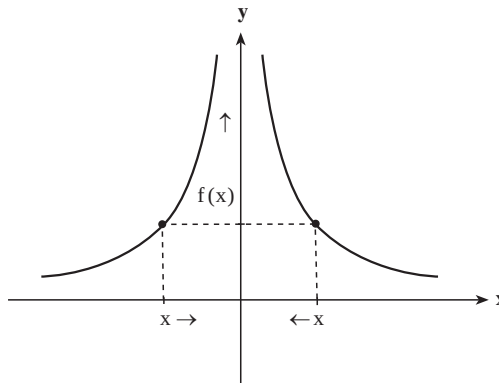
تعمیم حد

می‌دانیم تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ در صفر تعریف نشده است و برای رسم نمودار آن در حوالی صفر بهتر است رفتار این تابع را در حوالی صفر بررسی کنیم. به ازای مقدارهای نزدیک صفر برای x روشن است که مقدارهای $\frac{1}{|x|}$ بسیار بزرگ می‌شوند و هرچه مقدارهای x را به صفر نزدیک‌تر کنیم

مقدارهای $\frac{1}{|x|}$ بزرگتر خواهند شد. جدول زیر درستی این مطلب را نشان می‌دهد.

$\frac{x}{ x }$	$-\infty/1$	$-\infty/0.1$	$-\infty/0.01$	$\rightarrow \infty \leftarrow \infty/0.01$	$\infty/0.1$	$\infty/1$
$\frac{1}{ x }$	1^0	1^{00}	1^{000}	$\rightarrow \leftarrow 1^{000}$	1^{00}	1^0

از طریق این جدول می‌توان تشخیص داد که نمودار این تابع در حوالی صفر به شکل زیر است.



با نزدیک شدن متغیر x (در دامنه تابع) به صفر مقدارهای $\frac{1}{|x|}$ بزرگ می‌شوند به گونه‌ای که $\frac{1}{|x|}$ می‌تواند از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر شود به شرط آن که x به اندازه کافی به صفر نزدیک شده باشد. در این حالت گوییم با نزدیک شدن x به صفر، $\frac{1}{|x|}$ به سمت $+\infty$ می‌رود و حد این تابع در صفر $+\infty$ است و می‌نویسیم:

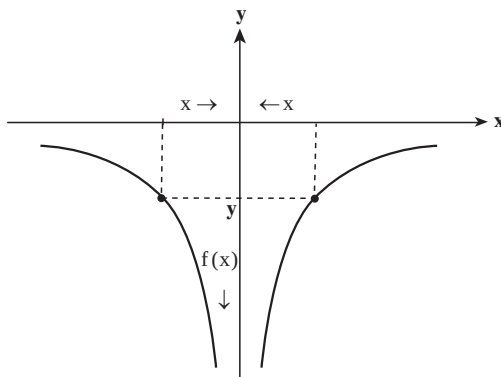
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

به‌طور کلی برای هر تابع $y = f(x)$ که روی بازه I تعریف شده باشد و نقطه a به گونه‌ای باشد که بتوان از داخل I به a نزدیک شد و با نزدیک شدن متغیر x (در دامنه تابع) به a مقدارهای $f(x)$ بزرگ می‌شوند به گونه‌ای که $f(x)$ بتواند از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر شود به شرط آن که x به اندازه کافی به a نزدیک شده باشد. در این حالت می‌گوییم با نزدیک شدن x به a ، $f(x)$ به سمت $+\infty$ می‌رود و حد این تابع در a ، $+\infty$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

در برخی موارد با نزدیک شدن متغیر x (در دامنه یک تابع) به نقطه‌ای مانند a مقدارهای تابع

از هر عدد از پیش داده شده‌ای کمتر می‌شوند. مثلاً در مورد تابع $y = -\frac{1}{|x|}$ با نزدیک شدن x به صفر مقادیر تابع از هر عدد از پیش داده شده‌ای کمتر می‌شوند. نمودار این تابع به شکل زیر است.



در چنین حالتی می‌گویند با نزدیک شدن x به a ، $f(x)$ به سمت $-\infty$ می‌رود و حد این تابع در a ، $-\infty$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

$$\text{برای مثال } \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{|x|} = -\infty$$

در حالتی که a یک نقطه میانی دامنه تابع باشد و متغیر x فقط با مقادیر بزرگ‌تر از a به a نزدیک شود و مقادیر تابع $f(x)$ از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر شوند می‌گوییم حد راست تابع در a ، $+\infty$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

و اگر متغیر x فقط با مقادیر کوچک‌تر از a به a نزدیک شود و مقادیر تابع $f(x)$ از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر شوند می‌گوییم حد چپ تابع در a ، $+\infty$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

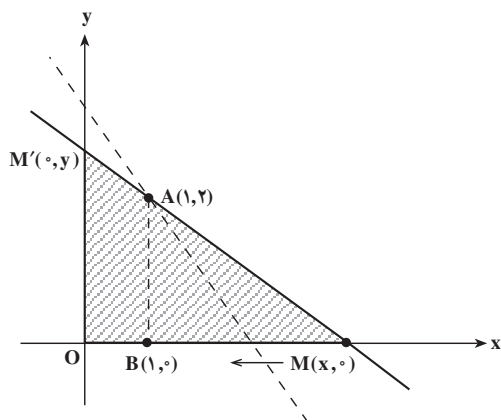
به‌طور مشابه حدهای راست و چپ با مقدار $-\infty$ تعریف می‌شوند.

برای مثال برای تابع $y = \frac{1}{x}$ داریم:

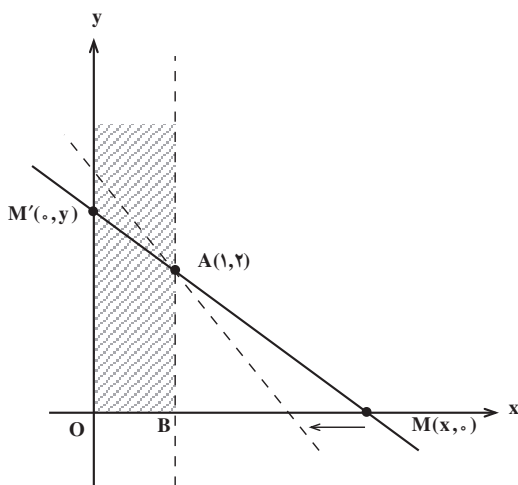
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

مثال ۱: در دستگاه مختصات xoy ، از نقطه $A = (1, 2)$ خطی رسم می‌کنیم تا

محور x ها را در نقطه $M = (x, 0)$ ، $x > 1$ ؛ و محور y ها را در نقطه $M' = (0, y)$ قطع کند. مساحت مثلث OMM' را به $S_{OMM'}$ نشان می‌دهیم. (شکل زیر)



وقتی خط مذکور حول نقطه A چنان دوران کند که نقطه M به نقطه $B(1, 0)$ نزدیک شود، مساحت مثلث تغییر می‌کند (درواقع x از طرف راست به عدد 1 نزدیک می‌شود ولی همواره $x \neq 1$ است زیرا اگر $x = 1$ باشد، مثلثی وجود نخواهد داشت).



با استفاده از تشابه دو مثلث OMM' و ABM می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{BM}{OM} = \frac{AB}{OM'} \Rightarrow \frac{x-1}{x} = \frac{2}{y} \Rightarrow y = \frac{2x}{x-1}$$

بنابراین مساحت مثلث OMM' برابر است با :

$$S_{OMM'} = \frac{1}{2} OM \cdot OM' = \frac{1}{2} x \cdot y = \frac{1}{2} x \times \frac{2x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$$

$$S_{OMM'} = f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

حال اگر x (که بزرگ‌تر از ۱ است) از طرف راست به ۱ نزدیک شود، خواهیم داشت :

x	1	←	...	←	1/00001	1/0001	1/001	1/01	1/1	1/5	2	...
$f(x)$	$+\infty$	←	...	←	100002	10002	1002	102	12/1	4/5	4	...

به‌طوری که دیده می‌شود، با نزدیک شدن x به عدد ۱ مقدار $f(x)$ افزایش می‌یابد و هرگاه x به قدر کافی به عدد ۱ نزدیک شود، مقدار $f(x)$ از هر عدد مثبت از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر خواهد شد. پس بنا به تعریف، می‌گوییم $f(x)$ به سمت $+\infty$ می‌رود. یعنی :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} S_{OMM'} = +\infty$$

مثال ۲: تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) را در نظر می‌گیریم و مقدارهای $f(x)$ را برای x هایی که به

صفر نزدیک می‌شوند محاسبه می‌کنیم و در جدول زیر می‌نویسیم.

x	...	-1	-0/2	-0/1	-0/01	-0/001	-0/0001	...	→	0	...	0/0001	0/001	0/01	0/1	0/2	1	...
$f(x)$	...	1	25	102	104	106	108	...	→	$+\infty$	...	108	106	104	102	25	1	...

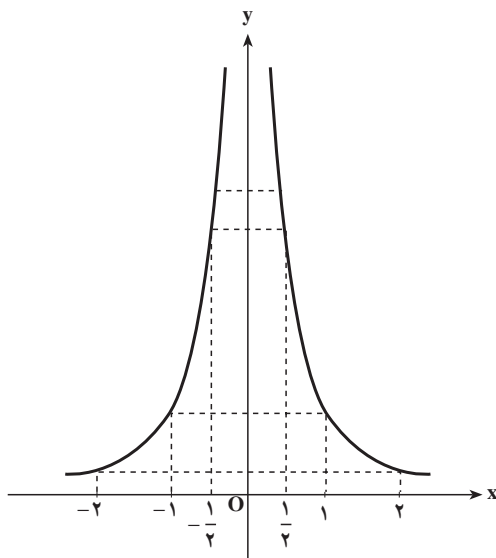
به‌طوری که دیده می‌شود وقتی x از طرف راست یا چپ به عدد صفر نزدیک می‌شود، مقادیر $f(x)$ به تدریج بزرگ می‌شوند و اگر x به عدد صفر بسیار نزدیک شود، مقدار $f(x)$ نیز بسیار بزرگ خواهد شد. بنابراین تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ وقتی x به صفر نزدیک می‌شود، به سمت $+\infty$ می‌رود و می‌نویسیم :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

اینک با استفاده از نمودار، حد این تابع را در $x = 0$ بررسی می‌کنیم.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	$\frac{1}{4}$	1	4	تعریف نشده	4	1	$\frac{1}{4}$

نمودار تابع نیز نشان می‌دهد که وقتی x به صفر نزدیک می‌شود، $f(x)$ به سمت $+\infty$ می‌رود.



مثال ۳: حد تابع $f(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}$ را در $x=2$ تعیین کنید.

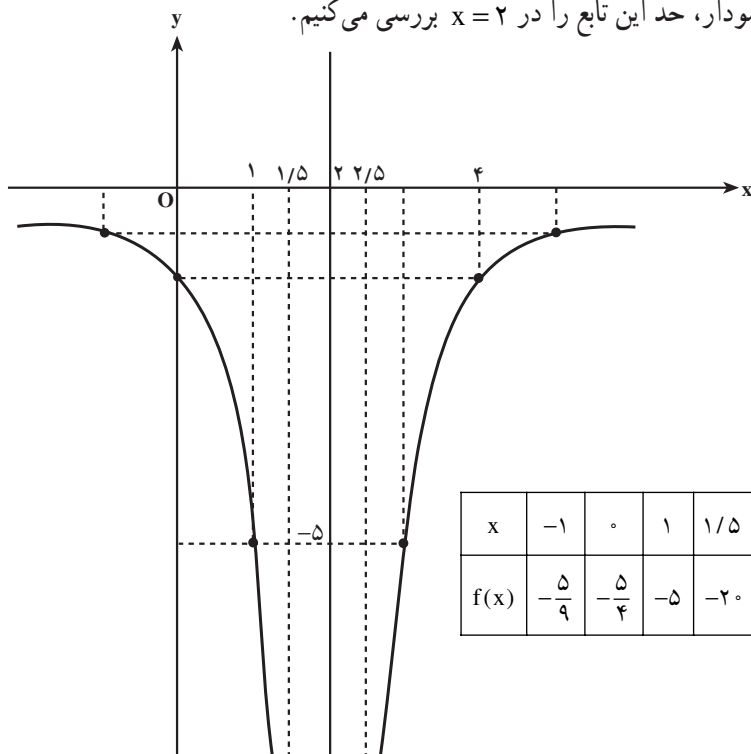
حل: جدول زیر مقدارهای تابع را برای بعضی از مقدارهای x نزدیک عدد ۲ نشان می‌دهد.

x	$\dots$	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	$\dots \rightarrow$	۲	$\dots \leftarrow$	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱	۲/۵	۳	$\dots$
$f(x)$	$\dots$	-۵	-۲۰	-۵۰۰	-5×10^4	-5×10^6	$\dots \rightarrow$	$-\infty$	$\dots \leftarrow$	5×10^6	5×10^4	-۵۰۰	-۲۰	-۵	$\dots$

به طوری که دیده می‌شود وقتی x از طرف راست یا چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شود، مقدارهای $f(x)$ به تدریج کم می‌شوند، و وقتی x به قدر کافی به عدد ۲ نزدیک شود، $f(x)$ از هر عدد منفی داده شده‌ای کمتر خواهد شد. بنابراین، بنا به تعریف می‌توان گفت که در تابع بالا وقتی x به ۲ نزدیک می‌شود، $f(x)$ به سمت $-\infty$ می‌رود و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5}{(x-2)^2} = -\infty$$

اینک با استفاده از نمودار، حد این تابع را در $x=2$ بررسی می‌کنیم.



x	-1	0	1	1/5	2	2/5	3	4
f(x)	$-\frac{5}{9}$	$-\frac{5}{4}$	-5	-20	تعریف نشده	-20	-5	$-\frac{5}{4}$

نمودار تابع نیز نشان می‌دهد که وقتی x به عدد 2 نزدیک می‌شود، $f(x)$ به سمت $-\infty$ می‌رود.

مثال 4: برای یافتن حد $f(x) = \frac{1}{x-1}$ در $x=1$ جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	0	0/5	0/9	0/99	0/999	...	→	1		←	...	1/001	1/01	1/1	1/5	2	...
f(x)	-1	-2	-10	-100	-1000	...	→	-∞	+∞	←	...	1000	100	10	2	1	...

به‌طوری که دیده می‌شود، هنگامی که x از طرف چپ به عدد 1 نزدیک می‌شود، مقادیر $f(x)$ به‌تدریج کم می‌شوند و وقتی x به اندازه کافی به عدد 1 نزدیک شود، $f(x)$ از هر عدد منفی داده شده‌ای کمتر خواهد شد. پس $f(x)$ به سمت $-\infty$ می‌رود یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

وقتی x از طرف راست به عدد 1 نزدیک می‌شود، مقادیر $f(x)$ به‌تدریج بزرگ می‌شوند و هنگامی که x به عدد 1 به اندازه کافی نزدیک شود، مقدار $f(x)$ از هر عدد داده شده‌ای بزرگ‌تر

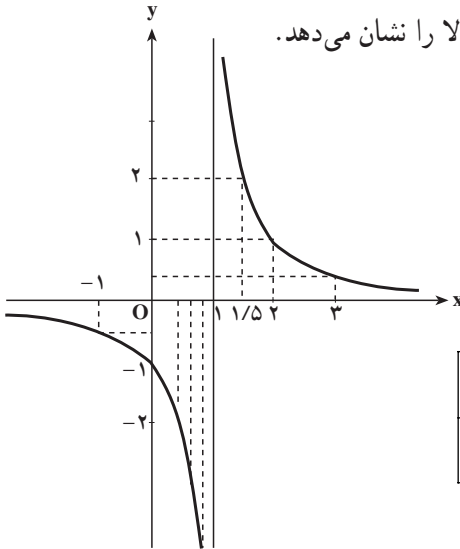
خواهد شد. پس $f(x)$ به سمت $+\infty$ می‌رود. یعنی در این حالت :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

بنابراین در تابع $f(x) = \frac{1}{x-1}$ وقتی x به عدد ۱ نزدیک می‌شود داریم :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(f(x) = \frac{1}{x-1} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(f(x) = \frac{1}{x-1} \right) = +\infty$$

نمودار تغییرات تابع نیز درستی محاسبات بالا را نشان می‌دهد.



x	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	۲	۳
f(x)	$-\frac{1}{2}$	-۱	-۲	تعریف نشده	۲	۱	$\frac{1}{2}$

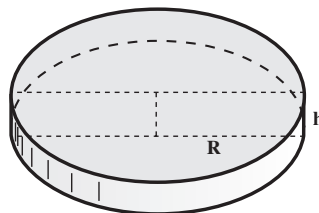
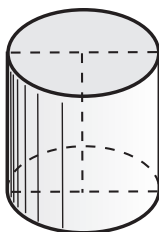
مثال ۵: استوانه‌ای به حجم ثابت V داده شده است. شعاع قاعده استوانه را R و ارتفاع آن را h می‌نامیم. می‌خواهیم تغییرات ارتفاع استوانه را هنگامی که شعاع قاعده استوانه تغییر می‌کند، بررسی کنیم.

می‌دانیم که :

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم استوانه}$$

بنابراین :

$$V = \pi R^2 \times h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi R^2}$$



اما دامنه تغییرات R بازه $(0, +\infty)$ است بنابراین :

$$\lim_{R \rightarrow 0^+} h = \lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{V}{\pi R^2} = +\infty$$

پس دو کمیت R و h چنان به یکدیگر وابسته‌اند که هرگاه R به صفر نزدیک شود h به سمت $+\infty$ می‌رود.

مثال ۶: حد دو تابع $f_1(x) = x - 3$ و $f_2(x) = \frac{1}{f_1(x)} = \frac{1}{x-3}$ را در $x = 3$ با محاسبه مقادیر $f_1(x)$ و $f_2(x)$ متناظر با x های نزدیک ۳ به کمک جدول زیر تعیین می‌کنیم.

x	$\dots 1 \quad 2 \quad 2/5 \quad 2/9 \quad 2/99 \quad 2/999 \dots \rightarrow$	3	$\leftarrow \dots 3/001 \quad 3/01 \quad 3/1 \quad 3/5 \quad 4 \dots$
$x-3$	$\dots -1 \quad -0/5 \quad -0/1 \quad -0/01 \quad -0/001 \dots \rightarrow$	0	$\leftarrow \dots 0/001 \quad 0/01 \quad 0/1 \quad 0/5 \quad 1 \dots$
$\frac{1}{x-3}$	$\dots -1 \quad -2 \quad -10 \quad -100 \quad -1000 \dots \rightarrow$	$-\infty$	$+\infty \leftarrow \dots 1000 \quad 100 \quad 10 \quad 2 \quad 1 \dots$

به‌طوری که دیده می‌شود $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$ اما $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = +\infty$ یا $-\infty$ ، بنابر آن که x از طرف راست یا از طرف چپ به ۳ نزدیک شود.

نکته: می‌دانیم که $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. ارتباط این‌گونه حدها در ماهیت کسرها نهفته است که وقتی مخرج کسر کوچک‌تر می‌شود، مقدار کسر بزرگ‌تر می‌گردد. بنابراین می‌توانیم چنین نتیجه بگیریم که :

الف - هرگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ و همواره $f(x) > 0$ (یعنی $f(x)$ با مقادیر مثبت به صفر نزدیک شود)، آن‌گاه :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

ب - هرگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ و همواره $f(x) < 0$ ، یعنی $f(x)$ با مقادیر منفی به صفر نزدیک شود، آن‌گاه :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

به مثال‌های زیر توجه کنید :

$$\text{الف)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\text{ب)} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\text{پ)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{x} = -\infty$$

$$\text{ت)} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{x} = +\infty$$

$$\text{ث)} \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{4}{(x+3)^2} = +\infty$$

$$\text{ج)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-11}{(x-2)^2} = -\infty$$

$$\text{چ)} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{5}{(x-3)^3} = -\infty$$

تمرین

هر یک از حدهای زیر را به دست آورید.

$$\text{الف)} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+3}{x-1}$$

$$\text{ب)} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2}$$

$$\text{پ)} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4x}{(x+2)^2}$$

$$\text{ت)} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$\text{ث)} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x+3}{(x-3)^2}$$

$$\text{ج)} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+3}{(x-2)^3}$$

$$\text{چ)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+5}{x^2-4}$$

$$\text{ح)} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4}{2x-1}$$

$$\text{خ)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^4}$$

$$\text{د)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^4}$$

$$\text{ذ)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x^2-9}$$

$$\text{ر)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5x^2}{x^2-1}$$

$$\text{ز)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$$

$$\text{س)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan^2 x$$

$$\text{ش)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$$

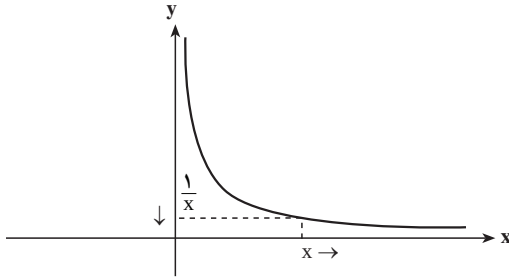
$$\text{ص)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \cot^3 x$$

$$\text{ض)} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sin x}$$

$$\text{ط)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{ظ)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x}$$

$$\text{ع)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan x + \sqrt{3}}{\tan x - \sqrt{3}}$$



اگر تابعی مانند $y = f(x)$ در بازه‌ای مانند

$(a, +\infty)$ تعریف شده باشد و بخواهیم چگونگی

نمودار آن را برای مقادیر بزرگ x تشخیص دهیم.

باید با بزرگ شدن مقادیر x تشخیص دهیم $f(x)$

چگونه تغییر می‌کند. برای مثال برای تابع $y = \frac{1}{x}$ با بزرگ شدن مقادیر x ، مقدارهای $\frac{1}{x}$ کوچک

می‌شوند و به صفر نزدیک می‌شوند. نمودار این تابع برای مقادیر بزرگ x به شکل بالا است.

در این مورد می‌گویند با رفتن x به سمت $+\infty$ مقدار تابع $y = \frac{1}{x}$ به صفر نزدیک می‌شود.

به طور کلی برای هر تابع $y = f(x)$ که روی بازه $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد و با بزرگ شدن متغیر x

مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی مانند L نزدیک شوند به گونه‌ای که $f(x)$ بتواند به هر مقدار که بخواهیم

به L نزدیک شود به شرط آن که x به اندازه کافی بزرگ شده باشد، در این حالت می‌گوییم با رفتن x

به سمت $+\infty$ ، $f(x)$ به سمت L نزدیک می‌شود و حد این تابع در $+\infty$ برابر L است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

$$\text{برای مثال: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

همچنین اگر تابعی مانند $y = f(x)$ در بازه‌ای مانند $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد و بخواهیم

چگونگی نمودار آن را برای مقادیر منفی از لحاظ قدر مطلق بزرگ x تشخیص

دهیم، باید با کم شدن مقادیر x در اعداد منفی، تشخیص دهیم $f(x)$ چگونه تغییر می‌کند. برای مثال

برای تابع $y = \frac{1}{|x|}$ با کم شدن مقادیر x در اعداد منفی

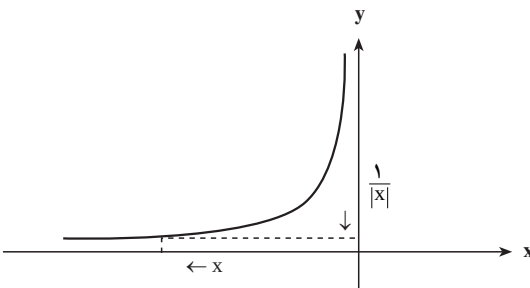
و بزرگ شدن آن‌ها از لحاظ قدر مطلق، مقدارهای $\frac{1}{|x|}$

کوچک می‌شوند و به صفر نزدیک می‌شوند. نمودار

این تابع برای مقادیر بزرگ x به شکل مقابل است.

در این مورد می‌گویند با رفتن x به سمت

$-\infty$ مقدار تابع $y = \frac{1}{|x|}$ به صفر نزدیک می‌شود.



به طور کلی برای هر تابع $y = f(x)$ که روی بازه $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد و با کم شدن

مقادیر x در اعداد منفی، مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی مانند L نزدیک شوند به گونه‌ای که $f(x)$ بتواند به هر مقدار که بخواهیم به L نزدیک شود به شرط آن که x به اندازه کافی در اعداد منفی کم شده باشد، در این حالت می‌گوییم با رفتن x به سمت $-\infty$ ، $f(x)$ به سمت L نزدیک می‌شود و حد این تابع در $-\infty$ برابر L است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

برای مثال: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$

مثال ۱: سببی را به‌طور برابر میان دو نفر تقسیم می‌کنیم. به هر یک نصف سبب می‌رسد. اگر ۲ سبب را میان ۳ نفر به تساوی تقسیم کنیم به هر یک $\frac{2}{3}$ سبب می‌رسد و از تقسیم ۳ سبب میان ۴ نفر، سهم هر یک $\frac{3}{4}$ سبب می‌شود. این تقسیم را با افزودن یک سبب در مقابل افزایش یک نفر ادامه می‌دهیم. هنگامی که شماره نفرات به ۱۰۰ می‌رسد تعداد سبب‌ها ۹۹ تاست و سهم هر نفر $\frac{99}{100} = 0.99$ می‌شود و وقتی شماره نفرات ۱۰۰۰ باشد شماره سبب‌ها ۹۹۹ و سهم هر نفر $\frac{999}{1000} = 0.999$ است. آشکار است هر قدر شماره نفرات بیش‌تر شود سهم هر نفر بیش‌تر می‌شود. اگر این روند را همچنان ادامه دهیم سرانجام سهم هر نفر چه خواهد شد؟ اگر شماره نفرات را با x و سهم هر نفر را که تابعی از x است با $f(x)$ نشان دهیم خواهیم داشت:

$$f(x) = \frac{x-1}{x}$$

پاسخ نهایی، یافتن حد تابع f در $+\infty$ است، این مطلب را با تشکیل یک جدول بررسی و جواب را پیدا کنید.

مثال ۲: تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نظر می‌گیریم و مقادیر $f(x)$ را برای x های به‌قدر کافی بزرگ محاسبه می‌کنیم و در جدول زیر می‌نویسیم.

x	...	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	...	$\rightarrow$	$+\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	...	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱	...	$\rightarrow$	۰

این جدول نشان می‌دهد که وقتی x به سمت $+\infty$ می‌رود $\frac{1}{x}$ به صفر نزدیک می‌شود. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

همچنین مقادیر $f(x)$ برای x های منفی که از لحاظ قدرمطلق بزرگ هستند را محاسبه و در جدول

زیر می‌نویسیم:

x	$-\infty$	$\leftarrow$	$\dots$	-100000	-10000	-1000	-100	-10	$\dots$
$f(x)$	0	$\leftarrow$	$\dots$	$-0/000001$	$-0/00001$	$-0/0001$	$-0/001$	$-0/01$	$\dots$

به‌طوری که دیده می‌شود وقتی x به سمت $-\infty$ می‌رود، $\frac{1}{x}$ به 0 نزدیک می‌شود یعنی

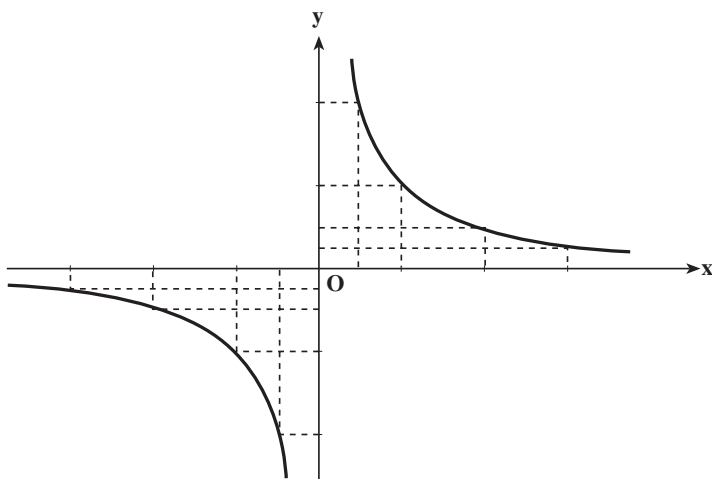
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

بنابراین داریم:

نمودار تابع نیز نشان می‌دهد که در x های مثبت بزرگ و x های منفی از لحاظ قدرمطلق بزرگ،

$f(x)$ به 0 نزدیک می‌شود.



x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	تعریف نشده	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$

مثال ۳: در تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ مقادیر تابع را برای مقدارهایی از x که در جدول زیر نوشته ایم محاسبه می کنیم و در جای خود می نویسیم و از روی آن حد تابع را در $+\infty$ در $-\infty$ مشخص می کنیم.

x	$-\infty$	$\leftarrow \dots -1000000 -100000 -10000 -1000 -100 -100000000 \dots \rightarrow$	$+\infty$
$f(x)$	2	$\leftarrow \dots 2/000005 2/00005 2/0005 2/05 -\frac{1}{2} 1/951 1/995 1/9995 1/99995 \dots \rightarrow$	2

جدول بالا نشان می دهد که :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2$$

نکته: دیدیم که $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ است. همچنین $\lim_{t \rightarrow 0} t = 0$ پس اگر $t = \frac{1}{x}$

خواهیم داشت :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} t = 0$$

به این ترتیب با استفاده از این تعویض متغیر می توان محاسبه حد در ∞ را به محاسبه حد در صفر ($t \rightarrow 0$) بازگردانید.

اینک با استفاده از مطلب بالا حد $\frac{2x-1}{x+2}$ را در $\pm\infty$ به دست می آوریم.

$$\frac{2x-1}{x+2} = \frac{x(2-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}, \quad x \neq 0$$

$$\frac{1}{x} = t \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2-t}{1+2t} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

بنابراین حد کسر بالا در $\pm\infty$ برابر با ۲ است.

مثال ۴: حد $\frac{6x-1}{2x+3}$ را در $\pm\infty$ تعیین کنید.

می توان نوشت :

$$\frac{6x-1}{2x+3} = \frac{x(6-\frac{1}{x})}{x(2+\frac{3}{x})} = \frac{6-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}, \quad \frac{1}{x} = t$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x-1}{2x+3} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{6-t}{2+3t} = \frac{6-\infty}{2+\infty} = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x-1}{2x+3} = 3$$

مثال ۵: کسر $\frac{-2x^2+x-1}{x^2+7x+2}$ داده شده است. می‌خواهیم حد این کسر را در ∞ تعیین کنیم.

$$\frac{-2x^2+x-1}{x^2+7x+2} = \frac{x^2(-2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^2})} \quad \text{چون } x \neq 0 \text{ است،}$$

$$\frac{1}{x} = t \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2+t-t^2}{1+7t+2t^2} = \frac{-2+0-0}{1+0+0} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2+x-1}{x^2+7x+2} = -2$$

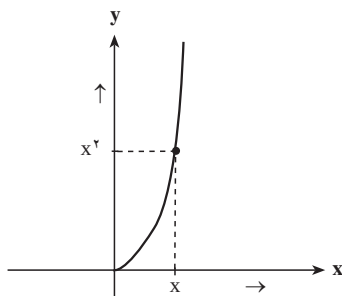
مثال ۶: حد $\frac{3x+1}{x+\sqrt{x+1}}$ را در $+\infty$ ، تعیین می‌کنیم.

$$\frac{3x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \frac{x(3+\frac{1}{x})}{x(1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}})} \quad , \quad \frac{1}{x} = t \quad , \quad 0 < t$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{3+t}{1+\sqrt{t+t^2}} = \frac{3}{1} = 3$$

در محاسبه حد توابع در $+\infty$ و $-\infty$ ممکن است با بزرگ شدن مقادیر x ، مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک نشوند و مقادیر $f(x)$ نیز بزرگ شوند و از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر شوند. مثلاً در مورد تابع $y = x^2$ وضعیت به همین شکل است و با بزرگ شدن x ، مقدار x^2 نیز بزرگ می‌شود و از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر می‌شود. نمودار تابع نیز این مطلب را نشان

می‌دهد.



این به معنای آن است که با رفتن x به سمت $+\infty$ ، x^2 نیز به سمت $+\infty$ می‌رود. در حالت کلی برای یک تابع f که در یک بازه $(a, +\infty)$ تعریف شده است اگر با رفتن x به سمت $+\infty$ ، $f(x)$ نیز به سمت $+\infty$ برود. گوئیم حد این تابع در $+\infty$ ، $+\infty$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

برای مثال $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

اما اگر با رفتن x به سمت $+\infty$ ، $f(x)$ به سمت $-\infty$ برود. گوئیم حد این تابع در $+\infty$ ، $-\infty$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

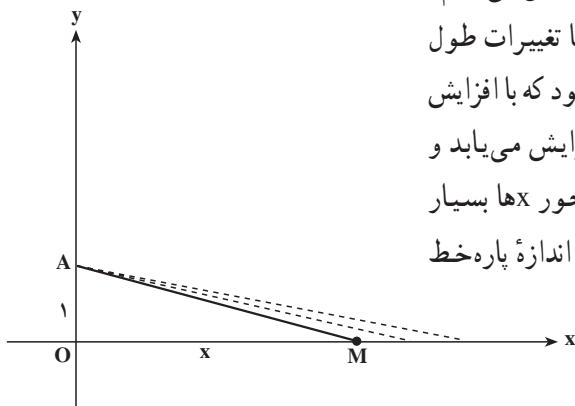
برای مثال $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$. به شکل مشابه مفاهیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ تعریف می‌شوند. مثلاً $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$.

مثال ۱: نقطه ثابت A را به عرض ۱ روی محور y ها و نقطه متغیر M را به طول x ($x > 0$) روی

محور طول‌ها در نظر گرفته از A به M وصل می‌کنیم.

آن‌گاه تغییرات طول پاره خط AM را با تغییرات طول پاره خط OM مقایسه می‌کنیم. دیده می‌شود که با افزایش طول OM اندازه پاره خط AM نیز افزایش می‌یابد و هنگامی که نقطه M در جهت مثبت محور x ها بسیار دور شود، یعنی x به سمت $+\infty$ برود، اندازه پاره خط AM نیز به سمت $+\infty$ می‌رود.



اگر طول پاره خط AM را که تابعی از x است $f(x)$ بنامیم، خواهیم داشت:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

زیرا

$$OA = 1, OM = x, \hat{AOM} = 90^\circ \Rightarrow AM^2 = OM^2 + OA^2 = x^2 + 1$$

در نتیجه

$$AM = \sqrt{x^2 + 1}$$

با تشکیل جدول تغییرات تابع نشان دهید که وقتی x که به سمت $+\infty$ برود، $f(x)$ نیز به سمت $+\infty$ می‌رود.

مثال ۲: تابع همانی $f(x)=x$ را در نظر می‌گیریم و مقادیر $f(x)$ متناظر با x های از لحاظ قدر مطلق بزرگ مثبت و منفی محاسبه می‌کنیم و در جدول زیر می‌نویسیم.

x	$-\infty$	$\leftarrow \dots -10000 -1000 -100 -10 \circ 10 \ 100 \ 1000 \ 10000 \dots \rightarrow$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\leftarrow \dots -10000 -1000 -100 -10 \circ 10 \ 100 \ 1000 \ 10000 \dots \rightarrow$	$+\infty$

این جدول نشان می‌دهد که وقتی x به سمت $-\infty$ می‌رود، $f(x)$ نیز به سمت $-\infty$ می‌رود و هنگامی که x به سمت $+\infty$ می‌رود، $f(x)$ نیز به سمت $+\infty$ می‌رود. یعنی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x) = \pm\infty \quad \text{به طور خلاصه می‌توان نوشت:}$$

مثال ۳: تابع $f(x) = x^2 + 1$ را در نظر می‌گیریم و مقادیر $f(x)$ متناظر با مقادیر از لحاظ قدر مطلق بزرگ x را محاسبه کرده و در جدولی می‌نویسیم:

x	$-\infty \leftarrow$	$\dots -100000 -10000 -1000 -100 \circ 100 \ 1000 \ 10000 \ 100000 \dots \rightarrow$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty \leftarrow$	$\dots 10^{10}+1 \ 10^8+1 \ 10^6+1 \ 10^4+1 \ 10^2+1 \ 10^2+1 \ 10^6+1 \ 10^8+1 \ 10^{10}+1 \dots \rightarrow$	$+\infty$

این جدول نشان می‌دهد که:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 + 1) = +\infty \quad \text{به صورت خلاصه:}$$

نکته ۱: دیدیم که $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x) = \pm\infty$. با توجه به حد توان n ام یک تابع، حد تابع $f(x) = x^n$ (عدد صحیح مثبت) در $+\infty$ و $-\infty$ به صورت زیر تعیین می‌شود:

اگر $n = 2k$ آن گاه،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$$

اگر $n = 2k + 1$ آن گاه،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$$

یعنی حد تابع $f(x) = x^n$ در $\pm\infty$ حالتی که n عددی زوج باشد برابر $+\infty$ است، و هنگامی که n عددی فرد باشد، $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$. در این حالت به طور خلاصه می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = \pm\infty$$

مثال ۱: حد $f(x) = x^2$ در $\pm\infty$ برابر است با $+\infty$

مثال ۲: حد $f(x) = x^3$ در $\pm\infty$ برابر است با $\pm\infty$ یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

نکته ۲: اگر $a \neq 0$ عددی حقیقی باشد حد $f(x) = ax^n$ (n عدد صحیح مثبت) را در $\pm\infty$ با توجه به علامت a می توانیم به دست آوریم.

مثال

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = 2(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2) = -2(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = 2(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = -2(-\infty) = +\infty$$

قضایای حد مجموع و حاصلضرب و تقسیم توابع برای حدهای در $\pm\infty$ که مقدار حد اعداد باشند، نیز برقرار است. اما این قضایا را نباید در مورد توابعی که حد $\pm\infty$ دارند به کار برد. زیرا توابع با حدهای $\pm\infty$ ، اصولاً جزو توابعی که دارای حد باشند محسوب نمی شوند.

حد چند جمله ای ها در $\pm\infty$: چند جمله ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x - 1$ را در نظر می گیریم.

می خواهیم حد آن را در $\pm\infty$ محاسبه کنیم. برای این کار $f(x)$ را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 + 5x^2 + 4x - 1 = 2x^3 \left(1 + \frac{5x^2}{2x^3} + \frac{4x}{2x^3} - \frac{1}{2x^3}\right) \\ &= 2x^3 \left(1 + \frac{5}{2x} + \frac{4}{2x^2} - \frac{1}{2x^3}\right) \end{aligned}$$

پس:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x^3 + 5x^2 + 4x - 1) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^3 \left(1 + \frac{5}{2x} + \frac{4}{2x^2} - \frac{1}{2x^3}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x^3) \times \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{5}{2x} + \frac{4}{2x^2} - \frac{1}{2x^3}\right) \end{aligned}$$

حد مجموع جمله‌های داخل پراتز دوم در ∞ برابر با ۱ است پس :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 + 5x^2 + 4x - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3) \times 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3) = \infty$$

به‌طور کلی حد هر چند جمله‌ای به‌صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + 1$ (n عدد صحیح

مثبت) در ∞ ، مساوی حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} ax^n$$

مثال ۱: حد چند جمله‌ای $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ در ∞ برابر است با حد $(2x^2)$ در ∞ ،

یعنی :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 + 3x - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2) = +\infty$$

مثال ۲: حد تابع $f(x) = -3x^2 + 4x + 5$ در ∞ برابر است با حد $(-3x^2)$ در ∞ ، یعنی :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^2 + 4x + 5) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-3x^2) = -\infty$$

مثال ۳: حد تابع $f(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 1$ در ∞ برابر است با حد $(3x^5)$

در ∞ ، پس داریم :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^5 - 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^5) = \infty$$

مثال ۴: حد تابع $f(x) = -2x^3 + 5x^2 + 4x - 1$ در ∞ چنین است :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^3 + 5x^2 + 4x - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^3) = \infty$$

حد تابع $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots + 1}{a'x^n + b'x^{n-1} + \dots + 1}$ در ∞ (m و n اعداد صحیح

مثبت): چون حد هر چند جمله‌ای در ∞ ، برابر حد جمله بزرگ‌ترین درجه آن می‌باشد، پس می‌توان

نوشت :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots + 1}{a'x^n + b'x^{n-1} + \dots + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^m}{a'x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{a'} x^{m-n} \right)$$

بنابراین یکی از سه حالت زیر پیش می‌آید :

حالت اول $m > n$

$$m > n \Rightarrow m - n > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{a'} x^{m-n} \right) = \infty$$

یعنی: وقتی درجه صورت کسر از درجه مخرج کسر بیش تر است، حد کسر در ∞ ، برابر ∞

است و علامت آن بستگی به علامت $\frac{a}{a'}$ و زوج یا فرد بودن $m-n$ دارد.

مثال: با به کار بردن روش بالا حد کسرهای زیر را به دست می آوریم.

$$۱) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 - x + 1}{5x^2 - x + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{5x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}x\right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}x\right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{5}x\right) = -\infty$$

زیرا

$$۲) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + x - 1}{4x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2x^2}{4x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}x\right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x\right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x\right) = +\infty$$

زیرا

$$۳) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x - 1}{2x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^3}{2x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2) = +\infty$$

زیرا

$$۴) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 + 5}{-2x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^4}{-2x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{2}x^2\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{2}x^2\right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{3}{2}x^2\right) = -\infty$$

زیرا

حالت دوم $m=n$

$$m = n \Rightarrow m - n = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{a'}x^{m-n}\right) = \frac{a}{a'}$$

یعنی وقتی درجه صورت و درجه مخرج کسر برابرند، حد کسر در ∞ برابر است با:

ضریب بزرگترین درجه صورت

ضریب بزرگترین درجه مخرج

مثال:

$$۱) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 1}{2x + 3} = \frac{6}{2} = 3$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + x - 1}{x^2 + 7x + 2} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$۳) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^3 + 6n - 2}{2n^3 - 6n + 4} = \frac{5}{2}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^n - x^2 + 5}{-2x^n + 3x - 4} = \frac{6}{-2} = -3$$

حالت سوم $m < n$

$$m < n \Rightarrow m - n < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{a}{a'} x^{m-n} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{a}{a' x^{n-m}} \right) = 0$$

یعنی وقتی درجه صورت کسر از درجه مخرج کسر کم تر است، حد کسر در $\pm$ مساوی صفر

است.

مثال:

$$۱) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{3x + 4} = 0$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x + 5}{3x^2 + x + 2} = 0$$

$$۳) \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{2n^2 + n - 1}{n^3 + n^2 - 5} = 0$$

نکته: در برخی حالت ها که تابع $f(x)$ کسری است، اما صورت کسر، یا مخرج آن، یا هیچ کدام چند جمله ای نیستند، باز هم می توان با فاکتورگیری از جمله هایی از صورت و مخرج که دارای بزرگ ترین درجه هستند، حد تابع را به دست آورد. به مثال های زیر توجه کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x + 2}{2x^2 + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{x^2 \left(2 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{2 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}} = \frac{1 + 0 + 0}{2 + \sqrt{0 + 0}} = \frac{1}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + \sqrt{x+1}}{6x + \sqrt{4x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-3 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)}{x \left(6 + \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} \right)} = \frac{-3 + \sqrt{0 + 0}}{6 + \sqrt{4 - 0}} = \frac{-3 + 0}{6 + 2} = \frac{-3}{8}$$

تمرین

حد هر يك از تابع‌های زیر را در $\mathbb{R}$ ، تعیین کنید. در دو تمرین آخر فقط حد در $+\infty$ را به دست

آورید.

$$۱) y = \frac{-1}{3}x + 4$$

$$۲) y = \frac{2}{\sqrt{x}} + 1$$

$$۳) y = 3x^2 - x + 2$$

$$۴) y = -2x^2 - x + 3$$

$$۵) y = x^3 + 2x^2 - 1$$

$$۶) y = -x^3 + 3x - 2$$

$$۷) y = -(2x-1)^3$$

$$۸) y = 3x^4 + 5x^2 - 1$$

$$۹) y = -x^4 + x^2 + 2$$

$$۱۰) y = x^5 - 3x^3 + x - 1$$

$$۱۱) y = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$۱۲) y = \frac{-3x+2}{x}$$

$$۱۳) y = \frac{-x^2+2}{3x^2+5x+1}$$

$$۱۴) y = \frac{4x^3-x^2+1}{-2x^3+x-2}$$

$$۱۵) y = \frac{12x^n - x^2 + 1}{6x^n + x^3 + 2} \quad (n \in \mathbb{N}, n > 3)$$

$$۱۶) y = \frac{3x^2 + 5x - 1}{x^3 + 7x - 2}$$

$$۱۷) y = \frac{x-5}{2x^2+x-1}$$

$$۱۸) y = \frac{3x^n - 7x + 2}{2x^{n+1} + 6x^n - 1} \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1)$$

$$۱۹) y = \frac{2x+1}{3}$$

$$۲۰) y = \frac{6x^2+x-2}{3x-5}$$

$$۲۱) y = \frac{-3x^2+6x-1}{2x-7}$$

$$۲۲) y = \frac{2x^3+x-2}{x+3}$$

$$۲۳) y = \frac{3x^4+x^2-1}{-x^2+5}$$

$$۲۴) y = \frac{-3x^2+\sqrt{x+2}}{x^2+5x-1}$$

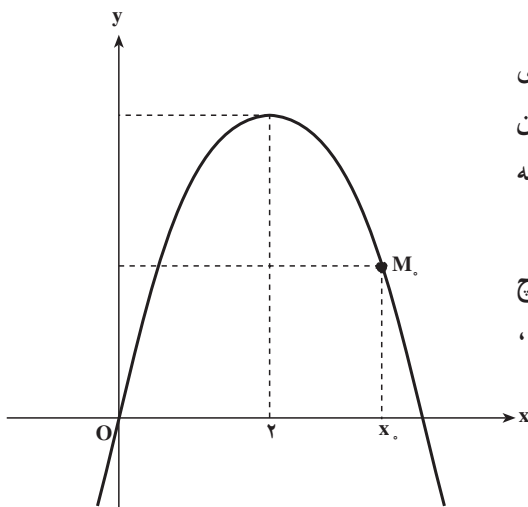
$$۲۵) y = \frac{2x+1}{x^2+\sqrt{x+2}}$$

پیوستگی

پیوستگی در یک نقطه: تابع $f(x) = -x^2 + 4x$ و نمودار آن را که یک سهمی است در نظر

می‌گیریم. این تابع برای همه اعداد حقیقی تعریف شده است، یعنی $D_f = \mathbb{R}$. بنابراین برای هر

$x_0 \in \mathbb{R}$ نقطه $M_0(x_0, f(x_0))$ نقطه‌ای از سهمی است. اما همان‌طوری که می‌دانیم سهمی در هیچ



نقطه‌ای بریدگی ندارد. به عبارت دیگر سهمی یک منحنی یک تکه یا پیوسته است. به این علت تابع $f(x) = -x^2 + 4x$ را نیز پیوسته می‌گویند.

به طور کلی اگر نمودار تابع f در هیچ نقطه‌ای از دامنه تعریفش بریدگی نداشته باشد، تابع f را پیوسته می‌نامند.

اکنون مقدار تابع f و حد آن را در یک نقطه، مثلاً در $x = 1$ ، به دست می‌آوریم. داریم:

$$f(1) = -(1)^2 + 4(1) = -1 + 4 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + 4x) = -1 + 4 = 3$$

به طوری که دیده می‌شود، در این مثال که f تابعی پیوسته است، مقدار تابع و حد آن در نقطه $x = 1$ با یکدیگر برابرند، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 3$$

این ویژگی در هر نقطه دیگر نیز برقرار است. یعنی به طور کلی برای هر عدد حقیقی دلخواه x_0 داریم:

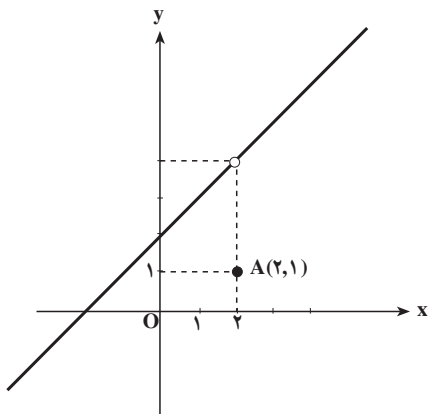
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (-x^2 + 4x) = -x_0^2 + 4x_0.$$

اینک به عنوان مثالی دیگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & , x \neq 2 \\ 1 & , x = 2 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. دامنه تعریف این تابع مجموعه اعداد حقیقی، یعنی $D_f = \mathbb{R}$ است. برای هر $x \neq 2$ داریم $x - 2 \neq 0$ و می‌توان نوشت:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & , x \neq 2 \\ 1 & , x = 2 \end{cases}$$

پس:

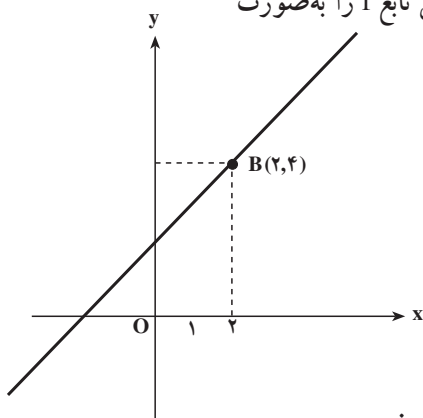


نمودار این تابع را رسم می‌کنیم. این نمودار اجتماع نقطه $A(2, 1)$ و یک خط است که تنها در نقطه $x = 2$ بریدگی دارد (مطابق شکل). زیرا نقطه $A(2, 1)$ روی این خط نیست و نقطه $B(2, 4)$ نیز به نمودار تابع تعلق ندارد. بدین جهت گفته می‌شود که این تابع در $x = 2$ پیوسته نیست (این تابع در سایر نقاط پیوسته می‌باشد).
اما در نقطه $x = 2$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4 \neq f(2) = 1$$

یعنی حد تابع در $x = 2$ با مقدار تابع در $x = 2$ برابر نیست.

اگر در تابع بالا، $f(2)$ را مساوی ۴ بگیریم، یعنی تابع f را به صورت



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

تعریف کنیم نقطه $B(2, 4)$ روی نمودار تابع قرار می‌گیرد و در نتیجه نمودار در هیچ نقطه‌ای بریدگی نخواهد داشت و در این صورت تابع در همه نقاط تعریفش پیوسته است.

از آنچه که گذشت به تعریف زیر رهنمون می‌شویم:

تعریف: تابع f که در بازه I تعریف شده است در نقطه x_0 از دامنه آن را پیوسته گویند، هرگاه:

۱- تابع در $x = x_0$ حد داشته باشد.

۲- حد تابع در $x = x_0$ با مقدار تابع در x_0 برابر باشد یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

بنابراین هرگاه تابعی که روی یک بازه تعریف شده است و در یک نقطه از دامنه آن، دست کم

یکی از دو شرط بالا را نداشته باشد در آن نقطه ناپیوسته است.

مثال ۱: تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \geq 1 \\ x^2 + 1, & x < 1 \end{cases}$ داده شده است. می‌خواهیم پیوستگی این تابع را

در نقطه $x = -1$ بررسی کنیم.

این تابع در $x = -1$ تعریف شده است و داریم :

$$f(-1) = -(-1)^2 + 2(-1) = -3$$

اما تابع $f(x)$ در $x = -1$ دارای حد نیست زیرا :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x^2 + 2x) = -(-1)^2 + 2(-1) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 1) = (-1)^2 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -3 \neq 2 = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$$

یعنی

در نتیجه این تابع در $x = -1$ پیوسته نیست.

مثال ۲: تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$ داده شده است. می‌خواهیم پیوستگی این تابع را در

نقطه $x = 2$ بررسی کنیم.

این تابع در $x = 2$ تعریف شده است زیرا $f(2) = 3$ است، و در $x = 2$ تابع دارای حد است و مقدار این حد برابر است با :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 1) = 9$$

به‌طوری که دیده می‌شود مقدار تابع در $x = 2$ یعنی $f(2) = 3$ با حد تابع در این نقطه برابر نیست ($3 \neq 9$). بنابراین تابع بالا در نقطه $x = 2$ پیوسته نیست.

مثال ۳: می‌خواهیم پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 1, & x \geq 2 \\ -4x + 1, & x < 2 \end{cases}$ را در نقطه $x = -2$ بررسی کنیم.

$$1- \text{تابع در } x = -2 \text{ تعریف شده است و داریم } f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) - 1 = 9$$

$$2- \text{در } x = -2 \text{ تابع دارای حد است چون :}$$

$$\text{حد راست} = l_1 = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 - 3x - 1) = (-2)^2 - 3(-2) - 1 = 9$$

$$\text{حد چپ} = l_2 = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (-4x + 1) = -4(-2) + 1 = 9$$

$$\Rightarrow l_1 = l_2 = 9 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 9$$

۳- حد تابع در $x = -2$ با مقدار تابع در $x = -2$ برابر است.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = 9$$

بنابراین تابع بالا در نقطه $x = -2$ پیوسته می‌باشد.

مثال ۴: پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ که دامنه آن $[-1, 1]$ است را در نقاط ۱ و -۱ بررسی می‌کنیم. ۱ و -۱ در دامنه تعریف تابع هستند و داریم $f(1) = f(-1) = 0$. حد تابع در این نقاط نیز همان حد چپ یا راست در این نقاط است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1-x^2} = 0$$

بنابراین حد این تابع در این نقاط با مقدار تابع در این نقاط برابر است و تابع در این نقاط پیوسته است. البته این تابع در سایر نقاط دامنه خود نیز پیوسته است.

مثال ۵: تابع $f(x) = \begin{cases} ax+3, & x \neq 1 \ (a \neq 0) \\ 5, & x = 1 \end{cases}$ مقدار a را طوری تعیین کنید که این تابع در نقطه $x=1$ پیوسته باشد. تابع در $x=1$ تعریف شده است و

$$f(1) = 5$$

همچنین در $x=1$ تابع دارای حد است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (ax+3) = a+3$$

حال برای آن که تابع در $x=1$ پیوسته باشد باید داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow a+3=5 \Rightarrow a=2$$

مثال ۶: تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2+2, & x > -1 \ (a \neq 0) \\ 3, & x = -1 \\ -3x+b, & x < -1 \end{cases}$ داده شده است. a و b را چنان بیابید

که تابع در $x=-1$ پیوسته باشد.

داریم:

$$f(-1) = 3$$

$$\text{حد راست} = l_1 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax^2+2) = a(-1)^2+2 = a+2$$

$$\text{حد چپ} = l_2 = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-3x+b) = -3(-1)+b = 3+b$$

برای این که تابع دارای حد باشد باید $l_1 = l_2$ یعنی:

$$a+2 = 3+b \Rightarrow a-b=1 \quad (1)$$

و برای این که تابع در $x = -1$ پیوسته باشد باید :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \Rightarrow a + 2 = 3 \Rightarrow a = 1$$

با جایگذاری مقدار a در رابطه (۱) مقدار b تعیین می شود.

$$b = 0$$

تمرین

۱- پیوستگی هریک از تابع های زیر را در نقطه داده شده بررسی کنید.

الف) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$, $(x = 2)$ ب) $f(x) = \frac{2x^2 + x}{x - 2}$, $(x = -2)$

پ) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, $(x = -1)$ ت) $f(x) = \frac{x + 2}{2x - 3}$, $(x = 3)$

ث) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x & , x > \frac{3}{2} \\ -2x + 3 & , x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$, $(x = -\frac{3}{2})$

ج) $f(x) = \begin{cases} -3x + 5 & , x \geq 1 \\ x^2 + 4 & , x < 1 \end{cases}$, $(x = -1)$

چ) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & , x > 3 \\ 2 & , x = 3 \\ 5x - 13 & , x < 3 \end{cases}$, $(x = 3)$

ح) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x^2 + 1} & , x \geq 0 \\ (2x - 1)^2 & , x < 0 \end{cases}$, $(x = 0)$

خ) $f(x) = \begin{cases} \sin 2x & , x > \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{2} + \cos^2 x & , x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$, $(x = \frac{\pi}{4})$

د) $f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x & , x \geq \frac{\pi}{2} \\ 2 \sin^2 x - 1 & , x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, $(x = \frac{\pi}{2})$

$$ر) f(x) = \sqrt{1-x}, \quad x=1$$

$$ز) f(x) = \sqrt{x^2-4}, \quad x=-2$$

$$\text{۲- عدد های } a \text{ و } b \text{ را چنان بیابید که تابع } f(x) = \begin{cases} ax+1 & , x \geq 2 \\ 13 & , x = -2 \\ 2ax^2 + bx - 1 & , x \leq 2 \end{cases} \text{ در نقطه}$$

$x = -2$ پیوسته باشد.

$$\text{۳- حدود } a \text{ را طوری تعیین کنید که تابع } f(x) = \begin{cases} -2x+a & , x \geq 1 \\ x^2+3x & , x < 1 \end{cases} \text{ در نقطه } x=1 \text{ پیوسته}$$

نباشد.

مشتق

بررسی چگونگی تغییرات مقادیر یک تابع، از مسائل مهم ریاضی است. مفهوم مشتق در ارتباط با چگونگی تغییرات یک تابع است. از آنجا که توابع در تمام علوم تجربی به کار گرفته می‌شوند، بررسی رفتار این توابع بسیار اساسی است و مشتق چگونگی رفتار توابع را بیان خواهد کرد.

آهنگ تغییر

بسیاری از مسائل ریاضی به بررسی تغییرات تابع نسبت به تغییرات متغیر مربوط می‌شود. مطالعه آهنگ این تغییرات است که سرانجام به تعریف مشتق می‌انجامد. می‌دانیم که از دو چیز یا دو پدیده که تغییر یکی سبب تغییر دیگری می‌شود، مانند مساحت یک دایره و شعاع آن، حجم یک گاز و دمای آن، افزایش سرمایه و بهره آن، رشد جمعیت و شمار نوزادان، قطر یک درخت و سن آن^۱ ... یکی را به عنوان متغیر (یا متغیر مستقل) و دیگری را به عنوان تابع (یا متغیر وابسته) انتخاب و همان‌طور که در بخش تابع دیده شد، متغیر را با x و تابع را با y مشخص می‌کنند و بستگی میان آن‌ها را با f نشان می‌دهند و می‌نویسند:

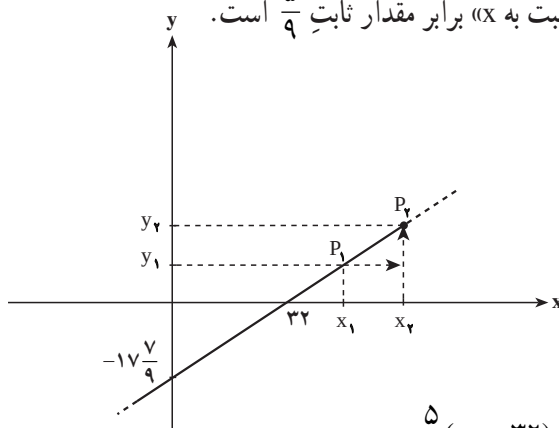
$$y = f(x)$$

عموماً با تغییر x مقدار $f(x)$ نیز تغییر خواهد کرد. ما در اینجا می‌خواهیم آهنگ نسبت این تغییرها را که دارای اهمیت ویژه‌ای است مورد بررسی قرار دهیم.

مثال ۱: تابع یا معادله $y = \frac{5}{9}(x - 32)$ را، که درجه گرما را برحسب سانتی‌گراد به صورت تابعی از درجه گرما برحسب فارنهایت مشخص می‌کند، در نظر می‌گیریم. در ریاضی ۱ خواندیم که رابطه بین x و y خطی است. در ریاضی ۲ این رابطه با عنوان تابع خطی معرفی شد. در آنجا اشاره شد که در چنین حالتی نسبت تغییرات y به تغییرات x همواره عددی ثابت است که به آن شیب خط

۱- در اغلب مثال‌های بالا متغیرهای دیگری نیز دخالت دارد که در اینجا ما آن‌ها را در نظر نگرفته‌ایم. مثلاً افزایش سرمایه به مدت، حجم گاز به فشار، رشد جمعیت به میزان مرگ و میر ...

می‌گوییم. در اینجا این عدد ثابت $\frac{5}{9}$ است. به عبارت دیگر هنگامی که x به اندازه ۹ درجه فارنهایت افزایش یابد، y به اندازه ۵ درجه سانتی‌گراد افزایش می‌یابد. بیان ریاضی این مطلب آن است که «آهنگ تغییرات y نسبت به x » برابر مقدار ثابت $\frac{5}{9}$ است.

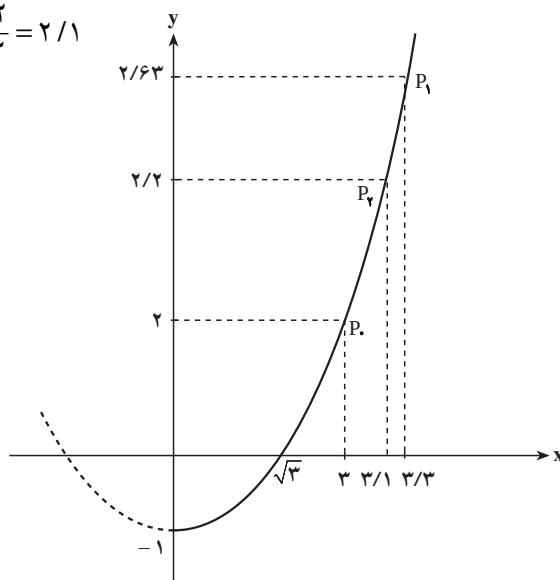


$$\text{آهنگ تغییر } y \text{ نسبت به } x \text{ (شیب خط } P_1P_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{5}{9}(x_2 - 32) - \frac{5}{9}(x_1 - 32)}{x_2 - x_1} = \frac{5}{9}$$

مثال ۲: تابع $y = f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$ را در نظر بگیرید. در سال‌های گذشته دیدید که نمودار

این تابع، منحنی (سه‌می) و تابع غیرخطی است. در نتیجه نسبت تغییرات y به تغییرات x در فواصل مختلف ثابت نیست. مثلاً وقتی x از $x_0 = 3$ به $x_1 = 3/3$ تغییر کند، y از $f(x_0) = 2$ به $f(x_1) = 2/63$ تغییر خواهد کرد و نسبت تغییرات برابر است با:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{2/63 - 2}{3/3 - 3} = 2/1$$



اما اگر x از $x_0 = 3$ به $x_1 = 3/1$ تغییر کند خواهیم داشت :

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(3/1) - f(3)}{3/1 - 3} = \frac{2/203 - 2}{0/1} = \frac{0/203}{0/1} = 2/03$$

برای این که نسبت تغییرات این تابع را در نزدیکی ۳ بهتر ببینیم، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم :

x	...	۲	...	۲/۶	۲/۸	۲/۹	۳	۳/۱	۳/۳	...	۴	...
$f(x)$	...	۰/۳۳	...	۱/۲۵	۱/۶۱	۱/۸۰	۲	۲/۲۰	۲/۶۳	...	۴/۳۳	...
$x - 3$	...	-۱	...	-۰/۴	-۰/۲	-۰/۱	۰	۰/۱	۰/۳	...	۱	...
$f(x) - f(3)$	...	-۱/۶۷	...	-۰/۷۵	-۰/۳۹	-۰/۱۹۷	۰	۰/۲	۰/۶۳	...	۲/۳۳	...
$\frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$	...	۱/۶۷	...	۱/۸۷	۱/۹۳	۱/۹۷	?	۲/۰۳	۲/۱	...	۲/۳۳	...

$$\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{\frac{1}{3}x^2 - 1 - 2}{x - 3} = \frac{\frac{1}{3}(x^2 - 9)}{x - 3} = \frac{x + 3}{3}$$

با توجه به این که :

سطر آخر جدول را می‌توان با قرار دادن مقادیر x در عبارت $\frac{x+3}{3}$ به آسانی محاسبه کرد. در واقع اعداد سطر آخر جدول آهنگ متوسط تغییرات تابع را در نقطه $x_0 = 3$ نشان می‌دهند. به طوری که دیده می‌شود این آهنگ علاوه بر تابع f به نقطه $x_0 = 3$ و مقدار $x - x_0$ نیز بستگی دارد، و وقتی که x با مقادیر کوچک تر از ۳ یا بزرگ تر از ۳ به ۳ نزدیک می‌شود این نسبت به ۲ نزدیک می‌گردد. بنابراین حد این آهنگ تغییر در نقطه $x_0 = 3$ برابر با ۲ می‌باشد یعنی :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{3} = 2$$

اگر به جای $x_0 = 3$ مثلاً $x_0 = 6$ را برابر با ۶ بگیریم آهنگ متوسط تغییر متفاوت خواهد بود و می‌توان دید که در این صورت نسبت مورد نظر به ۴ نزدیک خواهد شد.

تمرین: جدولی مشابه جدول بالا برای همان تابع f در نقطه $x_0 = 6$ تشکیل دهید.

هنگامی که متغیر از x_0 به x تغییر می‌کند مقدار $x - x_0$ را نمو متغیر و مقدار $f(x) - f(x_0)$ را نمو تابع در x_0 می‌نامند و نسبت $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ را آهنگ متوسط تغییرات تابع در x_0 با نمو داده شده می‌نامند.

مثال ۳: در تابع f با ضابطه $y = f(x) = x^2 - 5x + 6$ می‌خواهیم :

الف - آهنگ متوسط تغییر تابع را در $x_1 = 3$ با نمو ۲ تعیین کنیم.

ب - آهنگ متوسط تغییر تابع را در $x_1 = 5$ با نمو ۲ به دست آوریم.

$$x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = f(3) = 9 - 15 + 6 = 0 \quad (\text{الف})$$

$$x_2 = 3 + 2 = 5 \Rightarrow y_2 = f(x_2) = f(5) = 25 - 25 + 6 = 6$$

$$y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = 6 - 0 = 6$$

آهنگ متوسط تغییر در $x_1 = 3$ با نمو ۲ به صورت زیر تعیین می شود:

$$\frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_1 = 5 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = f(5) = 25 - 25 + 6 = 6 \quad (\text{ب})$$

$$x_2 = 5 + 2 = 7 \Rightarrow y_2 = f(x_2) = f(7) = 49 - 35 + 6 = 20$$

$$y_2 - y_1 = 20 - 6 = 14$$

آهنگ متوسط تغییر در $x_1 = 5$ با نمو ۲ به صورت زیر تعیین می شود.

$$\frac{f(7) - f(5)}{7 - 5} = \frac{14}{2} = 7$$

به طور کلی آهنگ متوسط تغییر تابع $y = f(x)$ نسبت به متغیر x ، هنگامی که متغیر روی بازه ای

از x_1 تا x_2 از دامنه تابع تغییر می کند به صورت زیر است:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

اگر قرار دهیم $x_2 - x_1 = h$ ، داریم $x_2 = x_1 + h$ و مقدار آهنگ متوسط تغییر تابع در x_1 با نمو h عبارت است از:

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

مثال ۴: تابع f با ضابطه $y = x^2 + 3$ داده شده است. می خواهیم آهنگ متوسط تغییر این تابع

را به ازای $x_1 = 2$ و $h = 0/3$ به دست آوریم.

$$x_1 = 2, \quad x_1 + h = 2 + 0/3 = 2/3 \quad \text{داریم:}$$

$$f(x_1) = f(2) = 4 + 3 = 7$$

$$f(x_1 + h) = f(2/3) = 5/29 + 3 = 8/29$$

در نتیجه

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \frac{8/29 - 7}{0/3} = \frac{1/29}{3} = 4/3$$

مثال ۵: می‌خواهیم دستور کلی محاسبه آهنگ متوسط تغییر تابع f با ضابطه

$f(x) = x^2 + 3x + 3$ را وقتی متغیر از x_1 به اندازه h تغییر کند به دست آوریم.
داریم:

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$f(x_1) = x_1^2 + 3x_1 + 3$$

$$f(x_1 + h) = (x_1 + h)^2 + 3(x_1 + h) + 3$$

$$\begin{aligned} f(x_1 + h) - f(x_1) &= (x_1 + h)^2 + 3(x_1 + h) + 3 - (x_1^2 + 3x_1 + 3) \\ &= 2x_1 h + 3h + h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} &= \frac{2x_1 h + 3h + h^2}{h} \\ &= \frac{h(2x_1 + 3 + h)}{h} = 2x_1 + 3 + h \end{aligned}$$

به عنوان نمونه، آهنگ متوسط تغییر تابع بالا نسبت به متغیر x به ازای $x_1 = 4$ و $h = 0/05$

برابر است با:

$$\frac{f(4 + 0/05) - f(4)}{0/05} = 2(4) + 3 + 0/05 = 11/05$$

نکته: در دستور بالا می‌توان به جای x_1 ، مقدار x را قرار داد در این صورت خواهیم داشت:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

مثال ۶: تابع f با ضابطه $y = f(x) = x^2 + 5x + 4$ داده شده است.

الف - دستور کلی آهنگ متوسط تغییر این تابع را نسبت به متغیر x تعیین کنید.

ب - حد آهنگ متوسط تغییر این تابع را در $h = 0$ ، تعیین کنید.

پ - آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی $x = 3$ و $h = 0/4$ به دست آورید.

ت - حد آهنگ متوسط تغییر این تابع در قسمت پ را در $h = 0$ تعیین کنید.

حل:

الف)

$$f(x) = x^2 + 5x + 4$$

$$f(x+h) = (x+h)^2 + 5(x+h) + 4$$

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 + 5(x+h) + 4 - (x^2 + 5x + 4)$$

در نتیجه

$$f(x+h) - f(x) = 2xh + 5h + h^2$$

پس

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2xh + 5h + h^2}{h} = \frac{h(2x + 5 + h)}{h} = 2x + 5 + h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + 5 + h) = 2x + 5 \quad (\text{ب})$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x + 5 + h = 2(3) + 5 + 0 = 11 \quad (\text{پ})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2(3) + 5 = 11 \quad (\text{ت})$$

حد به دست آمده در قسمت (ت) مثال بالا را آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه $x = 3$ می‌نامند.

به طور کلی تعریف زیر را داریم:

آهنگ لحظه‌ای تغییر یک تابع: در تابع f مقدار $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}$ را آهنگ لحظه‌ای

تغییر تابع در نقطه x_1 می‌نامند.

به عنوان مثال آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x) = x^3 + 2x + 1$ در نقطه $x_1 = -2$ برابر است

با:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^3 + 2(-2+h) + 1 - (-8 - 4 + 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{14h - 6h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (14 - 6h + h^2) = 14$$

نکته: اگر ضابطه تابع به صورت $x = f(t)$ باشد، دستور بالا به صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

مثال ۱: اندازهٔ مساحت مربعی را که طول ضلع آن x است برابر با y می‌گیریم. بنابراین $y = f(x) = x^2$. آهنگ تغییر y نسبت به x در $x_0 = 5$ برای نمونه‌های $h = 0/1, 0/2, 0/3, 0/4$ در جدول زیر آمده است:

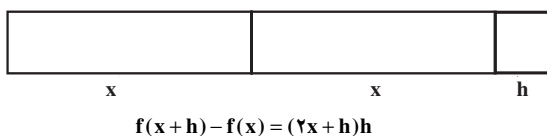
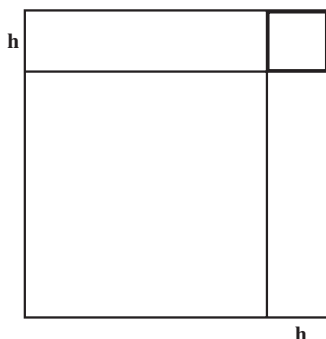
x	۵	۵/۱	۵/۲	۵/۳	۵/۴
$y = x^2$	۲۵	۲۶/۰۱	۲۷/۰۴	۲۸/۰۹	۲۹/۱۶
h	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴
$f(5+h) - f(5)$	۰	۱/۰۱	۲/۰۴	۳/۰۹	۴/۱۶
$\frac{f(5+h) - f(5)}{h}$	?	۱۰/۱	۱۰/۲	۱۰/۳	۱۰/۴

به‌طوری‌که دیده می‌شود وقتی x به ۵ نزدیک می‌گردد یعنی h کوچک می‌شود،

$\frac{f(5+h) - f(5)}{h}$ به ۱۰ نزدیک می‌شود. در واقع داریم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x + 5) = 10$$

شکل زیر تعبیر هندسی این مطلب است.



$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(2x+h)h}{h} = 2x+h \quad \text{پس:}$$

یعنی اگر h به اندازه کافی کوچک باشد $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ تقریباً با $2x$ برابر می‌شود، پس:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x$$

مثال ۲: معادله حرکت یک متحرک روی یک خط مستقیم به صورت $x = f(t) = 2t^2 - 5t + 1$ است.

الف - آهنگ لحظه‌ای تغییر مکان این متحرک را در نقطه $t_1 = -1$ به دست آورید.

ب - آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع را در نقطه $t_1 = 3$ به دست آورید.

پ - دستور کلی آهنگ لحظه‌ای تغییر مکان این متحرک را تعیین کنید.

حل:

الف) در نقطه $t_1 = -1$ داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(-1+h)^2 - 5(-1+h) + 1 - (2 + 5 + 1)}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-9h + 2h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (-9 + 2h) = -9$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} \quad \text{ب) در نقطه } t_1 = 3 \text{ داریم:}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(3+h)^2 - 5(3+h) + 1 - (18 - 15 + 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7h + 2h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (7 + 2h) = 7$$

پ) برای تعیین دستور کلی آهنگ لحظه‌ای تغییر متحرک در نقطه t داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(t+h)^2 - 5(t+h) + 1 - (2t^2 - 5t + 1)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 4th - 5h}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} (2h + 4t - 5) = 4t - 5
\end{aligned}$$

همان طور که در مثال های بالا دیده شد، آهنگ لحظه ای تغییر تابع برابر حد آهنگ متوسط تغییر تابع است، وقتی نمو متغیر به صفر نزدیک می شود.

تمرین

۱- تابع $f(x) = x^2 + 6x - 7$ داده شده است.

الف- آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی متغیر از $x_1 = 2$ به $x_2 = 6$ تغییر کند، تعیین کنید.

ب- آهنگ لحظه ای تغییر این تابع را در نقطه $x_0 = 4$ به دست آورید.

۲- نقطه $M(x, y)$ را بر نمودار تابع $y = x^2$ انتخاب می کنیم و تصاویر M را بر ox و oy به ترتیب A و B می نامیم ($x > 0$). اگر S اندازه مساحت مستطیل $OAMB$ باشد S را به صورت تابعی از x مشخص کنید. آهنگ تغییر S نسبت به x و آهنگ لحظه ای تغییر را در $x_0 = 4$ به دست آورید.

۳- یک بادکنک کره ای شکل را باد کرده ایم تا به شکل کره ای به شعاع 10 سانتی متر درآمده است. اگر به بادکردن آن ادامه دهیم به طوری که در هر ثانیه یک میلی متر به شعاع آن افزوده شود، آهنگ متوسط تغییر مساحت این بادکنک را در 20 ثانیه اول به دست آورید. آهنگ لحظه ای افزایش مساحت سطح کره را در ثانیه 10 حساب کنید.

۴- اگر $p(t) = 3000 + 100t^2$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری در زمان t باشد t بر حسب ساعت)، آهنگ متوسط افزایش جمعیت را در 5 ساعت اول پس از زمان $t_0 = 2$ به دست آورید. آهنگ لحظه ای افزایش جمعیت را در $t = 3$ حساب کنید.

۵- حجم آب یک استخر در حال تخلیه برحسب لیتر به وسیله برابری $V = 120(2500 - 50t + t^2)$ به زمان t برحسب دقیقه بستگی دارد. آهنگ متوسط تخلیه در 8 دقیقه اول را پیدا کنید. آهنگ لحظه ای خالی شدن را در دقیقه دهم از آغاز تخلیه به دست آورید.

تعریف مشتق

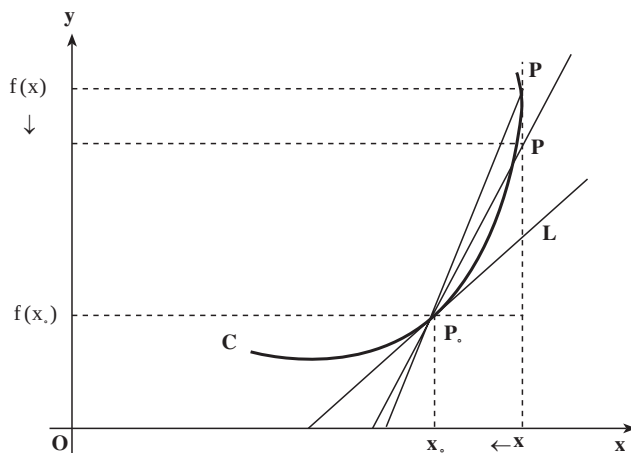
اگر به نمودار تابع خطی ذکر شده در مثال ۱ از بخش قبل توجه کنید، آهنگ متوسط تغییر تابع

در هر بازه‌ای ثابت است. به عبارت دیگر نقطه P_1 و P_2 هر چه که باشند این نسبت تغییر نمی‌کند. بنابراین آهنگ لحظه‌ای تغییر با آهنگ متوسط تغییر همواره مساوی و برابر با شیب خط P_1P_2 می‌باشد. ولی در مثال ۲ نسبت تغییرات y به تغییرات x ثابت نیست. اولین نسبت محاسبه شده (قبل از جدول) شیب خط P_1P_2 و در ادامه شیب خط P_1P_2 می‌باشد. هریک از نسبت‌های محاسبه شده در جدول نیز شیب خط گذرنده از دو نقطه نمودار تابع مانند دو خط یاد شده می‌باشد.

در آن مثال این سؤال می‌تواند مطرح شود که وقتی نقطه $P(x, f(x))$ بر روی نمودار تابع به نقطه $P_0(3, f(3))$ نزدیک و نزدیک‌تر شود، خط گذرا از دو نقطه P و P_0 به چه خطی نزدیک می‌شود، یعنی $\frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ به شیب چه خطی نزدیک می‌شود.

به نمودار زیر توجه کنید. شیب خط P_0P برابر است با:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



اما وقتی نقطه P بر روی نمودار تابع به نقطه ثابت P_0 نزدیک شود آنگاه x به x_0 نزدیک می‌شود. از طرفی خط قاطع P_0P به خط مماس بر منحنی (L) نزدیک خواهد شد پس:

حد شیب خط قاطع P_0P = شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطه P_0

$$P \rightarrow P_0$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

این همان آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه به طول x_0 می‌باشد.

مثال ۱: می‌خواهیم شیب خط مماس بر نمودار تابعی به معادله $y = x^2 - x$ را در نقطه $P_0(2, 2)$

به دست آوریم.

$$x = 2 \text{ شیب خط مماس در نقطه } = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = 3$$

مثال ۲: تابع $y = \frac{x}{x-1}$ و نقطه P به طول صفر را روی نمودار آن در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم

شیب خط مماس بر نمودار تابع را در P به دست آوریم.

$$x = 0 \text{ شیب خط مماس در نقطه } = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x-1} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} = -1$$

تذکر: شیب نمودار تابع در یک نقطه به معنی شیب خط مماس بر نمودار یا آهنگ لحظه‌ای

تغییر در آن نقطه (در صورت وجود) می‌باشد.

تابع $y = f(x)$ و نقطه x_0 از دامنه این تابع را در نظر می‌گیریم. اگر h نمو متغیر در نقطه x_0

باشد، برای تابع، نمو $f(x_0 + h) - f(x_0)$ را خواهیم داشت. حد نسبت نمو تابع به نمو متغیر را،

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{یعنی:}$$

را (در صورتی که این حد وجود داشته باشد)، مشتق تابع f در نقطه x_0 می‌نامند و آن را با $f'(x_0)$ یا

$y'(x_0)$ نشان می‌دهند. یعنی:

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

با قراردادن $x = x_0 + h$ ، مشتق تابع f در نقطه x_0 را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

از تعریف بالا و مطالب خوانده شده در بخش‌های قبل می‌توان نتیجه گرفت که:

الف) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه x_0 برابر است با مشتق تابع در نقطه x_0 .

ب) شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطه x_0 برابر است با مشتق تابع در نقطه x_0 .

بدیهی است گزاره‌های فوق وقتی اعتبار دارند که حدهای به کار رفته در تعاریف مفاهیم فوق

وجود داشته باشند.

تابع f در نقطه x_0 مشتق‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه $f'(x_0)$ وجود داشته باشد. هم‌چنین تابع f را

در بازه (a, b) مشتق‌پذیر گویند هرگاه f در هر نقطه دلخواه x از آن بازه مشتق‌پذیر باشد. در این

صورت مشتق را با $f'(x)$ یا به طور ساده با y' نمایش می‌دهند (گاهی برای مشتق نمادهای $\frac{df}{dx}$ و $\frac{dy}{dx}$

نیز به کار برده می‌شود).

مثال ۱: محاسبه مشتق $f(x) = 3x^2 - 4x$ در نقطه $x = -1$:

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(-1+h)^2 - 4(-1+h)] - [3(-1)^2 - 4(-1)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6h + 3h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-10h + 3h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-10 + 3h) = -10 \end{aligned}$$

مثال ۲: می‌خواهیم مشتق $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ را در نقطه $x = 2$ به‌دست آوریم.

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x+1}{x-1} - 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x+1}{x-1} - \frac{5(x-1)}{x-1}}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(x-2)}{(x-1)(x-2)} = -3 \end{aligned}$$

نکته: هنگامی که بخواهیم مشتق یک تابع را در چند نقطه حساب کنیم، بهتر است نخست $f'(a)$ یعنی مشتق را در نقطه دلخواه a حساب کنیم، آن‌گاه به‌جای a هریک از مقادیر داده شده را بگذاریم.

مثال ۳: مشتق $f(x) = x^2 - x$ را در $x = -1$ و $x = 0$ و $x = \frac{1}{4}$ و $x = 3$ به‌دست آورید.

ابتدا مشتق تابع را در نقطه a محاسبه می‌کنیم:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 - x) - (a^2 - a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a-1)}{x-a} = 2a - 1$$

$$f'(-1) = -2 - 1 = -3, \quad f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$f'(0) = -1, \quad f'(3) = 6 - 1 = 5$$

تمرین: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع‌های زیر را در نقطه داده شده به‌دست آورید:

$$۱) f(x) = 3x - 1, \quad x = 2 \qquad ۲) f(x) = x^3 + 3x^2 - 2, \quad x = 1$$

$$۳) f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x = -1 \qquad ۴) f(x) = \frac{x}{1+x}, \quad x = 0$$

$$۵) f(x) = 2\sqrt{1-x}, \quad x = -3 \qquad ۶) f(x) = ax^2 + bx + c, \quad x = -\frac{b}{2a}$$

سرعت یک متحرک: متحرکی روی خط D در حرکت است. با انتخاب یک نقطه O از D به عنوان مبدأ و یک بردار واحد $\vec{u}$ روی آن، خط D را به یک محور تبدیل می‌کنیم، به طوری که در هر لحظه فاصله (جهت‌دار) متحرک از O یک عدد حقیقی می‌باشد. این فاصله را که تابعی است از زمان t با معادله $s = f(t)$ مشخص می‌کنیم. چنانچه در لحظه t_0 متحرک در نقطه M_0 و فاصله آن از $O: s_0 = f(t_0)$ ، و در لحظه t در نقطه M و فاصله آن از $O: s = f(t)$ باشد، متحرک در زمان $t - t_0$ مسافت M_0M را که برابر است با $s - s_0 = f(t) - f(t_0)$ پیموده است. بنابراین سرعت متوسط آن

است. $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ در واقع این عبارت همان آهنگ تغییر متوسط تابع $f(t)$ نسبت به تغییر t است. هنگامی که زمان $t - t_0$ بی‌اندازه کوچک باشد، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای متحرک نزدیک می‌شود. سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه t_0 همان حد سرعت متوسط آن در $t = t_0$ است که آن را با $v(t_0)$ نمایش می‌دهند.
بنابراین:

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

اما حد بالا همان مشتق تابع $f(t)$ در لحظه t_0 است. یعنی $v(t_0) = f'(t_0)$ ، به طور کلی $v(t) = f'(t)$ ، یعنی سرعت متحرک برابر است با مشتق مسافت نسبت به زمان. $f'(t)$ ممکن است منفی نیز باشد. در چنین حالتی برای محاسبه اندازه سرعت قدرمطلق $f'(t)$ را در نظر می‌گیرند. در هر حال علامت $f'(t)$ جهت حرکت متحرک را مشخص می‌کند. برابری بالا را گاهی به صورت $v(t) = \frac{ds}{dt}$ نیز می‌نویسند.

مثال ۴: اگر طول نقطه متحرک M که بر محور $x'Ox$ در حرکت است، در زمان t (ثانیه) برابر با x (سانتی‌متر) باشد به طوری که $x = t^2 - 4t + 3$ ، سرعت متحرک را در ثانیه‌های ۱ و ۳ و ۵ به دست آورید.

حل: برای یافتن سرعت (لحظه‌ای) به محاسبه مشتق می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(t+h)^2 - 4(t+h) + 3] - [t^2 - 4t + 3]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2th - 4h + (h)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2t - 4 + h) = 2t - 4 \end{aligned}$$

پس $v(t) = f'(t) = 2t - 4$ بنابراین در ثانیه‌های ۱، ۳ و ۵ سرعت به ترتیب برابر است با :

$$v(1) = 2 - 4 = -2 \quad v(3) = 6 - 4 = 2 \quad v(5) = 10 - 4 = 6$$

یعنی در ثانیه‌های ۱ و ۳ مقدار سرعت ۲ سانتی متر در ثانیه و در ثانیه ۵، ۶ سانتی متر در ثانیه است. به علاوه در $v(1) = -2$ علامت منفی بیانگر این است که متحرک با سرعت ۲ سانتی متر در ثانیه از راست به چپ در حرکت است. در لحظه‌ای که جهت حرکت تغییر می‌کند سرعت صفر می‌شود. اما داریم $v(t) = 2t - 4$. پس $v(t)$ در لحظه $t = 2$ صفر می‌شود و در این لحظه $x = -1$. بنابراین هنگامی که متحرک در حرکت خود از راست به چپ به -1 می‌رسد سرعتش صفر شده و جهت حرکتش تغییر می‌کند و از چپ به راست می‌شود.

مشتق دوم: مشتق $y = f(x)$ یعنی $y' = f'(x)$ را (در صورتی که وجود داشته باشد) مشتق اول، و مشتق $y' = f'(x)$ را (در صورت وجود) مشتق دوم تابع $y = f(x)$ می‌نامند و با $y'' = f''(x)$ نشان می‌دهند.

مثال ۵: به طوری که در مثال ۴ دیده شد مشتق اول $y = x^2 - x$ عبارت است از $y' = 2x - 1$ و مشتق دوم آن :

$$y'' = 2$$

نکته: گفتیم که اگر معادله حرکت یک متحرک $s = f(t)$ باشد مشتق اول آن یعنی $s' = f'(t)$ را سرعت می‌نامند و با $v(t)$ نمایش می‌دهند. مشتق دوم $f(t)$ ، یا مشتق $v(t)$ را شتاب متحرک می‌گویند و با $a(t)$ نشان می‌دهند، یعنی $v(t) = f'(t)$ و $a(t) = v'(t) = f''(t)$. در مثال ۴ دیدیم که اگر $f(t) = t^2 - 4t + 3$ باشد داریم : $v(t) = f'(t) = 2t - 4$ پس : $a(t) = f''(t) = 2$.

تمرین

۱- شیب خط مماس بر نمودار تابع‌های زیر را در نقطه داده شده به دست آورید. (از مشتق این توابع که در صفحه‌های پیش محاسبه شده است استفاده کنید) :

$$\begin{array}{ll} ۱) \quad y = \frac{1}{3}x^2 - 1, & x = 3 \\ ۲) \quad y = x^2, & x = -1 \\ ۳) \quad y = 3x^2 - 4x, & x = -1 \\ ۴) \quad y = x^2 - x, & x = \frac{1}{2} \end{array}$$

۲- متحرکی که بر محور x ها در حرکت است دارای معادله $x = t^2 - 2t - 1$ است (t را بر حسب ثانیه و x را سانتی متر بگیرد). سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی $t = 1$ و $t = 4$ و سرعت لحظه‌ای آن را در زمان‌های $t = 0$ و $t = 1$ و $t = 3$ به دست آورید.

۳- توبی را با سرعت اولیه 30 متر در ثانیه به طور قائم از زمین به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر جهت مثبت فاصله از نقطه پرتاب به طرف بالا باشد، معادله حرکت به شکل $S = -\frac{1}{2}gt^2 + 30t$ است که در آن $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ شتاب گرانش زمین است. بنابراین، $x = f(t) = -4.9t^2 + 30t$. مطلوب است محاسبه:

الف - سرعت لحظه‌ای توب در پایان یک ثانیه پس از پرتاب.

ب - سرعت لحظه‌ای توب در پایان ۳ ثانیه پس از پرتاب.

۴- توب تنیسی را به هوا پرتاب کرده‌ایم. اگر مسافت پیموده شده به وسیله توب، بر حسب متر، تابعی از زمان t بر حسب ثانیه به صورت $s = 12t - 3t^2$ باشد، سرعت متوسط توب را در ۲ ثانیه اول به دست آورید. سرعت آن را در لحظه t حساب کنید. در چه زمانی این سرعت صفر می‌شود و در چه ارتفاعی؟ در لحظه $t = 4$ ثانیه پس از پرتاب، وضعیت توب چگونه است و سرعت آن چقدر است؟

دستورها و قضیه‌های مشتق‌گیری

به طوری که در مثال‌های بالا دیدید در محاسبه مشتق یک تابع، با استفاده از تعریف آن، عملیات نسبتاً زیادی را باید انجام داد. به‌ویژه هرگاه تابع $f(x)$ دارای عبارتی پیچیده باشد این کار بسیار مشکل و خسته‌کننده است. اما خوشبختانه روش دیگری وجود دارد که مبتنی بر چند دستور و قضیه ساده است و محاسبه مشتق را بسیار آسان می‌کند.

به طوری که گفته شد دستورها و قضیه‌هایی وجود دارند که محاسبه مشتق توابع را آسان می‌سازند.

اینک به بیان آن‌ها می‌پردازیم. برخی را اثبات می‌کنیم و برخی دیگر را بدون اثبات می‌پذیریم.

۱- اگر c یک عدد ثابت و $f(x) = c$ ، آنگاه داریم $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \quad \text{زیرا:}$$

پس می‌توان گفت: مشتق توابع ثابت برابر با صفر است.

مثال ۶: اگر $y = 8$ باشد، آنگاه $y' = 0$

۲- اگر $y = f(x) = x^n$ ، آنگاه $y' = f'(x) = nx^{n-1}$

مثال ۷: اگر $y = x^6$ آن گاه $y' = 6x^5$

نتیجه: اگر $y = x$ آن گاه $y' = 1$

۳- اگر $f(x)$ تابعی مشتق پذیر و a عددی ثابت و $y = af(x)$ آن گاه:

$$y' = (af(x))' = af'(x)$$

مثال ۸: اگر $y = -5x^7$ آن گاه $y' = -5(7x^6) = -35x^6$

۴- اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق پذیر و $y = f(x) + g(x)$ ، آن گاه:

$$y' = f'(x) + g'(x)$$

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x) \end{aligned} \quad \text{زیرا:}$$

بنابراین می توان گفت: مشتق مجموع دو تابع برابر است با مجموع مشتق های آن دو تابع. این

مطلب را می توان به بیش از دو تابع تعمیم داد.

نتیجه: اگر $y = ax + b$ آن گاه $y' = a$

مثال ۹: مشتق $y = 3x^5 - 5x^2$ را محاسبه کنید.

حل: اگر قرار دهیم $f(x) = 3x^5$ و $g(x) = -5x^2$ خواهیم داشت:

$$f'(x) = 15x^4 \text{ و } g'(x) = -10x$$

$$y' = f'(x) + g'(x) = 15x^4 - 10x \quad \text{پس:}$$

۵- اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق پذیر باشند و $y = f(x)g(x)$ آن گاه داریم:

$$y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

مثال ۱۰: مشتق $y = (3x-2)(x^2+1)$ برابر است با:

$$y' = 3(x^2+1) + 2x(3x-2) = 3x^2 + 3 + 6x^2 - 4x = 9x^2 - 4x + 3$$

اگر ابتدا y را به صورت $y = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ به دست آوریم و سپس از آن مشتق

بگیریم باز هم به همان نتیجه بالا می رسیم.

تمرین

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید :

$$۱) f(x) = ۷x^3$$

$$۲) f(x) = ۷x + 3$$

$$۳) f(x) = x^3 + 3x^2 + ۷x + 3$$

$$۴) f(x) = 2 - 5x + 4x^2$$

$$۵) f(x) = 3x - 4x^3$$

$$۶) f(x) = \frac{4-5x}{3} + x^2$$

$$۷) f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$$۸) f(x) = (1 + 3x)^2$$

$$۹) f(x) = a_0 + a_1x$$

$$۱۰) f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$۱۱) f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$۱۲) f(x) = x + (3x + 2)^2$$

$$۱۳) f(x) = (2x + 3)(3x - 7)$$

$$۱۴) f(x) = (x^3 - x)(x - 9)$$

$$۱۵) f(x) = (x + 1)\left(\frac{x^2}{2} + x\right)$$

$$۱۶) f(x) = (5x - 4)\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

$$۱۷) f(x) = x^3(3x - 2)$$

$$۱۸) f(x) = 3x(x^2 + 1)(x + 2)$$

۶- اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق پذیر باشند و $g(x) \neq 0$ و $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ آن گاه داریم :

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$$

یعنی : مشتق یک تابع کسری برابر است با حاصل ضرب مشتق صورت در مخرج منهای حاصل ضرب مشتق مخرج در صورت، تقسیم بر توان دوم مخرج.

مثال ۱۱: مشتق تابع $y = \frac{3x}{x-2}$ هنگامی که $x \neq 2$ باشد چنین است :

$$y' = \frac{3(x-2) - (1)3x}{(x-2)^2} = \frac{3x - 6 - 3x}{(x-2)^2} = \frac{-6}{(x-2)^2}$$

$$y' = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

$$\text{و مشتق } y = \frac{1}{x^2}, x \neq 0 :$$

مشتق تابع مرکب

۷- اگر $y = f(u)$ و $u = g(x)$ دو تابع مشتق پذیر باشند آن گاه y نسبت به x دارای مشتق

است. اگر مشتق y نسبت به u را با y'_u و مشتق y نسبت به x را با y'_x نشان می دهیم. داریم :

$$y'_x = y'_u \cdot u'(x) = f'(u)g'(x)$$

مثال ۱۲: اگر $y = u^2 + u$ و $u = x^2 - 1$ باشد، داریم:

$$y'_x = y'_u \cdot u'(x) = (2u + 1)(2x) = [2(x^2 - 1) + 1](2x) = 4x^3 - 2x$$

مثال ۱۳: می‌خواهیم مشتق $y = (x^4 - 3x^2 + 1)^3$ را حساب کنیم:

فرض می‌کنیم $u = x^4 - 3x^2 + 1$ پس $y = u^3$ و خواهیم داشت:

$$y'_u = 3u^2 \quad \text{و} \quad u'_x = 4x^3 - 6x$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 3(x^4 - 3x^2 + 1)^2 (4x^3 - 6x) \quad \text{بنابراین:}$$

$$= 6x(2x^2 - 3)(x^4 - 3x^2 + 1)^2$$

نتیجه: اگر $y = u^n$ و u تابعی از x باشد، خواهیم داشت:

$$y'_x = nu' \cdot u^{n-1}$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad \text{و} \quad y'_u = nu^{n-1} \quad \text{زیرا داریم:}$$

که چون y'_x و u'_x همان y' و u' هستند، دستور بالا را چنین می‌نویسند:

$$y' = nu' \cdot u^{n-1} \quad \text{مثال ۱۴: اگر } y = (2x^3 + x)^5 \text{ باشد، آن گاه:}$$

$$y' = 5(6x^2 + 1)(2x^3 + x)^4$$

۸- اگر $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر و مثبت باشد و $y = \sqrt{f(x)}$ ، آن گاه داریم:

$$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \quad \text{و} \quad (f(x) > 0)$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{مثال ۱۵: مشتق } y = \sqrt{x} \text{ برابر است با:}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{3x+3}} \quad \text{مشتق } y = \sqrt{3x+3}, (x > -\frac{3}{3}) \text{ برابر است با:}$$

$$y' = \frac{3 \times 2x(1+x^2)^2}{2\sqrt{(1+x^2)^3}} = 3x\sqrt{1+x^2} \quad \text{مشتق } y = \sqrt{(1+x^2)^3} \text{ برابر است با:}$$

$$\text{مشتق } y = \sqrt{\frac{2x+5}{3x-1}} \text{ برابر است با:}$$

$$y' = \frac{\frac{2(3x-1) - 3(2x+5)}{(3x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{2x+5}{3x-1}}} = \frac{-17}{2\sqrt{(2x+5)(3x-1)^3}}$$

تمرین

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید و دامنه مشتق‌پذیری هر تابع را مشخص کنید :

$$۱) f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$۲) f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$۳) f(x) = \frac{2x-3}{3x+5}$$

$$۴) f(x) = \frac{3(2x+5)^2}{x^3}$$

$$۵) f(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$$

$$۶) f(x) = \frac{x+1}{x(x-1)}$$

$$۷) f(x) = \frac{x^3-1}{x^3+1}$$

$$۸) f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$$

$$۹) f(x) = \left(\frac{x-1}{3-x} \right)^2$$

$$۱۰) f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

$$۱۱) f(x) = (2x+3)^4$$

$$۱۲) f(x) = (5x^2-2)^3$$

$$۱۳) f(x) = \sqrt{3x-2}$$

$$۱۴) f(x) = \sqrt{x^2+4}$$

$$۱۵) f(x) = \sqrt{4-x^2}$$

$$۱۶) f(x) = \sqrt{x(x-2)}$$

$$۱۷) f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

$$۱۸) f(x) = (1+\sqrt{x})^3$$

$$۱۹) f(x) = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$$

$$۲۰) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

مشتق تابع‌های مثلثاتی

۱- مشتق $y = \sin x$: برای به دست آوردن مشتق $\sin x$ همان روش کلی را به کار می‌بریم،

یعنی حد نسبت $\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$ را در $h = 0$ حساب می‌کنیم.

بنابر اتحاد مثلثاتی $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ می‌توان آن را چنین نوشت :

$$\sin(x+h) - \sin x = \sin x \cosh + \cos x \sinh - \sin x$$

پس خواهیم داشت :

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{(\cosh-1)\sin x + \cos x \sinh}{h} = \frac{\cosh-1}{h} \sin x + \frac{\sinh}{h} \cos x$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} = 1$$

از طرفی می‌دانیم که : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ پس

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\cos t - 1)(\cos t + 1)}{t(\cos t + 1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos^2 t - 1}{t(\cos t + 1)}$$

و از طرف دیگر :

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 t}{t(\cos t + 1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin t}{t} \times \frac{\sin t}{\cos t + 1} \right) = -1 \times \frac{0}{2} = 0$$

$$\begin{aligned}
 y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cosh-1}{h} \sin x + \frac{\sinh}{h} \cos x \right) \quad \text{بنابراین:} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cosh-1}{h} \sin x \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sinh}{h} \cos x \right) \\
 &= 0 \times \sin x + 1 \times \cos x = \cos x
 \end{aligned}$$

در نتیجه مشتق $\sin x$ برابر است با $\cos x$ ، یا $y' = \cos x$. پس می‌توان گفت: تابع $\sin x$ برای هر مقدار x از $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است و مشتق آن $\cos x$ است.

۲- مشتق $y = \cos x$: مشتق کسینوس را نیز می‌توان به روش مشابه به دست آورد. اما راه ساده‌تر آن این است که آن را به سینوس که مشتق آن را می‌شناسیم تبدیل کنیم، آن گاه با به کار بردن قاعده مشتق تابع مرکب، مشتق آن را حساب کنیم:

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin u, \quad u = \frac{\pi}{2} - x$$

$$y' = (\cos u)u' = (-1)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x \quad \text{پس:}$$

بنابراین تابع $\cos x$ برای هر مقدار x مشتق پذیر است و مشتق آن $-\sin x$ است.

۳- مشتق $y = \tan x$: برای محاسبه این مشتق ابتدا می‌نویسیم: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ آن گاه دستور مشتق تابع کسری را در مورد آن به کار می‌بریم، خواهیم داشت:

$$y' = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

پس تابع $\tan x$ برای هر مقدار $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ مشتق پذیر است و مشتق آن

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ است.}$$

۴- مشتق $y = \cot x$: در این جا نیز روش بالا را به کار می‌بریم:

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y' = \frac{(-\sin x) \sin x - (\cos x) \cos x}{(\sin x)^2} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

پس تابع $\cot x$ برای هر مقدار $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ مشتق پذیر است و مشتق آن

$$-(1 + \cot^2 x) = \frac{-1}{\sin^2 x} \text{ است.}$$

مثال ۱۶:

اگر: $y = 2 \sin x + 3 \cos x$ ، آن گاه $y' = 2 \cos x - 3 \sin x$

اگر: $y = \sin 5x$ ، آن گاه $y' = 5 \cos 5x$

اگر: $y = \cos \frac{x}{3}$ ، آن گاه $y' = -\frac{1}{3} \sin \frac{x}{3}$

اگر: $y = \tan(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4})$ ، آن گاه با قرار دادن $y = \tan u$ و $u = \frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}$

خواهیم داشت: $y' = u'(1 + \tan^2 u) = -\frac{1}{4} \left[1 + \tan^2(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}) \right]$

نتیجه: اگر u و v را تابعی از x بگیریم، همهٔ دستورهای محاسبهٔ مشتق را که تاکنون دیده‌ایم

می‌توان در جدولی به صورت زیر خلاصه کرد:

تابع	مشتق	مثال
$y = c$	$y' = 0$	$y = 7 \Rightarrow y' = 0$, $y = -\sqrt{3} \Rightarrow y' = 0$, $y = 1373 \Rightarrow y' = 0$
$y = ax + b$	$y' = a$	$y = 4x - 9 \Rightarrow y' = 4$, $y = -5x + 7 \Rightarrow y' = -5$
x^n	nx^{n-1}	$y = x^6 \Rightarrow y' = 6x^5$
au	au'	$y = -3x^5 \Rightarrow y' = -3(5x^4) = -15x^4$
$u + v$	$u' + v'$	$y = x^3 + 4x \Rightarrow y' = 3x^2 + 4$
$u \cdot v$	$u' \cdot v + v' \cdot u$	$y = (3x^2 - x)(2x - 3) \Rightarrow y' = (6x - 1)(2x - 3) + 2(3x^2 - x)$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	$y = \frac{2x - 1}{3x^2 + 5} \Rightarrow y' = \frac{2(3x^2 + 5) - 6x(2x - 1)}{(3x^2 + 5)^2} = \frac{-6x^2 + 6x + 10}{(3x^2 + 5)^2}$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$y = \frac{1}{x^3} \Rightarrow y' = -\frac{3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$y = \frac{1}{x^5} \Rightarrow y' = \frac{-5}{x^6} = -5x^{-6}$
$f(u)$	$u'f'(u)$	$y = (3x^2 + 1)^4 \Rightarrow y' = (6x) [4(3x^2 + 1)^3] = 24x(3x^2 + 1)^3$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y = \sqrt{x^4 + 1} \Rightarrow y' = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4 + 1}}$, $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin u$	$u' \cos u$	$y = \sin(3x - 1)$, $y' = 3 \cos(3x - 1)$
$\cos u$	$-u' \sin u$	$y = \cos(x^2 + 1)$, $y' = -2x \sin(x^2 + 1)$
$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u)$	$y = \tan(1 - x^2)$, $y' = -2x [1 + \tan^2(1 - x^2)]$
$\cot u$	$-u'(1 + \cot^2 u)$	$y = \cot(-5x)$, $y' = 5 [1 + \cot^2(-5x)]$

تمرین

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید و در شماره‌های زوج مقدار مشتق را در نقطه داده شده حساب کنید.

$$۱) y = \sin x - \cos x \quad ۲) y = 3 \cos x \sin 2x \quad \text{و} \quad x = \pi$$

$$۳) y = 3 \sin^2 x + 2 \cos^2 x \quad ۴) y = (\sin x + \cos x)^2 \quad \text{و} \quad x = 3\frac{\pi}{4}$$

$$۵) y = \sin\left(-\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + \cos \frac{x}{4} \quad ۶) y = \sin x \cos 3x \quad \text{و} \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$$۷) y = \frac{1}{\cos x + \sin x} \quad ۸) y = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} \quad \text{و} \quad x = 0$$

$$۹) y = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) \quad ۱۰) y = x + \sin \sqrt{x} \quad \text{و} \quad x = \pi^2$$

$$۱۱) y = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \quad ۱۲) y = \sin x \tan x \quad \text{و} \quad x = \frac{\pi}{4}$$

$$۱۳) y = \tan^2 x - 2 \cot x \quad ۱۴) y = \frac{1 - \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{x}{2}} \quad \text{و} \quad x = \frac{\pi}{2}$$

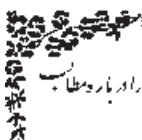
$$۱۵) y = \sqrt{1 + \sin x} \quad ۱۶) y = \frac{\sin x}{1 + x} \quad \text{و} \quad x = 0$$

$$۱۷) y = \sin^2 \sqrt{t} \quad ۱۸) y = \sin \omega t + \cos \omega t \quad \text{و} \quad t = \frac{\pi}{2\omega}$$

سرگرمی ریاضی

پدری ۴۶ ساله، یک پسر ۲۶ ساله و یک دختر دارد. اگر بعد از چند سال، سن پدر برابر با مجموع سن دو فرزندش و سه برابر سن دخترش شود، سن کنونی دختر چقدر است؟





معلمین محترمہ، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیائی آنان می توانند نظر اصلاحی خود را در باره مطالب

این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۴۶۳ ۱۵۸۵۵ - کد پستی ۷۴۷۰۱۵ یا پست الکترونیک: Email:

talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر نامه ریزی و تأیید کتاب: هیئت

