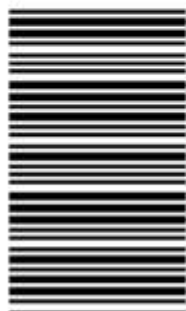


کد کنترل

131

F



131F

صبح پنجشنبه

۹۷/۲/۶



«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۷

مجموعه ریاضی - کد (۱۲۰۸)

مدت پاسخگویی: ۲۵۵ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۵۰

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۳۰	۱	۳۰
۲	دروس پایه (ریاضیات عمومی (۱) و (۲)، معادلات دیفرانسیل، مبنای علوم ریاضی، مبنای ماتریس‌ها و جبر خطی، مبنای آنالیز ریاضی، مبنای آنالیز عددی و مبنای احتمال)	۴۰	۳۱	۷۰
۳	آنالیز ریاضی	۲۰	۷۱	۹۰
۴	مبنای جبر و مبنای ترکیبیات	۲۰	۹۱	۱۱۰
۵	جبر خطی عددی، بهینه‌سازی خطی و نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل	۲۰	۱۱۱	۱۳۰
۶	احتمال (۱ و ۲) و فرایندهای تصادفی	۲۰	۱۳۱	۱۵۰

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حل جابجایی و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

۱۳۹۷

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی در جلسه این آزمون شرکت می‌نمایم.

امضا:

زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی):

PART A: Vocabulary

Directions: Choose the word or the phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then mark the correct choice on your answer sheet.

- 1- Fierce winds and deadly waves were only one ----- many explorers like Christopher Columbus confronted when sailing to unknown lands.
1) suspension 2) obstacle 3) shortage 4) variation
- 2- In urban desert areas potable water supplies are stressed by increasing demands that leave water managers ----- to find new supplies.
1) discouraging 2) refusing 3) invading 4) struggling
- 3- The sense of smell diminishes with advancing age—much more so than the sensitivity to taste. This ----- may result from an accumulated loss of sensory cells in the nose.
1) decrease 2) merit 3) ambiguity 4) defense
- 4- True, all economic activities have environmental consequences. Nevertheless, the goal of shrimp producers should be to reduce the ----- effects on the environment as much as possible.
1) indigenous 2) competitive 3) deleterious 4) imaginary
- 5- Like most successful politicians, she is pertinacious and single-minded in the ----- of her goals.
1) pursuit 2) discipline 3) permanence 4) involvement
- 6- Knowing that everyone would ----- after graduation, she was worried that she would not see her friends anymore.
1) emerge 2) conflict 3) differentiate 4) diverge
- 7- Certain mental functions slow down with age, but the brain ----- in ways that can keep seniors just as sharp as youngsters.
1) composes 2) conveys 3) compensates 4) corrodes
- 8- It is argued by some that hypnosis is an effective intervention for ----- pain from cancer and other chronic conditions.
1) displacing 2) alleviating 3) exploring 4) hiding
- 9- Children who get ----- atmosphere at home for studies perform better than students who are brought up under tense and indifferent family atmosphere.
1) favorable 2) valid 3) obedient 4) traditional

- 10- The post office has promised to resume first class mail ----- to the area on Friday.
 1) attention 2) progress 3) expression 4) delivery

PART B: Cloze Passage

Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

Colette began painting while she was still in her youth. (11) ----- 1970, she completed her first performance with *Hommage a Delacroix*, (12) ----- was the beginning of an artistic career (13) ----- to the oneness of art and life. (14) -----, actions and performances on streets and public squares, followed by her "living environments" and the "windows", (15) ----- in a selected pose with an elaborate arrangement of fabrics and lace.

- 11- 1) Since the year 2) During a year of
 3) For a year of 4) In the year
- 12- 1) that it 2) which 3) that 4) it
- 13- 1) devoted 2) was devoted 3) to devote 4) devoting
- 14- 1) Street works then came 2) Then came street works
 3) There coming then street works with 4) With street works then to come
- 15- 1) she remained motionless 2) that in there she remained motionless
 3) in which she remained motionless 4) that in it motionless she remained

PART C: Reading Comprehension:

Directions: Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.

PASSAGE 1:

The history of nonsmooth (not necessarily differentiable) analysis is quite short but very intense. The classical theory of optimization has always been connected to differentiation and strong regularity assumptions. However, these assumptions are often too demanding for practical applications, due to the "nonsmoothness" of natural phenomena. But necessity is the mother of invention: typically these nonsmooth problems are approximated by smooth ones and the developed theory is applied to them. This approach, however, causes other difficulties in the form of approximation errors, since the approximations may be too rough. This difficulty was one initiator of the theory of nonsmooth analysis.

Everyone who has dealt with optimization knows that convexity is a pleasant property and that optimization has a very clear geometrical interpretation. Thus it was natural that the theory was first developed for convex functions and the treatment was quite geometrical. In optimization theory the meaning of differentiation is to locally linearize the given differentiable function in the sense that the hyperplane generated by the gradient is the tangent plane of the graph of the function. For convex functions

canonical forms, so that while the student may have "seen" the Jordan and other canonical forms, there is usually little appreciation of their usefulness. And there is never time in the elementary courses to deal with more specialized topics like nonnegative matrices, inertia theorems, and so on.

In consequence, many graduate courses in mathematics, applied mathematics, or applications develop certain parts of matrix theory as needed. At Virginia, we have long had a first semester course in linear algebra for incoming applied mathematics graduate students, a course that is also taken by a number of students in various engineering disciplines. There has been a continuing problem with suitable textbooks at this level. The ones designed for undergraduates are too elementary and incomplete, and the more advanced books are not sufficiently applied, too difficult to read, too specialized, or out-of-print. Hence, the course has been taught primarily from lecture notes, which are the basis for this book.

- 21- Which word best describes the meaning of the underlined word "synonymous" in the first line?
 1) Useful 2) Beautiful 3) Similar 4) Pervasive
- 22- Matrix theory -----,
 1) has complicated problem statements in mathematics
 2) is both practically useful and mathematically beautiful
 3) is a generalization of linear algebra with essentially no attractiveness
 4) although mathematically beautiful, has limited applications
- 23- The term "canonical form" -----,
 1) is useful
 2) has no usefulness
 3) is inappropriately used in linear algebra
 4) is not appreciated in linear algebra
- 24- Linear algebra courses at the undergraduate level are ----- the one at the graduate level.
 1) repeated versions of
 2) more applied than
 3) less applied than
 4) not properly designed as compared to
- 25- For applied mathematics graduate students at Virginia, linear algebra -----,
 1) is taught by using lecture notes
 2) is taught too late in the program
 3) cannot be taught because appropriate textbooks are not available
 4) is taught by experts from engineering disciplines

PASSAGE 3:

The arrival of high-speed digital computers has also played a major role in the development of the science of decision making. Computers have inspired the development of larger systems and the coupling of previously separate systems, thereby resulting in decision and control problems of correspondingly increased complexity. At the same time, however, computers have revolutionized applied mathematics and solved many of the complex problems they generated. It is perhaps

natural that the concept of best or optimal decisions should emerge as the fundamental approach for formulating decision problems. In this approach a single real quantity, summarizing the performance or value of a decision, is isolated and optimized (i.e., either maximized or minimized depending on the situation) by proper selection among available alternatives. The resulting optimal decision is taken as the solution to the decision problem. This approach to decision problems has the virtues of simplicity, preciseness, elegance, and, in many cases, mathematical tractability. It also has obvious limitations due to the necessity of selecting a single objective by which to measure results. But optimization has proved its utility as a mode of analysis and is firmly entrenched in the field of decision making.

- 26- **Computers** -----,
- 1) are insignificantly useful for decision making
 - 2) have generated the science for revolutionary thinking
 - 3) caused many complicated problems in applied mathematics
 - 4) play an important role in solving complex problems in applied mathematics
- 27- **The word "alternative" in line 11 means** -----,
- 1) choices
 - 2) subjects
 - 3) objects
 - 4) variations
- 28- **Optimization** -----,
- 1) has complicated decision making
 - 2) is inappropriate for decision making
 - 3) is utilized in decision making
 - 4) contributes to simplification of complicated problems
- 29- **A solution to a decision problem** -----,
- 1) may be either optimal or elegant
 - 2) is constructed by solving an optimization problem
 - 3) must be simple and precise but may not be an optimal solution
 - 4) may be constructed by a combination of alternative decisions
- 30- **Optimizing a single objective** -----,
- 1) is meaningless
 - 2) has its own limitations
 - 3) is not proper for decision making
 - 4) is the only approach to decision making

دروس پایه (ریاضیات عمومی (۱ و ۲)، معادلات دیفرانسیل، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال):

۳۱- اگر f تابعی فرد باشد و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a$ ، آنگاه مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(-xe^{-x}) + f(x^3 - x^5) + f(x^6 - x^7))$ کدام

است؟

- (۱) a
- (۲) $-3a$
- (۳) $-a$
- (۴) $3a$

۳۲- کدام سری همگرا است؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{n}} \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n + e^n} \quad (4)$$

۳۳- اگر تابع f در معادله $\cos(f(x)) + \frac{1}{\pi^2}(f(x))^2 + 2f(x) = 1 + x$ صدق کند، آنگاه مقدار $f'(\pi) + 2f'(\pi)$ کدام است؟

$$\frac{\pi}{\pi + 6} \quad (1)$$

$$\frac{\pi + 6}{2\pi + 6} \quad (2)$$

$$\frac{\pi + 6}{\pi} \quad (3)$$

$$\frac{2\pi + 6}{\pi + 6} \quad (4)$$

۳۴- اگر $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n + n^2)x^n$ ، آنگاه $f\left(\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟

$$8 \quad (1)$$

$$9 \quad (2)$$

$$10 \quad (3)$$

$$11 \quad (4)$$

۳۵- مساحت ناحیه محدود به منحنی تابع $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ و محور x ها در بازه $[1, e^2]$ کدام است؟

$$5 \quad (1)$$

$$4 \quad (2)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (4)$$

۳۶- طول منحنی $f(x) = \int_1^x \sqrt{t^4 - 1} dt$ در بازه $[1, 3]$ کدام است؟

(۱) $\frac{19}{3}$

(۲) $\frac{25}{3}$

(۳) $\frac{26}{3}$

(۴) $\frac{28}{3}$

۳۷- کوتاه‌ترین فاصله بیضی به معادله $x^2 + xy + y^2 = 12$ تا مبدأ مختصات کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$

(۲) $2\sqrt{6}$

(۳) ۴

(۴) $2\sqrt{2}$

۳۸- مقدار $\int_0^1 \int_{x^2}^x (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} dy dx$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{2} - 1$

(۲) $2\sqrt{2}$

(۳) $\sqrt{2}$

(۴) $1 + \sqrt{2}$

۳۹- حجم جسم محصور به استوانه $x^2 + z^2 = 9$ و صفحات $x - y + z = 0$ و $x - y + z + 4 = 0$ کدام است؟

(۱) 72π

(۲) 36π

(۳) 18π

(۴) 9π

۴۰- اگر C منحنی فصل مشترک رویه‌های $x + y = 2a$ و $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay = 0$ در جهت راست‌گرد، مقدار

$\oint_C y dx + z dy + x dz$ کدام است؟

(۱) $-2\sqrt{2} \pi a^2$

(۲) $-\sqrt{2} \pi a^2$

(۳) $\sqrt{2} \pi a^2$

(۴) $2\sqrt{2} \pi a^2$

۴۱- مقدار جواب معادله $yy'' = y^2 y' + (y')^2$ با شرایط اولیه $y(0) = 1$ و $y'(0) = 2$ در $x = 1$ کدام است؟

$$-\frac{e}{e+2} \quad (1)$$

$$\frac{e}{e-2} \quad (2)$$

$$\frac{e}{e+2} \quad (3)$$

$$-\frac{e}{e-2} \quad (4)$$

۴۲- مقدار جواب معادله $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \cos x$ با شرایط اولیه $y(0) = 1$ و $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ در $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{2}} (1 + \frac{\pi}{4}) \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{\pi}{8}) \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{2}} (1 + \frac{\pi}{8}) \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{\pi}{4}) \quad (4)$$

۴۳- ریشه‌های معادله شاخص معادله $x^2(x+1)y'' + x(x-4)y' + 4y = 0$ در $x = 0$ کدام است؟

$$r_1 = -1, r_2 = 4 \quad (1)$$

$$r_1 = 1, r_2 = -4 \quad (2)$$

$$r_1 = 1, r_2 = 4 \quad (3)$$

$$r_1 = -1, r_2 = -4 \quad (4)$$

۴۴- جواب عمومی دستگاه $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y + t - 1 \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y - 5t - 2 \end{cases}$ کدام است؟

$$\begin{cases} x = 2c_1 e^{ft} + c_2 e^{-2t} + 3t - 2 \\ y = 3c_1 e^{ft} - c_2 e^{-2t} - 2t + 3 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x = c_1 e^{ft} + c_2 e^{-t} + 3t - 2 \\ y = \frac{3}{2} c_1 e^{ft} - c_2 e^{-t} - 2t + 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x = 2c_1 e^{ft} + c_2 e^{-2t} - 3t + 2 \\ y = 3c_1 e^{ft} - c_2 e^{-2t} + 2t - 3 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x = c_1 e^{ft} + c_2 e^{-t} - 3t + 2 \\ y = \frac{3}{2} c_1 e^{ft} - c_2 e^{-t} + 2t - 3 \end{cases} \quad (3)$$

۴۵- فرض کنید تابع $y = y(x)$ در معادله انتگرال $y(x) = x + e^x \int_0^x y(t)e^{-t} dt$ صدق کند. $y(1)$ کدام است؟

$$(1) \frac{1}{2}(e^2 - 1)$$

$$(2) \frac{1}{4}(e^2 - 1)$$

$$(3) \frac{1}{4}(e^2 + 1)$$

$$(4) \frac{1}{2}(e^2 + 1)$$

۴۶- فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ تابع باشد و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$. کدام گزینه درست است؟

$$(1) f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$$

$$(2) f(A \cup f^{-1}(B)) = f(A) \cup B$$

$$(3) f^{-1}(f(A) \cap B) = A \cap f^{-1}(B)$$

$$(4) f^{-1}(f(A) \cup B) = A \cup f^{-1}(B)$$

۴۷- فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ یک تابع با خاصیت زیر باشد:

$$\forall A, B \subseteq X (A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset)$$

کدام گزینه درست است؟

(۱) تابع f پوشا است ولی لزوماً یک به یک نیست.

(۲) تابع f یک به یک است ولی لزوماً پوشا نیست.

(۳) تابع f یک به یک و پوشا است.

(۴) تابع f لزوماً یک به یک و پوشا نیست.

۴۸- فرض کنید R, S و T رابطه‌های دوتایی در مجموعه ناتهی A هستند. کدام گزینه درست است؟

$$(1) T \circ (R \cap S) = (T \circ R) \cap (T \circ S)$$

$$(2) T \circ (R - S) = (T \circ R) - (T \circ S)$$

$$(3) (R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$$

$$(4) (R - S) \circ T = R \circ T - S \circ T$$

۴۹- فرض کنید \mathbb{R} مجموعه اعداد حقیقی باشد، $A \subseteq \mathbb{R}$ و $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ تابع باشد. فرمول منطقی گزاره زیر کدام گزینه است؟

در گزینه‌های زیر ε و δ مقید به اعداد مثبت، L مقید به اعداد حقیقی و a مقید به اعضای A است. تابع f در هیچ نقطه‌ای از A حد ندارد.

$$(1) \forall a \forall L \exists \varepsilon \exists \delta \exists x (x \in A \wedge |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon)$$

$$(2) \forall a \forall L \exists \varepsilon \forall \delta \forall x (x \in A \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| \geq \varepsilon)$$

$$(3) \forall a \forall L \forall \varepsilon \exists \delta \exists x (x \in A \wedge |x - a| < \varepsilon \wedge |f(x) - L| \geq \delta)$$

$$(4) \forall a \forall L \exists \delta \forall \varepsilon \exists x (x \in A \wedge |x - a| < \varepsilon \wedge |f(x) - L| \geq \delta)$$

۵۰- فرض کنید $A < B$ به این مفهوم است که A با زیر مجموعه‌ای از B هم‌عدد (هم ارز) است ولی B با هیچ زیر مجموعه‌ای از A هم‌عدد (هم ارز) نیست. اگر $A < B$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱) هیچ تابع پوشایی از B به A وجود ندارد.

(۲) هیچ تابع پوشایی از A به B وجود ندارد.

(۳) یک تابع یک به یک از B به A وجود دارد.

(۴) بین A و B یک تابع یک به یک و پوشا وجود دارد.

۵۱- کدام یک از توابع زیر از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R}^2 ، یک تبدیل خطی است؟

$$(۱) T_1(x_1, x_2) = (x_1 x_2, x_2)$$

$$(۲) T_2(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2 + 1)$$

$$(۳) T_3(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 - 1, 0)$$

$$(۴) T_4(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, 3x_1)$$

۵۲- فرض کنید $\mathbb{R}^4 \supseteq V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. فضای V^\perp کدام است؟ (منظور از V^\perp ،

فضای متعامد در \mathbb{R}^4 است.)

$$(۱) \{(a, 2a, b, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$(۲) \{(a, 2a, a, a) | a \in \mathbb{R}\}$$

$$(۳) \{(a, 2a, b, c) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$(۴) \{(a, 2b, c, d) | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

۵۳- فرض کنید $A \in M_{10}(\mathbb{R})$ که در هر سطر A ، دقیقاً یک عنصر ناصفر وجود دارد و

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ (10)^{10} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

در این صورت کدام یک از اعداد زیر، مقدار ویژه A است؟

(۱) ۰

(۲) ۱

(۳) ۱۰

(۴) 10^{10}

۵۴- فرض کنید A ماتریسی 8×8 با درایه‌های ۱ و -۱ باشد که هر دو سطر آن برهم عمودند. در این صورت قدرمطلق

$\det(A)$ کدام است؟

(۱) ۸

(۲) 8^2

(۳) 8^3

(۴) 8^4

۵۵- اگر $A \in M_{10}(\mathbb{R})$ و $\text{rank}(A) \leq 8$ باشد، آنگاه $\text{rank}(\text{adj}(A))$ کدام است؟

(۱) ۰

(۲) ۲

(۳) ۸

(۴) ۱۰

۵۶- اگر E و F زیرمجموعه‌های ناتهی و کران‌دار \mathbb{R} باشند، $E + F = \{x + y : x \in E, y \in F\}$ و

$EF = \{xy : x \in E, y \in F\}$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱) $\sup(E + F) = \sup E + \sup F$

(۲) $\sup(EF) = \sup E \cdot \sup F$

(۳) اگر $E \cap F \neq \emptyset$ آنگاه $\sup(EUF) = \sup E + \sup F - \sup(E \cap F)$

(۴) اگر $E \cap F \neq \emptyset$ آنگاه $\sup(E \cap F) = \sup E \cdot \sup F$

۵۷- اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ و برای هر $n \geq 1$ ، $a_n - a_{n+1} \geq \frac{1}{n(n+1)}$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱) سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|}$ همگرا است. (۲) برای هر n ، $a_n \geq \frac{1}{n}$

(۳) سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است. (۴) برای هر n ، $a_n \leq \frac{1}{n}$

۵۸- کدام گزینه نادرست است؟

(۱) تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ موجود است که تنها در یک نقطه مشتق پذیر است.

(۲) اگر تابع $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ دارای مشتق کراندار باشد، دنباله $\{f(\frac{1}{n})\}$ همگرا است.

(۳) تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ موجود است که تنها در اعداد اصم پیوسته است.

(۴) تابع مشتق پذیر $f: [0, 7] \rightarrow \mathbb{R}$ موجود است که $f'(x) = [x]$ ($0 \leq x \leq 7$)

۵۹- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{گویا } x \\ 0 & \text{اصم } x \end{cases}$ و $a = \int_0^1 f(x) dx$ و $b = \int_0^1 f(x) dx$ به ترتیب انتگرال ریمان بالایی و

پایینی f باشند. کدام گزینه درست است؟

(۱) $a = b = 0$

(۲) $b = 0$ ، $a = \frac{1}{4}$

(۳) $a = b = \frac{1}{4}$

(۴) $b = \frac{1}{5}$ ، $a = \frac{1}{4}$

۶۰- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) مجموع هر دو تابع پیوسته یکنواخت، پیوسته یکنواخت است.
 (۲) اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مشتق کراندار داشته باشد، پیوسته یکنواخت است.
 (۳) حاصل ضرب هر دو تابع پیوسته یکنواخت، پیوسته یکنواخت است.
 (۴) اگر f در بازه $[a, b]$ انتگرال پذیر ریمان باشد آنگاه تابع $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ بر بازه $[a, b]$ پیوسته یکنواخت است.

۶۱- فرض کنید یک دستگاه معادلات خطی با روش حذفی گاوس و محورگزینی سطری در یک کامپیوتر با روند عدد یک برای نمایش اعداد حقیقی برابر با 10^{-14} ، حل شود. اگر عدد حالت ماتریس ضرایب دستگاه برابر با 10^{14} باشد، آنگاه تعداد رقم‌های ده‌دهی قابل اعتماد در جواب به دست آمده حداکثر کدام است؟

- (۱) ۰
 (۲) ۱
 (۳) ۱۳
 (۴) ۱۵

۶۲- برای اینکه قاعده انتگرال گیری دوزنقه‌ای برای محاسبه $\int_0^1 (x^5 - cx^4)dx$ دقیق باشد، مقدار c کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{18}$
 (۲) $\frac{3}{10}$
 (۳) $\frac{1}{30}$
 (۴) $\frac{10}{9}$

۶۳- اگر روش نیوتن برای حل مسئله $x^2 - 2\sin^2 x = 0$ به یک عدد مثبت x همگرا شود، آنگاه نرخ همگرایی مجانبی کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) $1 < p < 2$ و p

۶۴- تابع $f(x) = 2\sin 2x + 3\sin 2x + x^2$ روی بازه $[0, \pi]$ را با چه طول گام h باید جدول بندی کرد تا خطای حاصل از درون یابی تکه‌ای خطی از 10^{-6} بیشتر نشود؟

- (۱) ۰٫۰۰۳
 (۲) ۰٫۰۰۵
 (۳) ۰٫۰۰۰۳
 (۴) ۰٫۰۰۰۵

۶۵- دنباله حاصل از تکرار نقطه ثابت به صورت $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ، $n=0, 1, 2, \dots$ که $\varphi(x) = 2x + Bx^2 + Cx^3$ را در نظر بگیرید. ضرایب B و C چگونه باشند که تکرارها به صورت موضعی به $\frac{1}{\alpha}$ با مرتبه همگرایی دست کم ۳، همگرا شوند؟ (α عدد مثبت است)

$$B = 2\alpha^2, \quad C = 3 \quad (1)$$

$$B = 2\alpha, \quad C = \alpha^2 \quad (2)$$

$$B = -2\alpha, \quad C = \alpha^2 \quad (3)$$

$$B = 2, \quad C = 2\alpha \quad (4)$$

۶۶- به چند طریق می توان ۲۰ ورزشکار را به ۵ گروه دو نفره و ۲ گروه پنج نفره تقسیم نمود؟

$$\frac{20!}{(2!)^2(5!)} \quad (1)$$

$$\frac{20!}{(2!)^5(5!)^2} \quad (2)$$

$$\frac{20!}{(2!)^6(5!)^3} \quad (3)$$

$$\frac{20!}{(2!)^5(5!)^2 7!} \quad (4)$$

۶۷- اگر جمع میانگین و میانه یک نمونه تصادفی ۱۲ تایی برابر ۲۲ و بزرگترین یافته نمونه برابر ۱۷ باشد، جمع میانگین و میانه وقتی که بزرگترین یافته نمونه با ۲۳ جایگزین شود، کدام است؟

$$22/5 \quad (1)$$

$$23 \quad (2)$$

$$23/5 \quad (3)$$

$$24 \quad (4)$$

۶۸- از n توپ با شماره‌های $1, 2, \dots, n$ به تصادف ۳ توپ بدون جایگذاری خارج می کنیم. احتمال اینکه اولین توپ شماره‌ای کوچکتر از دومین توپ داشته باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{n} \quad (4)$$

۶۹- ظرفی شامل ۲ مهره قرمز، ۲ مهره آبی، یک مهره سیاه و ۴ مهره سفید است. به ترتیب و به تصادف بدون جایگذاری از ظرف مهره خارج می‌کنیم. احتمال اینکه سومین مهره سفید در بار هفتم ظاهر شود، کدام است؟

$$\frac{5}{9} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{21} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{18} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{42} \quad (۴)$$

۷۰- فرض کنید B_1, B_2, \dots, B_n پیشامدهای مستقل روی یک فضای نمونه‌ای باشند که $P(B_i) = \frac{1}{i+1}$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ است. احتمال اینکه دقیقاً یکی از این پیشامدها رخ دهد، کدام است؟

$$\frac{1}{n+1} \quad (۱)$$

$$\frac{n}{n+1} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+1} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \quad (۴)$$

آنالیز ریاضی:

۷۱- هرگاه d_1 و d_2 دو متر روی مجموعه ناتهی X باشند، کدام گزینه ممکن است یک متر روی X نباشد؟

$$d(x, y) = \min \{d_1(x, y), d_2(x, y)\} \quad (۱)$$

$$d(x, y) = \sqrt{d_1(x, y) + d_2(x, y)} \quad (۲)$$

$$d(x, y) = \max \{d_1(x, y), d_2(x, y)\} \quad (۳)$$

$$d(x, y) = \frac{d_1(x, y) + d_2(x, y)}{1 + d_1(x, y) + d_2(x, y)} \quad (۴)$$

۷۲- فرض کنید $\{(X_n, d_n)\}$ دنباله‌ای از فضاهای متریک باشد و $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. کدام گزینه ممکن است یک متر

روی X نباشد؟

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) \quad (x = \{x_n\}, y = \{y_n\}) \quad (۱)$$

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)} \quad (x = \{x_n\}, y = \{y_n\}) \quad (۲)$$

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)} \quad (x = \{x_n\}, y = \{y_n\}) \quad (۳)$$

$$d(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)} \quad (x = \{x_n\}, y = \{y_n\}) \quad (۴)$$

۷۳- برای $x \in \mathbb{R}$ و $A \subseteq \mathbb{R}$ ، تعریف کنید $d(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$ و قرار دهید $E = \{x \in \mathbb{R} : d(x, A) \leq 1\}$. کدام گزینه درست است؟

(۱) E فشرده و همبند است.

(۲) E فشرده است اما لزوماً همبند نیست.

(۳) E لزوماً فشرده نیست و لزوماً همبند نیست.

(۴) E لزوماً فشرده نیست اما همبند است.

۷۴- فرض کنید X و Y فضاهای متریک، X فشرده و تابع $f: X \rightarrow Y$ پیوسته باشد. اگر $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر A بسته باشد آنگاه $f(A)$ هم بسته است.

(۲) اگر A باز باشد آنگاه $f(A)$ هم باز است.

(۳) اگر B همبند باشد آنگاه $f^{-1}(B)$ نیز همبند است.

(۴) اگر هر نقطه B حدی باشد آنگاه هر نقطه $f^{-1}(B)$ حدی است.

۷۵- فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و d, ρ دو متر روی X باشند به طوری که به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ در X اگر $\{x_n\}$ نسبت به متر d همگرا باشد آنگاه نسبت به متر ρ نیز همگرا باشد. برای $E \subseteq X$ درون E نسبت به d و

ρ را به ترتیب با E_d° و E_ρ° نشان می‌دهیم. کدام گزینه درست است؟

$$E_d^\circ = E_\rho^\circ \quad (۱)$$

(۲) E_d° و E_ρ° ارتباطی با هم ندارند.

(۳) $E_d^\circ \subseteq E_\rho^\circ$ ، ولی تساوی لزوماً برقرار نیست.

(۴) $E_\rho^\circ \subseteq E_d^\circ$ ، ولی تساوی لزوماً برقرار نیست.

- ۷۶- فرض کنید X یک فضای متریک و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد. کدام گزینه درست است؟
- (۱) اگر مجموعه $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ بسته و کراندار باشد، آنگاه $\{x_n\}$ همگراست.
 - (۲) اگر $\{x_n\}$ کوشی و دارای زیردنباله‌ای همگرا باشد، آنگاه $\{x_n\}$ همگراست.
 - (۳) اگر هر زیردنباله $\{x_n\}$ کوشی باشد، آنگاه $\{x_n\}$ همگراست.
 - (۴) اگر مجموعه $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ بسته و کراندار باشد، آنگاه $\{x_n\}$ کوشی است.
- ۷۷- فرض کنید X و Y دو فضای متریک باشند. تابع $f: X \rightarrow Y$ پیوسته است هرگاه برای هر زیرمجموعه $A \dots\dots\dots$ از Y ، $f^{-1}(A)$ در X باشد.
- (۱) فشرده - فشرده
 - (۲) بسته - فشرده
 - (۳) فشرده - بسته
 - (۴) همبند - همبند
- ۷۸- فرض کنید X و Y دو فضای متریک باشند، تابع $f: X \rightarrow Y$ را در نظر بگیرید. ارتباط گزاره زیر با پیوستگی f چیست؟ (برای هر $a \in X$ و هر دنباله $\{x_n\}$ در X همگرا به a ، زیردنباله $\{x_{n_k}\}$ وجود دارد که $\{f(x_{n_k})\}$ به $f(a)$ همگراست.)
- (۱) این گزاره پیوستگی f را نتیجه می‌دهد ولی پیوستگی f این گزاره را نتیجه نمی‌دهد.
 - (۲) پیوستگی f این گزاره را نتیجه می‌دهد ولی این گزاره پیوستگی f را نتیجه نمی‌دهد.
 - (۳) این گزاره معادل با پیوستگی f است.
 - (۴) این گزاره ارتباطی با پیوستگی f ندارد.
- ۷۹- فرض کنید (X, d) یک فضای متریک فشرده و مجموعه A متشکل از نقاط تنهای X ، ناتهی باشد. برای تابع حقیقی f روی A کدام گزینه درست است؟
- (۱) فقط در صورتی پیوسته است که A همبند باشد.
 - (۲) فقط در صورتی پیوسته است که A متناهی باشد.
 - (۳) f پیوسته یکنواخت است.
 - (۴) f پیوسته است ولی لزوماً پیوسته یکنواخت نیست.
- ۸۰- اگر (X, d) یک فضای متریک باشد که هر تابع پیوسته $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است، آنگاه X است.
- (۱) فشرده
 - (۲) گسسته
 - (۳) متناهی
 - (۴) کامل (هر دنباله کوشی، همگرا است)
- ۸۱- سری تابعی $\sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n (1-x)$ بر $[0, 1]$ است.
- (۱) به‌طور مطلق همگرای یکنواخت است.
 - (۲) همگرای یکنواخت است ولی به‌طور مطلق همگرای یکنواخت نیست.
 - (۳) همگرای یکنواخت نیست ولی جمله عمومی آن به صفر همگرای یکنواخت است.
 - (۴) همگرای یکنواخت نیست و جمله عمومی آن نیز به صفر همگرای یکنواخت نیست.

۸۲- فرض کنید (X, d) یک فضای متریک و $f_n: X \rightarrow (0, +\infty)$ دنباله‌ای از توابع باشد، به طوری که دنباله $\left\{ \frac{f_{n+1}}{f_n} \right\}$

به همگرایی یکنواخت است. به ازای کدام مقدار $M = \sup \{f(x) : x \in X\}$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ همگرایی یکنواخت است؟

$$M = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$M = \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$M = 1 \quad (3)$$

(۴) به ازای هر مقدار $M \in \mathbb{R}$ سری لزوماً همگرایی یکنواخت نیست.

۸۳- دنباله توابع $f_n(x) = \arctan \frac{2x}{x^2 + n^2}$ بر \mathbb{R} ...

(۱) به طور یکنواخت به تابعی ناصفر همگراست.

(۲) به طور نقطه‌وار به صفر همگراست ولی نه به طور یکنواخت.

(۳) به طور یکنواخت به صفر همگراست.

(۴) به طور نقطه‌وار به تابعی ناصفر همگراست ولی نه به طور یکنواخت.

۸۴- فرض کنید $\{f_n\}_n$ دنباله‌ای از توابع حقیقی و همگرایی یکنواخت روی \mathbb{R} باشد. کدام گزینه درست است؟

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(x) dx = \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \quad (1)$$

(۲) اگر هر f_n کران‌دار باشد آنگاه $\{f_n\}_n$ به طور یکنواخت کران‌دار است.

(۳) اگر هر f_n مشتق پیوسته داشته باشد آنگاه حد $\{f_n\}$ تابعی مشتق‌پذیر است.

(۴) اگر هر f_n پیوسته باشد آنگاه $\{f_n^2\}_n$ همگرایی یکنواخت است.

۸۵- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nx(1-x^2)^n dx$ کدام است؟

$$0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$1 \quad (3)$$

$$\infty \quad (4)$$

۸۶- مجموعه همه مقادیر p که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^p}$ بر بازه همگرای یکنواخت است برابر است با

$$(۱) \{p : p > 0\} \cdot \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$(۲) \{p : p \geq 1\} \cdot \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$(۳) \{p : p > 0\} \cdot \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$(۴) \{p : p \geq 1\} \cdot \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

۸۷- سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-\sin x)^n \cos(nx)$ را بر بازه $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟

(۱) سری به طور مطلق همگرای یکنواخت است.

(۲) سری به طور مطلق همگرای نقطه‌وار است ولی همگرای یکنواخت نیست.

(۳) سری همگرای یکنواخت است ولی به طور مطلق همگرای یکنواخت نیست.

(۴) سری به طور مشروط همگرای نقطه‌وار است ولی به طور مطلق همگرای نقطه‌وار نیست.

۸۸- فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع و $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی مقدار بر \mathbb{R} باشند، به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$

بر \mathbb{R} به طور یکنواخت همگراست. تحت کدام شرط می‌توان نتیجه گرفت $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ بر \mathbb{R} به طور یکنواخت

همگراست؟

(۱) f بر \mathbb{R} کراندار باشد.

(۲) f پیوسته باشد.

(۳) صفر عضو بستار $f(\mathbb{R})$ نباشد.

(۴) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ موجود و متناهی باشد.

۸۹- فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای هم‌پیوسته از توابع حقیقی مقدار بر فضای متریک (X, d) باشد که $f_n \rightarrow f$ (نقطه‌وار). کدام گزینه نادرست است؟

(۱) f پیوسته یکنواخت است.

(۲) اگر X فشرده باشد، آنگاه دنباله $\{f_n\}$ یکنواخت کراندار است.

(۳) f پیوسته است، اما لزوماً پیوسته یکنواخت نیست.

(۴) اگر دنباله $\{f_n\}$ یکنواخت کراندار باشد، آنگاه f کراندار است.

- ۹۰- اگر $X = C[0, 1]$ فضای توابع پیوسته حقیقی مقدار روی $[0, 1]$ با نرم سوپریم باشد، کدام گزینه درست است؟
- (۱) X فشردده است.
 - (۲) X هم پیوسته است.
 - (۳) X ناهمبند است.
 - (۴) X جدایی پذیر است.

مبانی جبر و مبانی ترکیبیات:

- ۹۱- کدام یک از حلقه‌های زیر، دامنه صحیح نیست؟
- (۱) \mathbb{Z}
 - (۲) \mathbb{Z}_v
 - (۳) \mathbb{Q}
 - (۴) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- ۹۲- فرض کنید p یک عدد اول است. در کدام حالت، گروه G لزوماً آبدلی نیست؟
- (۱) $|G| = p$
 - (۲) $|G| = p^2$
 - (۳) $|G| = p^3$
 - (۴) $|G / Z(G)| = p$
- ۹۳- ایده‌آل‌های اول حلقه \mathbb{Z} به صورت $n\mathbb{Z}$ است که:
- (۱) $n = 0$.
 - (۲) n یک عدد اول است.
 - (۳) n مربع یک عدد اول است.
 - (۴) $n = 0$ یا n یک عدد اول است.
- ۹۴- فرض کنید G گروه و $H \leq G$ و $[G : H] = 2$ باشد. کدام مورد صحیح است؟
- (۱) $H \leq G'$
 - (۲) $Hx = xH$ برای هر $x \in G$
 - (۳) $Hx = Hx^2$ برای هر $x \in G$
 - (۴) $H \leq Z(G)$
- ۹۵- کدام یک از گروه‌های زیر ساده نیست؟
- (۱) \mathbb{Z}_7
 - (۲) \mathbb{Z}_5
 - (۳) $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$
 - (۴) گروه متناوب A_5

۹۶- فرض کنید G گروه کواترنیون‌های مرتبه ۸ باشد، یعنی $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. در این صورت مرکز G کدام است؟

(۱) $\{\pm 1\}$

(۲) $\{\pm 1, \pm i\}$

(۳) $\{\pm 1, \pm j\}$

(۴) $\{\pm 1, \pm k\}$

۹۷- فرض کنیم m و n اعداد صحیح مثبت باشند، به طوری که m یک شمارنده n است و $\sigma \in S_n$ یک دور به طول n باشد. در این صورت کدام مورد صحیح است؟

(۱) $\sigma^m = 1$

(۲) σ^m حاصل ضرب m دور مجزا هر کدام به طول $\frac{n}{m}$ است.

(۳) σ^m حاصل ضرب m دور هر کدام به طول n است.

(۴) σ^m حاصل ضرب m دور مجزا هر کدام به طول m است.

۹۸- فرض کنیم H یک زیرگروه نرمال G باشد و $|H| = 4$. اگر عضو $aH \in \frac{G}{H}$ از مرتبه ۵ باشد، کدام مورد نمی‌تواند

مرتبه a باشد؟

(۱) ۴

(۲) ۵

(۳) ۱۰

(۴) ۲۰

۹۹- تعداد عناصر مرتبه ۶ در $S_7 \times \mathbb{Z}_6$ کدام است؟

(۱) ۱۲

(۲) ۱۵

(۳) ۱۸

(۴) ۲۰

۱۰۰- تعداد ایده‌آل‌های دو طرفه حلقه $M_2\left(\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}\right)$ برابر با کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۱۰۱- فرض کنید G گرافی همبند ۱۲ رأسی و ۱۸ یالی باشد که به صورت مسطح در صفحه رسم شده است. تعداد وجوه ایجاد شده، کدام گزینه است؟

(۱) ۶

(۲) ۸

(۳) ۹

(۴) ۱۰

۱۰۲- ضریب $x^6 y^2 z$ در بسط $(1+2x+3y+4z)^{11}$ کدام است؟

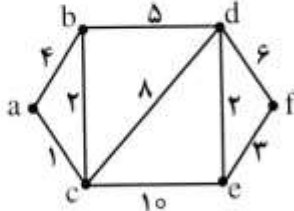
(۱) $(77)(5)(3^4)(2^{10})$

(۲) $(77)(5)(3^7)(2^2)$

(۳) $(77)(5)(3^7)(2^7)$

(۴) $(77)(5)(3^2)(2^3)$

۱۰۳- در گراف زیر، کمترین وزن در میان مسیرهای بین نقاط a و f کدام است؟



(۱) ۱۲

(۲) ۱۳

(۳) ۱۴

(۴) ۱۵

۱۰۴- با ۱۲ نفر می‌خواهیم ۳ گروه ۴ نفره برای بحث کردن تشکیل دهیم. به چند طریق امکان‌پذیر است؟

(۱) $3 \binom{12}{4}^2$

(۲) $\frac{12!}{2^3 \times 3^3}$

(۳) $4 \binom{12}{3}^2$

(۴) $\frac{12!}{2^{10} \times 3^4}$

۱۰۵- تابع $f(x) = (1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ تابع مولد چه دنباله‌ای است؟

(۱) $\binom{2n}{n}$

(۲) $\frac{1}{n+2} \binom{2n}{n}$

(۳) $\binom{2n+1}{n+1}$

(۴) $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

۱۰۶- فرض کنید G یک گراف ۲۰۰ رأسی باشد که هیچ سه رأسی دوجه‌دو به هم وصل نیستند. حداکثر تعداد یال‌های G برابر است با:

(۱) ۱۲۰۰۰

(۲) ۸۰۰۰

(۳) ۱۰۰۰۰

(۴) ۵۰۰۰

۱۰۷- تعداد دنباله‌های ۵ رقمی که هر رقم آن برابر ۱۰ یا ۲ است و تعداد صفرهای آن فرد می‌باشد، برابر است با:

(۱) ۴۰

(۲) ۸۰

(۳) ۱۲۱

(۴) ۲۴۲

۱۰۸- ۷ مهره آبی و ۱۱ مهره قرمز داریم. به چند طریق می‌توان آن‌ها را در یک ردیف چید به گونه‌ای که مهره سمت راست هر مهره آبی، مهره‌ای قرمز باشد؟

(۱) $\binom{12}{5}$

(۲) $\binom{11}{5}$

(۳) $\binom{12}{4}$

(۴) $\binom{11}{4}$

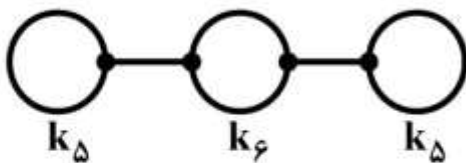
۱۰۹- تعداد تطابق‌های کامل گراف زیر کدام گزینه است؟ (منظور از یال بین k_5 و k_6 یعنی یکی از رئوس k_5 به یکی از رئوس k_6 وصل است.)

(۱) ۰

(۲) ۲۷

(۳) ۴۸

(۴) $6^2 \times 4$



۱۱۰- فرض کنید G گرافی همبند، n رأسی و m یالی باشد که دور به طول زوج ندارد. در این صورت بهترین کران بالایی

برای $\frac{m}{n}$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) $1/2$

(۳) $1/5$

(۴) ۲

جبر خطی عددی، بهینه‌سازی خطی و نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل:

۱۱۱- اگر A یک ماتریس $n \times n$ ، $n > 2$ ، قطری غالب سطری اکید باشد و به‌ازای هر i ، $a_{ii} = 1$ ، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) A وارون‌پذیر است. (۲) $\|A\|_{\infty} < 2$.

(۳) A^{-1} قطر غالب سطری است. (۴) دستگاه $Ax = b$ جواب یکتا دارد.

۱۱۲- فرض کنید A ماتریسی حقیقی و $m \times n$ است، $m > n$ و $\text{rank}(A) = n$. جواب کمترین مربعات دستگاه $Ax = b$ با جواب کمترین مربعات دستگاه برابر است.

(۱) $AA^T x = A^T b$.

(۲) $DAx = Db$ ، که $D^T D \neq I$ و D قطری و وارون‌پذیر،

(۳) $QAx = Qb$ ، که $Q_{m \times m}$ یک ماتریس متعامد،

(۴) $UAx = Ub$ ، که $U_{m \times m}$ بالامتلی، وارون‌پذیر و $U^T U \neq I$.

۱۱۳- ماتریس A متقارن است و کوچک‌ترین مقدار ویژه آن -3 است. به‌ازای λ برابر با، ماتریس $A + \lambda I$ معین مثبت است.

(۱) 2 که $3 + \epsilon$ که $\epsilon > 0$

(۳) 3 که $3 - \epsilon$ که $0 < \epsilon$

۱۱۴- محاسبه وارون و استفاده از آن در حل دستگاه مربع در مقایسه با حل مستقیم دستگاه با روش حذفی گاوس، هزینه محاسباتی دارد.

(۱) بیشتر و دقت کمتر (۲) کمتر و دقت کمتر (۳) بیشتر و دقت بیشتر (۴) کمتر و دقت بیشتر

۱۱۵- فرض کنید $E = I - \beta uv^T$ که در آن u و v بردارهای n بعدی و β یک اسکالر است. برای محاسبه کارای EX و $E^T X$ به ترتیب نیاز به عملیات اصلی است.

(۱) $O(n^2)$ و $O(n)$ (۲) $O(n^2)$ و $O(n^2)$

(۳) $O(n^2)$ و $O(n^2)$ (۴) $O(n)$ و $O(n)$

۱۱۶- دستگاه $\begin{cases} 2x_1 = 3 \\ 4x_1 = 5 \end{cases}$ داده شده است. جواب کمترین مربعات آن کدام است؟

(۱) $1/2$ (۲) $1/3$

(۳) $1/6$ (۴) $1/1$

۱۱۷- مسئله $\min_x \|Ax - b\|_p$ که در آن A $m \times n$ است، است.

(۱) جواب یکتا دارد اگر ستون‌های A مستقل خطی باشند.

(۲) جواب بهینه برابر با صفر دارد اگر $m = n$.

(۳) می‌تواند جواب نداشته باشد.

(۴) بی‌نهایت جواب دارد اگر مقدار بهینه ناصفر باشد.

۱۱۸- مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر و جدول نهایی ناکامل آن را در نظر بگیرید. در جدول نهایی، مقادیر α و β چقدر هستند؟

$$\text{Max } z = 6x_1 + 2x_2 + 12x_3$$

$$\text{s.t. } 4x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 24$$

$$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 30$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	1				α		β
x_3	0			1	$\frac{1}{3}$		
s_2	0					-1	

$$\alpha = 4, \beta = 96 \quad (4) \quad \alpha = 4, \beta = 96 \quad (3) \quad \alpha = 2, \beta = 94 \quad (2) \quad \alpha = 2, \beta = 96 \quad (1)$$

۱۱۹- فرض کنید جدول زیر متناظر با یکی از تکرارهای الگوریتم سیمپلکس برای حل مسئله $\min c^T x$ است. فرض کنید جدول زیر متناظر با یکی از تکرارهای الگوریتم سیمپلکس برای حل مسئله $\min c^T x$ است. فرض کنید جدول زیر متناظر با یکی از تکرارهای الگوریتم سیمپلکس برای حل مسئله $\min c^T x$ است. فرض کنید جدول زیر متناظر با یکی از تکرارهای الگوریتم سیمپلکس برای حل مسئله $\min c^T x$ است.

است که $b \geq 0$. به علاوه، s_1, s_2 و s_3 متغیرهای کمکی این مسئله هستند و a_{ij} ستون ضرایب متغیر

x_2 در ماتریس A است. در این صورت، مقدار β_2 برابر است با ...

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
z	1	α	β	0	0	0	η	u
x_3	0	α_1	β_1	1	0	0	η_1	u_1
s_2	0	α_2	β_2	0	0	1	η_2	u_2
s_1	0	α_3	β_3	0	1	0	η_3	u_3

$$a_{22} + \eta_2 a_{32} \quad (4) \quad \eta_2 a_{22} \quad (3) \quad a_{22} + \eta_2 a_{32} \quad (2) \quad \eta_2 a_{22} \quad (1)$$

۱۲۰- اگر در یک جواب بهینه مسئله زیر، متغیرهای x_1 و x_3 پایه‌ای باشند و z^* (مقدار بهینه تابع هدف) برابر با ۱۴ باشد، مقدار c_1 کدام است؟

$$\text{Max } z = c_1 x_1 - x_2 + 8x_3$$

$$\text{s.t. } 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 9$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\Delta \quad (4) \quad 4 \quad (3) \quad 3 \quad (2) \quad 2 \quad (1)$$

۱۲۱- جدول پایانی فاز یک در روش دو فاز برای حل یک مسئله می‌نیم‌سازی استاندارد را در نظر بگیرید و فرض کنید هیچ متغیر تصنعی در آن پایه‌ای نیست. در این صورت، $z_j - c_j$ (ضریب هزینه کاهش یافته) متناظر با همه متغیرهای تصنعی برابر است با

$$\circ (۱) \quad -۲ (۲) \quad -۱ (۳) \quad -M+۱ (۴)$$

۱۲۲- فرض کنید که یک جواب بهینه برای مسئله

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= x_1 + x_2 + c_3 x_3 \\ \text{s.t. } \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_j \geq 0, \quad j=1,2,3 \end{aligned}$$

به ازای $x_1 = x_2 = 1$ و $x_3 = 0$ به دست می‌آید. در این صورت، متغیرهای دوگان، y_1 و y_2 ، در جواب بهینه برای مسئله دوگان برابرند با

$$y_1 = 0, y_2 = 1 (۱) \quad y_1 = y_2 = 1 (۲)$$

$$y_1 = 1, y_2 = 0 (۳) \quad y_1 = y_2 = 2 (۴)$$

۱۲۳- فرض کنید $b \leq 0$ و داریم $c^T x \geq 0 \Rightarrow Ax \geq b$. در این صورت، کدام مورد درست است؟

$$A^T v = c \Rightarrow v^T b \leq 0 (۱) \quad A^T v = c, v \leq 0 \Rightarrow v^T b = 0 (۲)$$

$$A^T v = c, v \geq 0 \Rightarrow v^T b = 0 (۳) \quad A^T v = c, v \geq 0 \Rightarrow v^T b \leq 0 (۴)$$

۱۲۴- یک مسئله برنامه‌ریزی خطی با بخشی از جدول بهینه را به صورت زیر در نظر بگیرید. فرض کنید s_1 متغیر کمکی (مازاد) قید اول است (قید اول از نوع \geq است).

اگر مقدار سمت راست قید اول از b_1 به $b_1 + \Delta$ تغییر کند، آن‌گاه تحت چه شرطی جدول داده شده، بهینه (و شدنی) باقی می‌ماند؟

	z	...	s_1	...	RHS
z	۱	
	۰	...	-۳	...	۹
	۰	...	۱	...	۴
	۰	...	۲	...	۲

$$-۱ \leq \Delta \leq ۳ (۱) \quad -۹ \leq \Delta \leq -۴ (۲) \quad ۰ \leq \Delta \leq ۴ (۳) \quad -۳ \leq \Delta \leq ۱ (۴)$$

۱۲۵- دستگاه خطی با ضرایب ثابت $\frac{dx}{dt} = Ax$ را در نظر بگیرید، در مورد گزاره‌های الف و ب کدام گزینه درست است؟

الف) وقتی $t \rightarrow \infty$ همه جواب‌های دستگاه به صفر میل می‌کنند.

ب) قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه A_0 منفی هستند.

(۱) ب از الف نتیجه می‌شود ولی الف از ب نتیجه نمی‌شود.

(۲) الف از ب نتیجه می‌شود ولی ب از الف نتیجه نمی‌شود.

(۳) الف و ب معادل هستند.

(۴) الف و ب مستقل از یکدیگر هستند.

۱۲۶- فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ تابعی هموار و متناوب با دوره تناوب $p > 0$ باشد. اگر $x(t)$ یک جواب معادله

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \text{ باشد و } T = \int_0^p \frac{dx}{f(x)}$$

$$x(t+T) - x(t) = p \quad (۱)$$

$$x(t+p) - x(t) = T \quad (۳)$$

$$x(t+T) - x(t) = 2p \quad (۲)$$

$$x(t+p) - x(t) = 2T \quad (۴)$$

۱۲۷- اگر میدان $f(x)$ نسبت به x به طور موضعی لیپ‌شیتز و $x(t)$ جوابی از معادله $\frac{dx}{dt} = f(x)$ باشد و

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$$

$$x(0) \quad (۱) \quad x_0 \quad (۲) \quad 0 \quad (۳) \quad x(x_0) \quad (۴)$$

۱۲۸- فرض کنید $\lambda = 2i$ مقدار ویژه ماتریس حقیقی A باشد و تعداد ویژه بردارهای مستقل خطی متناظر با آن برابر ۳

باشد. در دستگاه $\frac{d}{dt} X = AX$ تعداد جواب‌های متناوب مستقل با دوره تناوب اصلی π کدام است؟

$$۳ \quad (۱)$$

$$۵ \quad (۲)$$

$$۶ \quad (۳)$$

$$۷ \quad (۴)$$

۱۲۹- دوره تناوب جواب معادله $x'' + 2x + x^2 = 0$ با شرایط اولیه $x'(0) = 0$ و $x(0) = 1$ کدام است؟

$$T = 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{4 + \sin^2 \theta}} \quad (۱)$$

$$T = 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{4 + \sin^2 \theta}} \quad (۲)$$

$$T = 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{4 + \cos^2 \theta}} \quad (۳)$$

$$T = 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{4 + \cos^2 \theta}} \quad (۴)$$

۱۳۰- بازه ماکسیمال جواب معادله زیر کدام است؟

$$\begin{cases} x'(t) = e^t - (1+x^2)x \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

$$(0, \infty) \quad (۲)$$

$$(-\infty, \infty) \quad (۴)$$

$$(0, 1) \quad (۱)$$

$$(1, \infty) \quad (۳)$$

احتمال (۱ و ۲) و فرایندهای تصادفی:

۱۳۱- اگر Y به طور یکنواخت روی بازه $(0, 5)$ توزیع شده باشد، احتمال اینکه هر دو ریشه معادله

$$4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$$
 حقیقی باشند، کدام است؟

$$\frac{2}{5} \quad (1)$$

$$\frac{3}{5} \quad (2)$$

$$\frac{4}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{5} \quad (4)$$

۱۳۲- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل از توزیع $N(1, 1)$ باشند. مقدار $P(XY - X - Y + 1 > 0)$ کدام

است؟

$$\frac{1}{6} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

۱۳۳- بازه $(0, 1)$ را به تصادف به دو قسمت تقسیم کرده و طول دو قسمت حاصل را با X و Y نشان می‌دهیم. متوسط

مساحت مستطیلی به اضلاع X و Y کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \quad (4)$$

$$\frac{1}{6} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

۱۳۴- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال استاندارد است. توزیع متغیر تصادفی $Y = \frac{X}{|X|}$ کدام است؟

$$C(0, 1) \quad (2)$$

$$DU(\{-1, +1\}) \quad (4)$$

$$t(2) \quad (1)$$

$$N(0, 1) \quad (3)$$

۱۳۵- فرض کنید تعداد مشتریانی که وارد دفتر خدمات دولت الکترونیک می‌شوند دارای توزیع پواسون با نرخ متوسط

۹ نفر در ساعت باشد. احتمال اینکه فاصله زمانی بین ورود دو مشتری متوالی کمتر از ۱۵ دقیقه باشد، کدام است؟

$$e^{-\frac{5}{3}} \quad (2)$$

$$e^{-\frac{9}{4}} \quad (4)$$

$$1 - e^{-\frac{5}{3}} \quad (1)$$

$$1 - e^{-\frac{9}{4}} \quad (3)$$

۱۳۶- در دسته کلید شخصی n کلید وجود دارد که فقط یکی از آنها درب اتاق کارش را باز می‌کند. هر بار این شخص به تصادف و یک به یک هر یک از کلیدها را مستقل از یکدیگر امتحان می‌کند. واریانس تعداد دفعاتی که لازم است تا درب باز شود در صورتی که کلیدهای اشتباهی کنار گذاشته نشوند، کدام است؟

$$\frac{n}{2} \quad (۱)$$

$$n(n-1) \quad (۲)$$

$$\frac{n(n+1)}{2} \quad (۳)$$

$$n(n+1) \quad (۴)$$

۱۳۷- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع $F_X(x)$ باشد و $Y = \text{sign}(X)$ (تابع علامت)، مقدار $\text{Var}(Y)$ کدام است؟

$$F_X(0) \quad (۲) \quad 4F_X(0)(1-F_X(0)) \quad (۱)$$

$$4F_X(0) \quad (۴) \quad F_X(0)(1-F_X(0)) \quad (۳)$$

۱۳۸- فرض کنید X_1, X_2, \dots یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل یکنواخت روی بازه $[0, 1]$ باشد. اگر $E(Y)$ مقدار $Y = x_1^a + (x_1 x_2)^a + (x_1 x_2 x_3)^a + \dots$ (که $a > 0$) باشد، مقدار $E(Y)$ کدام است؟

$$\frac{1}{a} \quad (۱)$$

$$a \quad (۲)$$

$$\frac{1}{a+1} \quad (۳)$$

$$a+1 \quad (۴)$$

۱۳۹- فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع احتمال $P(X = \pm 1) = \frac{1}{2}$ باشد. مقدار

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i > -n\right) \text{ کدام است؟}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (۱)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \quad (۲)$$

$$1 \quad (۳)$$

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (۴)$$

۱۴۰- فرض کنید (X, Y) دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد. مقدار $P(\sqrt{X} > Y)$ کدام است؟

$$f(x, y) = ye^{-\frac{1}{2}x-y^2} \quad x > 0, y > 0$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

۱۴۱- فرض کنید $Y \sim \text{Exp}(1)$ و $X | Y = y \sim P(y)$ باشند. مقدار $\text{cov}(e^{-Y}, X)$ کدام است؟

$$-\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

۱۴۲- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. توزیع حدی $\sqrt{n}(\bar{X} - \frac{1}{2})$ کدام است؟ (\bar{X} میانگین نمونه است).

$$f_X(x) = 2x, \quad 0 < x < 1$$

$$N(1, 1) \quad (1)$$

$$N(1, \frac{1}{2}) \quad (2)$$

$$N(0, 1) \quad (3)$$

$$N(0, \frac{1}{2}) \quad (4)$$

۱۴۳- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $\text{Exp}(\theta, 1)$ با تابع چگالی احتمال زیر باشد. توزیع حدی $X_{(1)}$ (مینیمم X_i ها) کدام است؟

$$f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}, \quad x \geq \theta$$

$$\text{Exp}(\theta, 1) \quad (2)$$

$$(1) \text{ تباهیده در } \theta$$

$$(4) \text{ تباهیده در صفر}$$

$$(3) \text{ یکنواخت } U(\theta, \theta+1)$$

۱۴۴- فرض کنید Y_1, Y_2, \dots متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع احتمال $P(Y_i = i) = \frac{1}{6}, i = 1, \dots, 6$ باشند. اگر $X_n = \max_{n \geq 1} (Y_1, \dots, Y_n)$ ، آنگاه $\{X_n, n \geq 1\}$ یک زنجیره مارکوف است. مقدار

$p_{23}^{(8)} = P(X_{n+8} = 3 | X_n = 2)$ کدام است؟

$$\left(\frac{2}{6}\right)^8 - \left(\frac{1}{6}\right)^8 \quad (1)$$

$$\left(\frac{4}{6}\right)^8 - \left(\frac{2}{6}\right)^8 \quad (2)$$

$$\left(\frac{3}{6}\right)^8 - \left(\frac{2}{6}\right)^8 \quad (3)$$

$$\left(\frac{3}{6}\right)^8 - \left(\frac{1}{6}\right)^8 \quad (4)$$

۱۴۵- زنجیره مارکوف X با فضای وضعیت $S = \{0, 1, 2\}$ و ماتریس احتمال انتقال زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید $E_x[T_y]$ نشان‌دهنده متوسط زمان انتظار برای ورود فرایند به وضعیت y با شروع از وضعیت x باشد. گزینه درست کدام است؟

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$E_0[T_1] < \infty \quad (1)$$

$$E_1[T_2] = \infty \quad (2)$$

$$E_0[T_0] = \infty \quad (3)$$

$$E_1[T_1] = \infty \quad (4)$$

۱۴۶- فرض کنید $N(t) \sim P(\lambda t)$ ، مقدار $P\left[\frac{N(2)}{N(5) + N(2)} < \frac{1}{2}\right]$ کدام است؟

$$e^{-2\lambda} \quad (1)$$

$$1 - e^{-2\lambda} \quad (2)$$

$$1 - e^{-3\lambda} \quad (3)$$

$$e^{-2\lambda} \quad (4)$$

۱۴۷- در زنجیر مارکوف دو حالتی $\{X_n : n \geq 0\}$ (در وضعیت ۰، ۱) با ماتریس احتمال‌های تغییر وضعیت زیر، انتظار می‌رود در چند درصد مراحل، فرایند در حالت ۰ باشد؟

$$P = \begin{matrix} & 0 & 1 \\ 0 & \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ 1 & \end{matrix}$$

(۱) $\frac{3}{33}\%$

(۲) $\frac{47}{100}\%$

(۳) $\frac{53}{100}\%$

(۴) $\frac{66}{100}\%$

۱۴۸- برای زنجیر مارکوف $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ با فضای وضعیت $s = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ و ماتریس احتمال‌های انتقال زیر، کلاس‌های هم‌ارزی کدام است؟

$$P = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \end{matrix}$$

(۱) $\{\{0, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$

(۲) $\{\{0\}, \{1, 4\}, \{2\}, \{3\}\}$

(۳) $\{\{0, 3\}, \{2\}, \{1, 4\}\}$

(۴) $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$

۱۴۹- فرض کنید $\{X_n, n \geq 0\}$ یک زنجیره مارکوف با توزیع اولیه $p + q = 1$ ، $P[X_0 = 1] = p$ ، $P[X_0 = 2] = q$ و

ماتریس تغییر وضعیت یک مرحله‌ای $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $P(X_1 = X_2)$ کدام است؟

(۲) $\frac{1+p}{16}$

(۱) $\frac{11-q}{16}$

(۴) $\frac{11-p}{16}$

(۳) $\frac{3(1+p)}{16}$

۱۵۰- اگر $\{N(t), t \geq 0\}$ یک فرایند پواسون با پارامتر $\lambda (> 0)$ و T_1 یک متغیر تصادفی نمایی با متوسط $\frac{1}{\lambda}$ و مستقل

از فرایند پواسون باشد، مقدار $\text{Var}(N(T_1))$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴